

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.3; 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Д-р техн. наук, проф. В.А. КРЫСЬКО, асп. Э.С. КУЗНЕЦОВА, асп. Н.Е. САВЕЛЬЕВА

Исследовались хаотические колебания гибкой пластины, находящейся в температурном поле, при действии поперечной знакопеременной нагрузки. Рассмотрен сценарий перехода колебаний поверхности пластины в состояние хаоса на основе качественной теории дифференциальных уравнений и теории нелинейной динамики.

In work chaotic vibrations of the flexible plate which are taking place in a temperature field are investigated, at action of cross sign-variable loading. The transition scenario a plate vibrations in a condition of chaos is investigated on the basis of the qualitative theory of the differential equations and the theory of nonlinear dynamics.

С проблемой, связанной с нелинейными колебаниями оболочечных структур, сталкиваются во многих отраслях современной промышленности. Это, прежде всего, изучение мирового океана, авиакосмическая отрасль и гражданское строительство [1—4].

Было показано, что во многих случаях линейный анализ недостаточен для изучения колебаний сложных систем ввиду высоких акустических нагрузок и серьезных перегревов оболочечных систем, и усложнения расчетных схем: например, панели самолета при движении их в сверхзвуковых потоках испытывают на себе серьезные динамические воздействия, а также тепловые нагрузки [5, 6].

Изучению хаотических колебаний гибких оболочек посвящены работы [7—10]. Исследований хаотических колебаний пластин в температурном поле в известной нам литературе не имеется, данная работа ставит своей задачей восполнить указанный пробел.

Постановка задачи. Рассмотрим гибкую оболочку, которая представляет собой замкнутую трехмерную область пространства R^3 в системе координат, определяется как трехмерная область $\Omega = \{x, y, z \mid (x, y) \in [0; a] \times [0; b], -h \leq z \leq h\}$. Оболочка находится в температурном поле, на ее поверхность действует постоянная знакопеременная нагрузка. Температурное поле T задается по следующему закону: $T(x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Систему уравнений динамики оболочки запишем в безразмерном виде [11]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[\lambda^{-2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] - L(w, F) - \nabla_k^2 F = \\ & = q - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\lambda^{-1} \frac{\partial^2 M_t}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 M_t}{\partial y^2} \right) \\ & \lambda^{-2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w - \lambda^{-1} \frac{\partial^2 N_t}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 N_t}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены безразмерные величины: $w = 2h\bar{w}$, $F = E(2h)^3\bar{F}$, $t = t_0\bar{t}$, $\lambda = a/b$;

$x = a\bar{x}$, $y = b\bar{y}$; $k_y = \frac{2hk_y}{b^2}$, $k_x = \frac{2hk_x}{a^2}$, $q = \frac{E(2h)^4}{a^2b^2}q$, где a, b — размеры оболочки по x

и y соответственно, t — время, ϵ — коэффициент сопротивления среды, в которой происходит движение оболочки, F — функция усилий, w — функция прогиба, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль упругости,

$\nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, k_x, k_y — кривизны оболочки по x и y ($k_x = k_y = 0$ в случае пласт-

тины), $L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$,

$N_i = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Q dz$ — температурное усилие, $M_i = 12 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Q z dz$ — температурный момент,

$Q = T - T_0$ — приращение температуры, T_0 — начальная температура. Поперечное внешнее давление, приложенное к оболочке, будем задавать в виде $q(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t)$, где q_0 и ω_p — амплитуда и частота гармонического возбуждения. Для краткости черточка над безразмерными величинами в (1) опущена.

Рассмотрим пластину со следующим закреплением: шарнирное опирание по торцам с присутствием на торцах гибких ребер, поэтому присоединим граничные условия

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; 1, \quad (2)$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad F = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; 1. \quad (3)$$

$$\text{И начальные условия } w(x, y)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Метод исследования — метод Бубнова—Галеркина

Краевая задача по пространственным координатам решается методом Бубнова-Галеркина в высших приближениях. Функции w и F , являющиеся решениями (1), приближенно аппроксимируем аналитическим выражением, содержащим конечное число произвольных параметров, тогда их можно представить в виде произведения функций, зависящих от времени и от координат.

$$w = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=0}^{M_y} A_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad F = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=0}^{M_y} B_{ij}(t) \psi_{ij}(x, y). \quad (5)$$

Координатные системы $\{\varphi_{ij}(x, y), \psi_{ij}(x, y)\}$ выберем так, чтобы функции были для любых i, j линейно независимы, непрерывны вместе со своими частными производны-

ми до четвертого порядка включительно в области Ω и чтобы $\varphi_{ij}(x, y), \psi_{ij}(x, y)$ удовлетворяли краевым условиям (2), (3). Кроме того, требуется, чтобы $\varphi_{ij}(x, y), \psi_{ij}(x, y)$ обладали свойством полноты.

