

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3, 534.1

ФОРМЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Канд. техн. наук, доц. М.М.ПЛЬИН

Основным методом исследования вынужденных колебаний в диссипативных системах с распределенными параметрами является метод разложения в ряд по собственным формам колебаний. В силу учета конечного числа гармоник метод является приближенным. Предлагаемый метод определения форм вынужденных колебаний в замкнутой форме (точный метод) отличается простотой и не предполагает использования в процессе вычисления комплексной математики.

The expansion in a series on eigen modes of oscillation is the main method of investigation of forced oscillation in dissipative systems with distributed parameters. The method is approximate due to the fact that a limited number of harmonics are taken into account. The proposed method of forced oscillation modes determination in a closed form (exact method) is characterized by simplicity in the absence of need for using of complex mathematics during calculations.

В качестве примера рассмотрим вынужденные продольные колебания гипотетической двухступенчатой жидкостной ракеты [1], возникающие за счет низкочастотной пульсации тяги двигателя

$$P(t) = P_1 \cos pt,$$

где P_1 и p — амплитуда и частота пульсации соответственно.

Корпус «сухой» ракеты аппроксимируем неоднородным стержнем, а жидкость в баках, имеющую возможность относительного, по отношению к корпусу, перемещения, связанного с деформацией стенок и днищ баков, эквивалентными осцилляторами. Эпюры продольной жесткости и погонной массы корпуса представлены на рис. 1, а параметры эквивалентных осцилляторов, в рассматриваемый момент полета, в табл. 1.

Разделим корпус на участки между стыками — сечениями, где приложена пульсация тяги двигателя и присоединены эквивалентные осцилляторы. Использование метода Рунге—Кутты как для вычисления собственных форм колебаний, так и для вычисления форм вынужденных колебаний позволяет рассматривать участки с произвольным изменением по длине продольной жесткости и погонной массы.

Для оценки внутреннего неупругого сопротивления в корпусе ракеты воспользуемся условной упруго-вязкой гипотезой Фойхта [2], согласно которой напряжения $\sigma(x,t)$ и деформация $\varepsilon(x,t)$ связаны соотношением

$$\sigma(x,t) = E(x) \left(\varepsilon(x,t) + \frac{\chi}{p} \dot{\varepsilon}(x,t) \right); \chi = \frac{\delta}{\pi}, \quad (1)$$

где $E(x)$ — модуль упругости; δ — логарифмический декремент колебаний; p — частота пульсации.

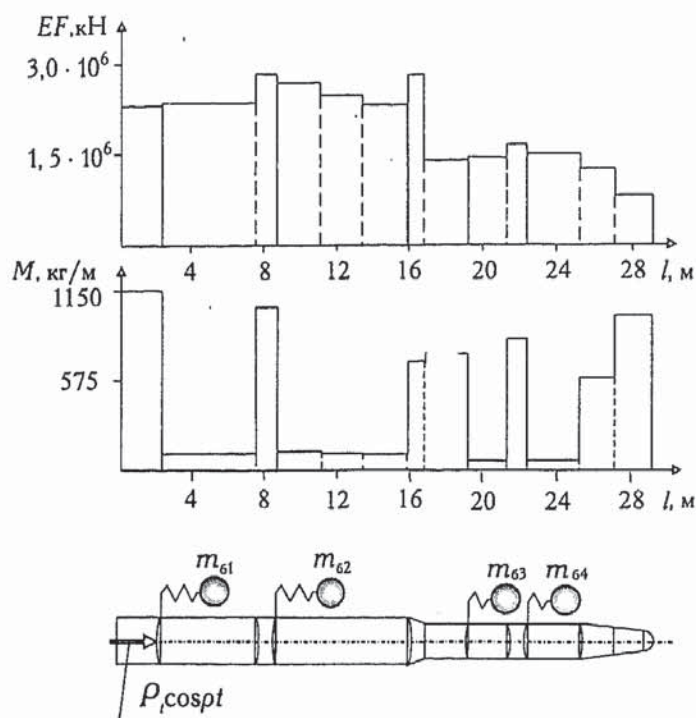


Рис.1. Параметры корпуса ракеты

Таблица 1

№ осциллятора	m_{6i} , КГ	$c_{экви}$, КН/М
1	31700	1,986E + 05
2	78300	1,730E + 05
3	6900	2,132E + 05
4	16800	2,923E + 05

В соответствии с методом комплексных амплитуд представим пульсацию тяги двигателя в виде

$$P_i \cos pt = \operatorname{Re}(P_i e^{ipt}). \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний корпуса ракеты на участке между стыками будет, в соответствии с (1), иметь вид

$$\mu(x) \ddot{u}(x, t) = \left\{ EF(x) \left[u'(x, t) + \frac{\chi}{p} \dot{u}'(x, t) \right] \right\}', \quad (3)$$

где $EF(x)$ и $\mu(x)$ — продольная жесткость и погонная масса корпуса; $u(x, t)$ — смещение x -го сечения корпуса.

