

Расчет и конструирование машин

УДК 539.371

Алгоритм количественного анализа математических моделей механики деформирования цилиндрической оболочки

Д.В. Афлитонов, Ю.И. Виноградов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

An algorithm for the quantitative analysis of mathematical models of deformation of a cylindrical shell

D.V. Aflitonov, Yu.I. Vinogradov

Bauman Moscow State Technical University, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation.



e-mail: aflitonovdv@gmail.com, vino.yuri@rambler.ru



Широкое использование цилиндрической оболочки (трубопроводы жилищно-коммунального хозяйства, газопроводы, нефтепроводы, емкости химических производств, надводных, подводных и летательных аппаратов) в технологических процессах и машиностроении обуславливает особое внимание к ней ученых-механиков и построение различных математических моделей механики ее деформирования для расчета на прочность. Приведено сравнение корней характеристических уравнений известных математических моделей цилиндрической оболочки. Обнаруженное качественное (комплексные и действительные) и количественное различие корней требует анализа математических моделей. Для этого разработан эффективный алгоритм аналитического решения тестовых краевых задач сравнительного количественного анализа математических моделей механики деформирования оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, корни характеристических уравнений математических моделей, аналитическое решение краевых задач.



An intensive use of cylindrical shells for the construction of water supply lines, gas and oil pipelines, as well as tanks used in chemical industries and ships, submarines, and aircrafts structures stimulates the development of various mathematical models describing their stress-strain states. The roots of the characteristic equations of well-known mathematical models of a cylindrical shell are compared and analyzed. It has been found that the roots (both real and complex) differ qualitatively, which involves the analysis of the mathematical models. For this purpose, an efficient algorithm for analytical solutions of test boundary value problems for the comparative quantitative analysis of the mathematical models of mechanics of shells has been developed.

Keywords: cylindrical shell, roots of characteristic equations, mathematical model, analytical solution, boundary value problem.

Анализ математических моделей механики деформирования изотропных замкнутых в окружном направлении круговых упругих цилиндрических оболочек постоянной толщины основан на методе Фурье разделения переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными. Полученные таким образом обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) имеют постоянные коэффициенты. Решение ищется в экспоненциальных функциях независимых постоянных и определяется корнями характеристического уравнения.

Решение краевых задач на основе полученных ОДУ сводится к построению системы алгебраических уравнений при заданных краевых условиях, решению системы алгебраических уравнений и определению произвольных постоянных.

Классический алгоритм аналитического решения известен и, очевидно, прост. Однако до настоящего времени он не реализован по причине неустойчивости счета на ЭВМ.

Для того чтобы преодолеть трудности и построить эффективный алгоритм аналитического решения краевых задач и на его основе выполнить сравнительный количественный анализ известных математических моделей необходимо:

- выполнить аналитический обзор известных математических моделей механики деформирования цилиндрических оболочек;
- провести анализ корней характеристических уравнений известных математических моделей;
- построить алгоритм решения ОДУ в экспоненциальных функциях;
- выполнить преобразование экспоненциальных функций в функции Коши–Крылова;
- построить эффективный алгоритм решения краевых задач с устойчивым счетом и контролируемой погрешностью на ЭВМ.

Преодолев перечисленные проблемы, можно ответить на фундаментальный вопрос теории оболочек: какова разница прикладной значимости математических моделей, построенных известными авторами [1–10].

Для сравнительного количественного анализа математических моделей известных авторов отсутствуют научные основания для выбора одной из них в качестве эталона. Поэтому за базовую модель принимаем одну из них, например, техническую моментную теорию В.З. Власова [2–4] как самую используемую.

Выполняя аналитический обзор математических моделей механики деформирования ци-

линдрической оболочки и избегая известной громоздкости, рассмотрим лишь характеристические уравнения дифференциальных уравнений, полученные известными авторами:

$$\lambda^8 + a_3\lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_0 = 0, \quad (1)$$

где a_i — коэффициенты характеристического уравнения:

В.З. Власов:

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -4n^6 + 8n^4 - 2\mu n^4 - 2n^2, \\ a_2 = 6n^2(n^2 - 1) + (1 + 4k^4), \quad a_3 = -4n^2 + \mu;$$