Рассмотрим шарнирно опертую по криволинейному кругу замкнутую пластину с однородными граничными условиями (2), (3) и нулевыми начальными условиями (4).

Для удобства обозначим левые части уравнений системы (1) через Φ_1 и Φ_2 соответственно

$$\begin{aligned} \Phi_1(w, F, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dots; M_t, \frac{\partial^2 M_t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 M_t}{\partial y^2}) + q(x, y, t) &= 0, \\ \Phi_2(w, F, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dots; N_t, \frac{\partial^2 N_t}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 N_t}{\partial^2 y}) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Применяя процедуру Бубнова—Галеркина к (8) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \Phi_1 \varphi_{kl}(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 q(x, y, t) \varphi_{kl}(x, y) dx dy &= 0, \\ \int_0^1 \int_0^1 \Phi_2 \psi_{kl}(x, y) dx dy &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad l = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{7}$$

С учетом (7) уравнения (6) запишутся так:

$$\begin{aligned} \sum_{kl} [\sum_{ij} A_{ij} S_{ijrskl} + q Q_{kl} + H_{1kl} - \sum_{ij} A_{ij} \sum_{rd} B_{rs} D_{1,ijrskl} - \sum_{ij} \left[\frac{d^2 A_{ij}}{dt^2} + \varepsilon \frac{dA_{ij}}{dt} \right] G_{ijkl}] &= 0, \\ \sum_{kl} [\sum_{ij} B_{ij} P_{ijrskl} - \sum_{ij} A_{ij} \sum_{rs} A_{rs} D_{2,ijrskl} + H_{2kl}] &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь знак $\sum_{kl} [*]$ перед каждым уравнением системы (8) указывает, что под данным уравнением понимается система kl такого вида уравнений, а интегралы процедуры Бубнова—Галеркина имеют вид

$$\begin{aligned} S_{ijrskl} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_{rs}}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_{rs}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_{rs}}{\partial x \partial x} \right] \varphi_{kl} dx dy, \\ D_{1,ijrskl} &= \int_0^1 \int_0^1 L(\varphi_{ij}, \psi_{rs}) \varphi_{kl} dx dy, \quad D_{2,ijrskl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} L(\varphi_{ij}, \varphi_{rs}) \psi_{kl} dx dy, \\ P_{ijrskl} &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_{rs}}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_{rs}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_{rs}}{\partial x \partial x} \right] \psi_{kl} dx dy, \\ G_{ijkl} &= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{ij} \psi_{kl} dx dy, \quad Q_{kl} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_{kl} q(x, y, t) dx dy, \end{aligned} \tag{9}$$

$$H_{1kl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[\lambda^{-1} \frac{\partial^2 M_t}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 M_t}{\partial y^2} \right] \varphi_{kl} dx dy,$$

$$H_{2kl} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\lambda^{-1} \frac{\partial^2 N_t}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 N_t}{\partial y^2} \right] \psi_{kl} dx dy.$$

Интегралы (9), за исключением, быть может, Q_{kl} , если поперечная нагрузка приложена не ко всей поверхности оболочки, вычисляются по всей срединной поверхности оболочки. В результате применения процедуры Бубнова—Галеркина получены следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени относительно коэффициентов A в матричной форме (10) и линейное алгебраическое уравнение относительно коэффициентов B , записанное в матричной форме (11),

$$\mathbf{G}(\ddot{\mathbf{A}} + \varepsilon \dot{\mathbf{A}}) + \mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{D}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{Q}q(t) + \mathbf{H}_1, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{D}_2 \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{H}_2. \quad (11)$$