Представим $u(x, t)$ при установившихся вынужденных колебаниях в соответствии с (2) в виде

$$u(x, t) = \Phi(x) e^{ipt} = [\varphi(x) + i\psi(x)] e^{ipt}, \quad (4)$$

где $\Phi(x)$ — комплексная форма вынужденных колебаний; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — ее действительная и мнимая части.

Тогда, разделив (3) на действительную и мнимую части, получим, после линейного преобразования,

$$\begin{aligned} (1 + \chi^2)[EF(x)\varphi'(x)] + \mu(x)p^2[\varphi(x) + \chi\psi(x)] &= 0, \\ (1 + \chi^2)[EF(x)\psi'(x)] + \mu(x)p^2[\psi(x) - \chi\varphi(x)] &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Воспользовавшись методом Рунге—Кутты, представим систему (5) в виде четырех уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{U}(x)}{dx} = \mathbf{c}(x)\mathbf{U}(x), \tag{6}$$

где $\mathbf{U}(x) = [\varphi(x), EF(x)\varphi'(x), \psi(x), EF(x)\psi'(x)]^T$ — вектор формы;

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{EF(x)} & 0 & 0 \\ \frac{\mu(x)p^2}{1 + \chi^2} & 0 & -\frac{\chi\mu(x)p^2}{1 + \chi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EF(x)} \\ \frac{\chi\mu(x)p^2}{1 + \chi^2} & 0 & -\frac{\mu(x)p^2}{1 + \chi^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим стык с эквивалентным осциллятором (рис. 2). Условия перехода через стык имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(0, t) &= u_{i-1}(l_{i-1}, t); \quad N_i(0, t) = N_{i-1}(l_{i-1}, t) - F_{\text{пр}i}; \\ m_{\text{б}i}\ddot{v}_i(t) &= -F_{\text{пр}i}, \end{aligned} \tag{7}$$

где N_i — продольная сила; $F_{\text{пр}i}$ — сила в i -ой пружине; $m_{\text{б}i}$ — масса i -го осциллятора; $v_i(t)$ — его смещение.

По аналогии с (4) и (2) представим $v_i(t)$ и $F_{\text{пр}i}$ в виде

$$v_i(t) = \Phi_{ri}e^{i\rho t} = (\varphi_{ri} + i\psi_{ri})e^{i\rho t};$$

$$F_{\text{пр}i} = c_{\text{эки}i} \left(\lambda + \frac{\chi_n}{\rho} \dot{\lambda} \right) \quad \chi_n = \frac{\delta_n}{\pi},$$

где Φ_{ri} форма вынужденных колебаний i -го осциллятора; φ_{ri} и ψ_{ri} ее действительная и мнимая части; $c_{\text{эки}i}$ — жесткость эквивалентной пружины; λ — ее деформация; δ_n — логарифмический декремент колебаний жидкости в упругом баке.

Полагая в первом приближении $\chi_n = \chi$, получим из (7) условие перехода через стык и форму вынужденных колебаний осциллятора

$$\mathbf{U}_i(0) = \mathbf{g}_i \mathbf{U}_{i-1}(l_{i-1});$$

$$\mathbf{U}_i(0) = \mathbf{g}_i \mathbf{U}_{i-1}(l_i) + \mathbf{P},$$

где \mathbf{P} — вектор, характеризующий воздействие пульсации тяги,

$$\mathbf{P} = \left[0, -\frac{P_t}{1+\chi^2}, 0, \frac{P_t \chi}{1+\chi^2} \right]^T.$$

В случае, если в этом стыке нет присоединенного осциллятора, матрица \mathbf{g}_i становится единичной.