Б.Г. Галёркин:

$$a_0 = n^6(n^2 - 1), \quad a_1 = -4n^6 + (5 - 3\mu)n^4 - (1 - 2\mu)n^2, \\ a_2 = 6n^4 - (4 - \mu)n^2 + 4k^4, \quad a_3 = -4n^2 + 2\mu;$$

А.Л. Гольденвейзер:

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -4n^2(n^2 - 1)^2, \\ a_2 = 6n^4 - 8n^2 + 2n^2\mu^2 + 4k^4, \quad a_3 = -4n^2;$$

В.М. Даревский:

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -4n^2(n^2 - 1)^2, \\ a_2 = 6n^4 - 7n^2 + n^2\mu^2 + 4k^4, \quad a_3 = -4n^2;$$

В. Флюгге:

$$a_0 = n^4(n^2 - 1)^2, \quad a_1 = -2n^2[2n^4 - (4 - \mu)n^2 + (2 - \mu)], \\ a_2 = 6n^2(n^2 - 1) + 4k^4, \quad a_3 = -2(2n^2 - \mu).$$

Здесь n — номер гармоники в разложениях Фурье; μ — коэффициент Пуассона; k — коэффициент, $k = [3(1 - \mu^2)]^{1/4}(R/h)^{1/2}$; h/R — относительная толщина оболочки.

Следует отметить, что выражения для коэффициентов характеристического уравнения для каждой из представленных моделей имеют различия, поэтому их корни отличаются.

Коэффициенты характеристических уравнений моделей зависят от трех параметров: номера гармоники n , относительной толщины оболочки h/R и коэффициента Пуассона μ . Необходимо проанализировать значения зависимости величин корней от первых двух представленных параметров.

Цель работы — на основании сравнительного анализа корней характеристических уравнений разработать алгоритм аналитического анализа математических моделей.

Определение корней характеристических уравнений. Характеристическое уравнение (1)

математической модели механики деформирования цилиндрической оболочки представляет собой полином 8-й степени. Проанализировав свойства алгебраических уравнений с действительными коэффициентами, можно сделать следующие выводы [11]:

- 1) уравнение 8-й степени имеет восемь корней, среди которых могут быть действительные и комплексно-сопряженные;
- 2) комплексные корни образуют комплексно-сопряженные пары.

Из анализа коэффициентов характеристических уравнений следует, что для первой и нулевой гармоник коэффициент $a_0 = 0$, а для нулевой гармоники коэффициент $a_1 = 0$, что обуславливает появление четырех нулевых корней на первой гармонике и четырех нулевых корней на нулевой гармонике.

Появление нулевых корней объясняется физическим смыслом рассматриваемой задачи. Отсутствие их привело бы к противоречию. Эффект приложения к одному краю статически неуравновешенной нагрузки для оболочки затухает в некоторой зоне, примыкающей к одному краю. При этом оболочка в целом была бы не уравновешена. Нулевые корни характеристического уравнения соответствуют 12 линейно-независимым решениям. Шесть из них описывают смещения срединной поверхности как жесткого целого, остальные шесть — напряженные состояния оболочки, работающей как балка [6].

Для решения характеристических уравнений разработан алгоритм, основанный на использовании метода Лагерра [12] и реализованный на математическом языке Matlab. Метод Лагерра сходится к одному из корней алгебраического уравнения из любого начального приближения. Он позволяет найти как действительные, так и комплексные корни рассматриваемого уравнения. Для каждого начального приближения метод вычисляет только один корень полинома.

Экспериментально установлено, что по решению характеристических уравнений, корни можно представить в следующем виде:

$$\lambda_{1\pm 4} = \pm \alpha_1 \pm i\beta_1; \lambda_{5\pm 8} = \pm \alpha_2 \pm i\beta_2.$$

Определим корни характеристических уравнений исследуемых математических моделей для первых 80 гармоник при соотношении $h/R = 1/30$ и коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$. Результаты для модели В.З. Власова представлены на рис. 1. Полученные корни, изображаемые на плоскости точками, для наглядности соединены между собой линиями.