Далее сводим ОДУ 2-го порядка по времени к системе двух ОДУ 1-го порядка по времени относительно неизвестных коэффициентов A (10). Полученную задачу Коши будем решать методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности. Шаг по времени выбирается из условия устойчивости решения ($\Delta t = 1.953125 \cdot 10^{-3}$). ЛАУ разрешаем относительно неизвестного коэффициента B (11) и решаем методом обратной матрицы на каждом шаге по времени.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}} = -\bar{\varepsilon} \mathbf{R} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D}_1 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{A} + q(\bar{t}) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_1 \\ \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} [-\mathbf{D}_2 \mathbf{A} \mathbf{A} + \mathbf{H}_2] \quad (13)$$

Пластина при действии поперечной знакопеременной нагрузки в температурном поле

Для исследования поведения пластины при действии поперечной знакопеременной нагрузки в температурном поле были использованы следующие характеристики: графики зависимости $w_{\max}(q_0)$: сигнал $w(t)$; фазовый портрет $w(w')$; спектр мощности $S(\omega_p)$; отображение Пуанкаре $w_t(w_{t+T})$. Данные характеристики достаточно полно описывают поведение системы.

Для некоторых значений температуры характеристики приведены в табл. 1. Графики были построены для пластины, колеблющейся на собственной частоте $\omega_0 = 5,9$, нагрузка изменяется по следующему закону $q = q_0 \sin(\omega_p t)$, ω_p — частота вынуждающей силы, $q_0 = 60$ — амплитуда вынуждающей силы. При данном значении амплитуды нагрузки, без действия температурного поля, колебания носят гармонический характер.

Первая и вторая строки таблицы характеризуют гармонические колебания, $Q(T)$ изменяется от 0 до 0,06.

При увеличении значения температуры, $Q(T) = 0,062$, появляется первая независимая частота $\omega_1 = 0,83$, она приводит к образованию в отображении Пуанкаре одной отдельно

Таблица 1

$Q(T)$	$w(t)$	$w(w')$	$w_t(w_{t+T})$	$S(\omega_p)$
0				
0,06				
0,062				
0,075				
0,08				
0,085				
0,098				
0,15				
0,2				
1				

отстоящей точки и группы точек. Дальнейшее увеличение температуры $Q(T) = 0,075$ приводит к появлению второй частоты $\omega_2 = 5,07$, которая является линейной комбинацией собственной частоты колебаний и первой независимой частоты $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1 = 5,9 - 0,83 = 5,07$. При $Q(T) = 0,08$, помимо уже существующих частот $\omega_0, \omega_1, \omega_2$, присутствует еще одна частота $\omega_3 = 2\omega_1 = 1,66$, в сечении Пуанкаре образуется странный аттрактор. Появляющиеся частоты при $Q(T) = 0,085, Q(T) = 0,098$ являются линейными комбинациями уже существующих частот. При $Q(T) = 0,15$ сечение Пуанкаре начинает изменять свою форму, появляется большое количество частот и при $Q(T) = 0,2$ странный аттрактор разрушается, а при $Q(T) = 1$ и при больших значениях остается множество точек — хаос.

На рис. 1 показана шкала характера колебаний, построенная на основе спектра мощности. Данная шкала представляет собой фрагмент карты управляющих параметров, узкую полосу, вырезанную на частоте собственных линейных колебаний и увеличенную для большей наглядности в зависимости от $Q(T)$.