Вектор формы на входе в первый участок задается в виде линейной комбинации трех векторов, два из которых имеют по одной единичной компоненте, а третий является нулевым

$$\mathbf{U}_1(0) = \varphi_1(0) \mathbf{b}_{11} + \psi_1(0) \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_{13}, \quad (10)$$

где $\mathbf{b}_{11} = (1, 0, 0, 0)^T$; $\mathbf{b}_{12} = (0, 0, 1, 0)^T$; $\mathbf{b}_{13} = (0, 0, 0, 0)^T$; а $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ — подлежащие определению величины действительной и мнимой частей вектора формы в начальном сечении корпуса.

Используя вектор формы в виде (10) и проинтегрировав на первом участке систему (6), получим вектор формы

$$\mathbf{U}_1(l_1) = \varphi_1(0) \mathbf{d}_{11} + \psi_1(0) \mathbf{d}_{12} + \mathbf{d}_{13},$$

причем вектор \mathbf{d}_{13} будет нулевым.

При переходе через последующие стыки будем пользоваться следующей процедурой:

если к стыку не приложена пульсация тяги двигателя, то векторы на входе в каждый следующий участок корпуса будут определяться соотношением

$$\mathbf{b}_{ik} = \mathbf{g}_i \mathbf{d}_{i-1k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (11)$$

если же к стыку приложена пульсация тяги, то векторы \mathbf{b}_{i1} , \mathbf{b}_{i2} будут определяться по (14), а вектор \mathbf{b}_{i3} — в соответствии с соотношением

$$\mathbf{b}_{i3} = \mathbf{g}_i \mathbf{d}_{i-13} + \mathbf{P}. \quad (12)$$

Естественно, что в этом случае вектор \mathbf{b}_{i3} и все последующие векторы, порожденные им, перестанут быть нулевыми.

Последовательно проходя по участкам корпуса и стыкам с учетом (6), (11) и (12), получим вектор формы на противоположном конце корпуса

$$\mathbf{U}_s(l_s) = \varphi_1(0) \mathbf{d}_{s1} + \psi_1(0) \mathbf{d}_{s1} + \mathbf{d}_{s3},$$

или с учетом значения вектора $\mathbf{U}_s(l_s)$ (9),

$$d_{s21} \varphi_1(0) + d_{s22} \psi_1(0) = -d_{s23},$$

$$d_{s41} \varphi_1(0) + d_{s42} \psi_1(0) = -d_{s43},$$

откуда

$$\varphi_1(0) = -\frac{d_{s,23}d_{s,42} - d_{s,43}d_{s,22}}{d_{s,21}d_{s,42} - d_{s,41}d_{s,22}}; \quad \psi_1(0) = -\frac{d_{s,21}d_{s,43} - d_{s,41}d_{s,23}}{d_{s,21}d_{s,42} - d_{s,41}d_{s,22}}.$$

Создав теперь вектор $U_1(0)$ в виде (10) и пройдя последовательно через участки и стыки, добавив в стыке, где приложена пульсация тяги к вектору $g_i d_{i-1}$ вектор P , получим, используя формулы (9), амплитудные значения вынужденных перемещений сечений корпуса, продольной силы в сечениях, а также перемещений эквивалентных осцилляторов. В силу линейной зависимости смещений и сил от амплитуды пульсации тяги двигателя P , все определяемые величины относятся к амплитуде пульсации.

Первые семь собственных частот, а также необходимые для расчета по методу разложения в ряд приведенные массы представлены в табл. 2.

Таблица 2

№ тона колебаний	Собственная частота, рад/с	Приведенная масса, кг
1	54,7949	176503
2	65,7408	61157
3	144,7823	92108
4	248,4950	3339
5	302,8911	4919
6	482,2676	4189
7	773,9996	3379

Рассмотрим частоту пульсации тяги двигателя меньшую первой собственной частоты и равную $p = 30$ рад/с. Такой выбор исключает возможность резонанса по какой-либо гармонике при использовании метода разложения в ряд по собственным формам колебаний и, кажется, позволяет ограничиться использованием малого числа гармоник. Однако результаты расчетов, представленные на рис. 3 и 4, показывают ошибочность подобного утверждения. На рисунках сплошными линиями представлены формы вынужденных колебаний, пунктирными — результаты расчета по методу разложения в ряд. Амплитуды осцилляторов, соответствующие методу разложения в ряд, представлены окружностями большего радиуса.