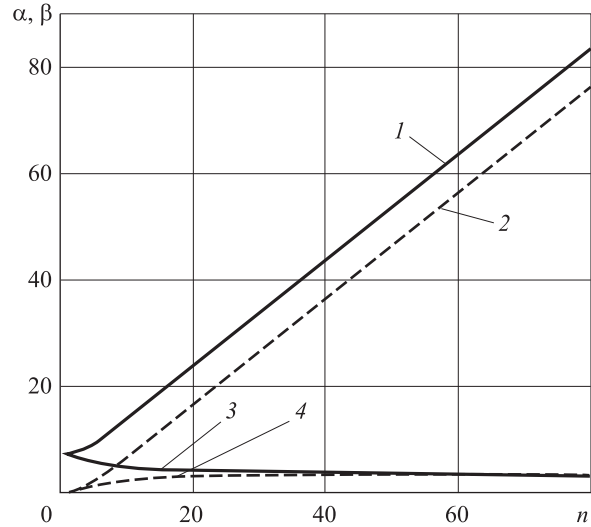


Рис. 1. Корни характеристического уравнения модели Власова

Анализируя полученные значения корней характеристических уравнений разных гармоник n , следует отметить общий характер поведения корней для различных математических моделей, а также отклонения в поведении корней для каждой из моделей. Особенно выделяются модели А.Л. Гольденвейзера и В.И. Даревского. В некоторых моделях для больших номеров гармоник n появляются действительные корни.

Анализ корней характеристических уравнений по параметру n . Относительные отклонения вычислялись для действительных частей (α_1 и α_2) и коэффициентов (β_1 и β_2) мнимых частей комплексных корней по следующим соотношениям:

$$\delta\alpha_{iM} = \frac{\alpha_{iB} - \alpha_{iM}}{\alpha_{iB}} \cdot 100\%;$$

$$\delta\beta_{iM} = \frac{\beta_{iB} - \beta_{iM}}{\beta_{iB}} \cdot 100\%, \quad i = 1, 2,$$

где α_{iB}, β_{iB} — значения элементов корней модели Власова; α_{iM}, β_{iM} — значения элементов корней сравниваемой модели.

Полученные результаты для первых 80 гармоник при соотношении $h/R = 1/30$ и коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$ представлены на рис. 2. На рисунке для гармоник $n > 70$ кривая элементов корней модели Гольденвейзера имеет «обрыв», что обусловлено появлением действительных корней. На всех приведенных кривых за исключением модели Галеркина с увеличением номера гармоники растут отклонения корней.

Как видно на рисунке, действительные части корней характеристических уравнений Даревского