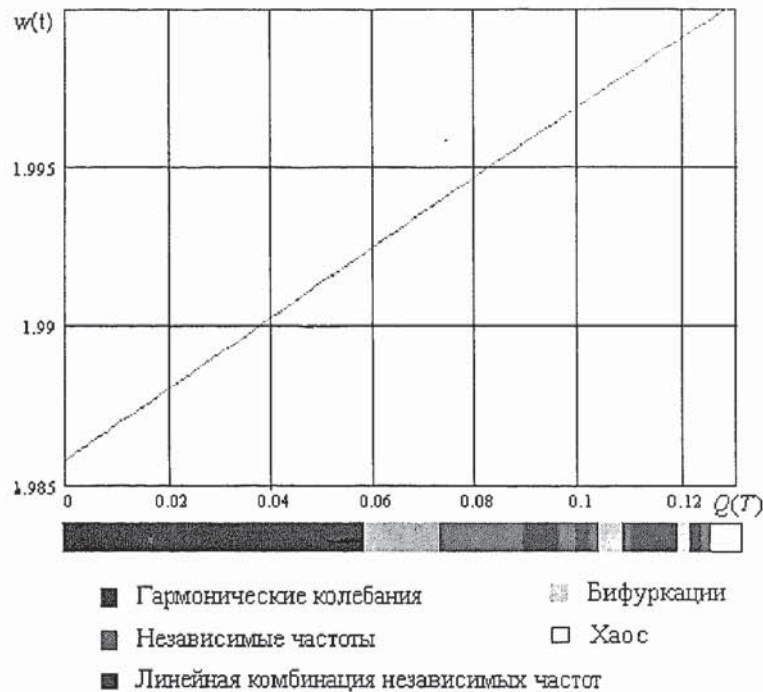


Рис. 1

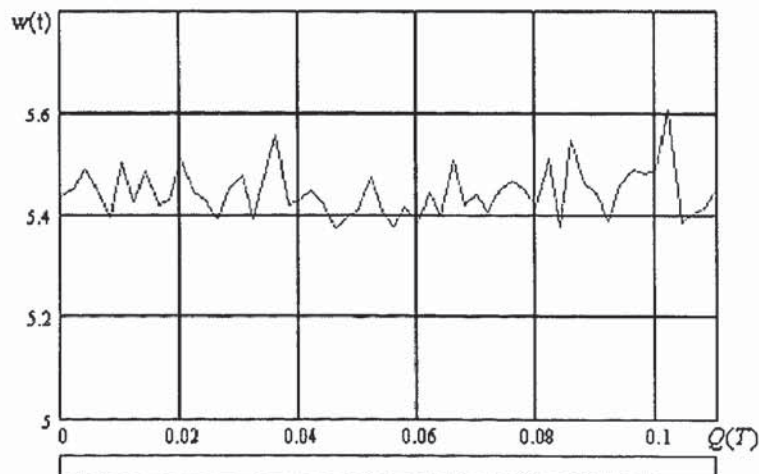


Рис. 2

При выборе амплитуды нагрузки из зоны хаоса, например $q_0 = 1060$, влияние температурного поля не отражается на колебательных движениях, они остаются хаотическими (рис. 2).

Согласно приведенным выше условным обозначениям шкала белого цвета на рис. 2 означает хаотические колебания, что подтверждается графиком.

Изучение динамики гибких пластин в температурном поле показало, что система может переходить из гармонических колебаний в хаотические.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы строительной механики ракет / Л.И. Балабух, К.С. Колесников, В.С. Зарубин В.С. и др. — М.: Высшая школа, 1969. — 494 с.
2. Конструкция и отработка РДТТ / А.М. Винницкий, В.Г. Волков, И.Г. Волковичский и др. — М.: Машиностроение, 1980. — 384 с.
3. Инженерный справочник по космической технике / Под ред. А.В. Солодова. — М.: Воениздат, 1977. — 696 с.
4. Коротеев А. С., Миронов В. М., Свирчук Ю. С. Плазматроны. Конструкция, характеристики и расчет. — М.: Машиностроение, 1991. — 293 с.
5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдеевский, Б.М. Галицкий, Г.А. Глебов и др. Под общ. ред. В.С. Авдеевского, В.К. Кошкина. — М.: Машиностроение, 1992. — 528 с.
6. Бакулин В. Н., Образцов И. Ф., Потопахин В. А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. — М.: Наука. Физматлит, 1998. — 464 с.
7. A w r e j c e w i c z J., K r y s k o V. A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of shells. Application of the Bubnov—Galerkin and Finite Difference Numerical Methods. «Springer-Verlag», Berlin, New-York, London, Paris, Tokio, 2003. — 430 p.
8. A w r e j c e w i c z J., K r y s k o V. A. Feigenbaum Scenario Exhibited by Thin Plate Dynamics // Nonlinear Dynamics 24. — 2001. — P. 373—398.
9. A w r e j c e w i c z J., K r y s k o A. V. Analysis of complex parametric vibrations of plates and Shells using Bubnov-Galerkin approach // Archive of Applied Mechanics 73. — 2003. — P. 495—503.
10. A w r e j c e w i c z J., K r y s k o V. A., K r y s k o A. V. Complex Parametric Vibration of Flexile Rectangular Plates // Mecanica 39. — 2004. — P. 221—224.
11. В о л ь м и р А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1978. — 419 с.