Расхождения в распределении амплитудных значений при учете двух гармоник являются недопустимыми. Ситуация улучшается при учете семи гармоник, но и в этом случае сохраняются расхождения в продольной силе в окрестности сечения, где приложена пульсация тяги. Очевидно, что при использовании метода разложения в ряд эта ошибка сохранится и при дальнейшем увеличении числа гармоник в разложении, поскольку собственные формы продольной силы не имеют дополнительного скачка в сечении, где приложена пульсация тяги. Некоторое увеличение трудоемкости, по сравнению с методом разложения в ряд, компенсируется высокой скоростью вычислений современных компьютеров. Отметим, что сходимость метода разложения в ряд улучшается только в случаях воздействия пульсаций с частотами, близкими к резонансным.

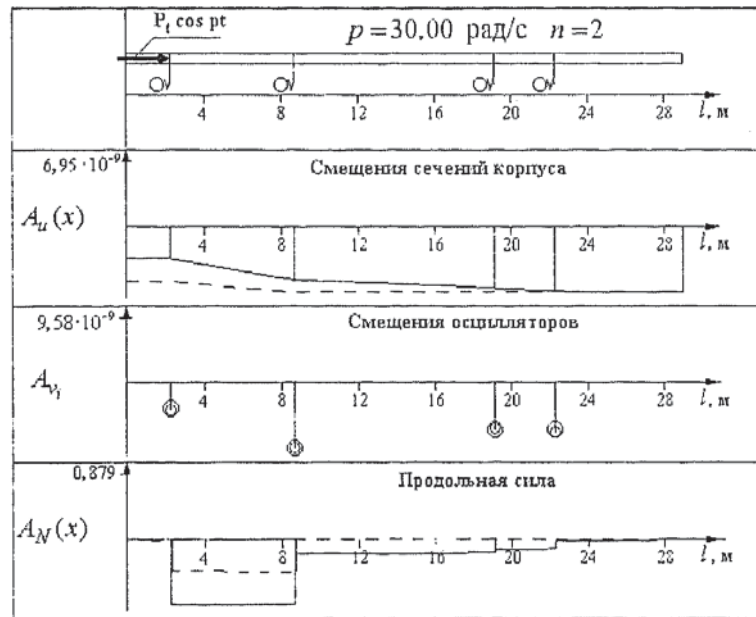


Рис.3. Вынужденные колебания ($p = 30$ рад/с. $n = 2$)

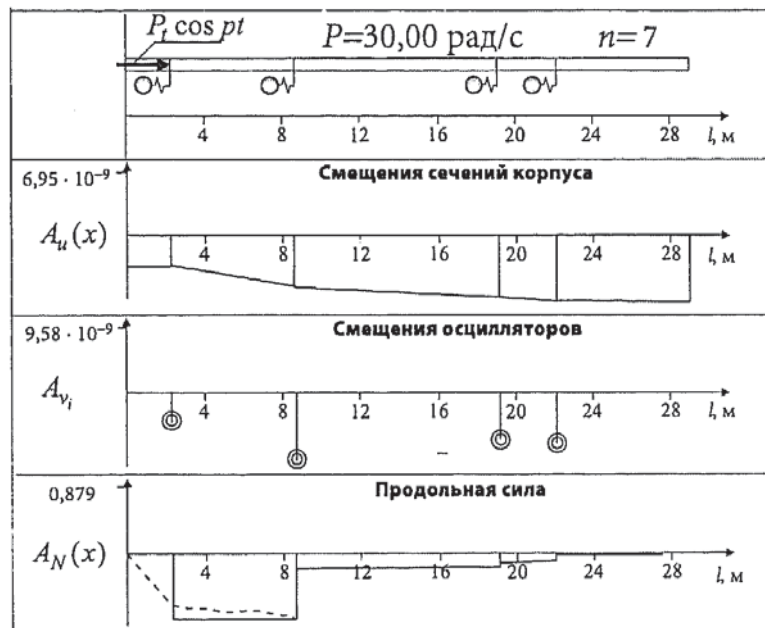


Рис.4. Вынужденные колебания ($p = 30$ рад/с. $n = 7$)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников К. С. Динамика ракет: Учебник для вузов. 2-е издание, исправленное и дополненное. — М.: Машиностроение, 2003. — 520 с.
2. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. — М.: Физматгиз, 1960. — 160 с.