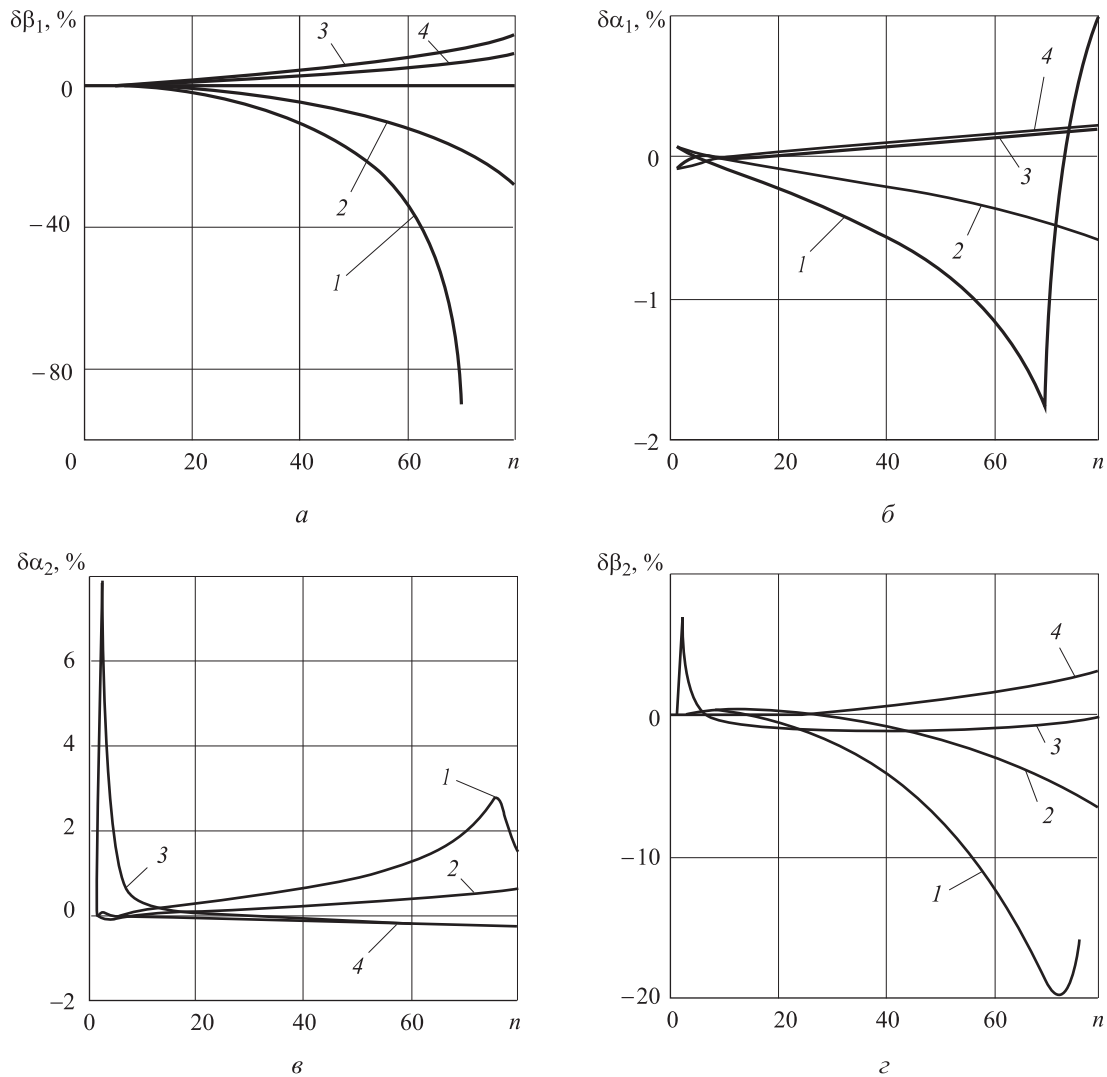


Рис. 2. Отклонения β_2 корней моделей по отношению к модели Власова:

$a - \beta_1$; $b - \alpha_1$; $v - \alpha_2$; $z - \beta_2$;

1 — модель Гольденвейзера; 2 — модель Даревского; 3 — модель Галёркина; 4 — модель Флюгге

ского и Флюгге отличаются от соответствующих уравнений Власова не более чем на 0,5%. Действительная часть корней характеристических уравнений Гольденвейзера и Галёркина имеет большие отклонения относительно соответствующих уравнений Власова. Следует отметить отклонение действительной части α_2 второго (меньшего) корня уравнения Галёркина на второй гармонике, оно достигает 8%.

Отклонения действительных частей корней характеристического уравнения модели Гольденвейзера составляют 3%.

Коэффициенты $\beta_{1,2}$ мнимой части комплексных корней характеристических уравнений рассматриваемых моделей по отношению к корням уравнения модели Власова имеют большой разброс значений по сравнению с действительными частями. В моделях Флюгге,

Гольденвейзера, Галёркина и Даревского до 30-го номера n гармоники отклонения коэффициентов $\beta_{1,2}$ корней не превышают 5...7%. Следует отметить скачок относительного отклонения коэффициента β_2 на второй гармонике $n = 2$ модели Галёркина до 8%, когда у других моделей данная величина не превышает и 1%.

Для более высоких номеров гармоник относительное отклонение коэффициента β_1 корней этих моделей, за исключением модели Гольденвейзера, возрастает до 20...30%, а для коэффициента β_2 не превышает 5%. Относительные отклонения коэффициентов мнимых частей корней уравнения модели Гольденвейзера значительно больше и достигают 80% на 70-х номерах n гармоник, где уже появляются действительные корни.

Анализ корней характеристических уравнений по параметру h/R . При относительной толщине оболочки $h/R=1/10$ для гармоник с номерами $n > 50$ у моделей Власова, Гольденвейзера и Даревского начинают появляться действительные корни. У моделей Гольденвейзера и Даревского действительные корни начинают появляться уже при $h/R=1/20$. Однако у остальных моделей такого эффекта не наблюдается.

Анализ отклонений значений корней характеристических уравнений по параметру h/R показывает, что с увеличением относительной толщины они возрастают.

Отклонения действительной части α_1 изучаемых моделей не превышают 2 %. Отклонения действительной части α_2 выше, но не выходят за границы 5 %.

Отклонения коэффициентов β_1 и β_2 мнимых частей корней для первых гармоник с увеличением толщины оболочки возрастают незначительно. Однако с повышением номера гармоники при увеличении толщины оболочки значения коэффициентов резко возрастают и достигают 40 %. Хуже всего согласуется с базовой моделью коэффициент β_1 корней всех остальных моделей. Коэффициент β_2 наиболее соответствует базовой модели (отклонения не превышают 5 %) за исключением модели Гольденвейзера, где они достигают 10 %.

С уменьшением относительной толщины оболочки корни характеристических уравнений всех математических моделей сближаются и становятся равными, например, при $h/R=1/500$.

Алгоритм устойчивого счета. После определения корней характеристического уравнения можно записать решение дифференциальных уравнений с точностью до произвольных постоянных. Классический алгоритм решения краевой задачи завершается построением системы алгебраических уравнений для заданных краевых условий и определением постоянных интегрирования. При этом возникают непреодолимые трудности: число операций при вычислениях столь велико, что решение возможно только с помощью ЭВМ, а использование ЭВМ не дает желаемого результата из-за неустойчивости счета.

Эти трудности можно преодолеть путем построения эффективного алгоритма. Решение задачи для n -й гармоники с точностью до постоянных интегрирования запишем в матричной форме:

$$\mathbf{t} = \Phi \mathbf{c},$$

где столбец \mathbf{t} формируется в виде

$$\mathbf{t} = \left\| u_n, v_n, w_n, w'_n, \bar{T}_{1n}, \bar{S}_n^*, \bar{Q}_{1n}^*, \bar{M}_{1n} \right\|^T.$$

В столбце \mathbf{t} представлены функциональные коэффициенты рядов тех силовых факторов, которые определяют жесткость и прочность оболочки и необходимы для реализации граничных условий. Данный столбец характеризует состояние сечения оболочки плоскостью, нормальной к ее оси, т. е. представляет решение в канонической форме.

Далее под силовыми факторами будем понимать функциональные коэффициенты их рядов разложения по угловой координате φ .

Столбец \mathbf{c} содержит восемь постоянных интегрирования, подлежащих определению.

Силовые факторы для сечения оболочки, входящие в столбец \mathbf{t} , масштабируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1n} &= T_{1n} \frac{R}{B}; & \bar{S}_n^* &= S_n^* \frac{R}{B(1-\mu)}; \\ \bar{Q}_{1n}^* &= Q_{1n}^* \frac{R^3}{D}; & \bar{M}_{1n} &= M_{1n} \frac{R^2}{D}, \end{aligned}$$

где R — радиус срединной поверхности оболочки; B — мембранная жесткость; D — изгибная жесткость оболочки.

Для построения алгоритма устойчивого счета необходимо фундаментальную систему Φ экспоненциальных функций решения системы ОДУ для функциональных коэффициентов рядов искомых величин преобразовать в систему функций Коши–Крылова K , которые удовлетворяют произвольным начальным условиям, по формуле [13]

$$K = \Phi \Phi_0^{-1}.$$

Здесь Φ_0^{-1} — матрица, обратная к матрице функций Φ при $\xi = 0$.

Преобразование фундаментальной системы экспоненциальных функций в систему функций Коши–Крылова достигается путем исключения столбца \mathbf{c} с произвольными константами следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{t} = \Phi \mathbf{c}, \\ \mathbf{t}_0 = \Phi_0 \mathbf{c} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{c} = \Phi_0^{-1} \mathbf{t}_0,$$

где \mathbf{t}_0 — значение геометрических и силовых факторов в столбце \mathbf{t} при $\xi = 0$.

Далее основной интервал $[\xi_0, \xi_n]$, равный длине оболочки, делится промежуточными

точками $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ на интервалы $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Для каждого интервала определяются функции Коши–Крылова или их значения с помощью ЭВМ. Тогда, для любого i -го интервала можно получить зависимость для столбца \mathbf{t} в начале \mathbf{t}_{i_n} и конце \mathbf{t}_{i_k} интервала:

$$\mathbf{t}_{i_k} = K_i \mathbf{t}_{i_n},$$

где $K_i = \Phi_{i_k} \Phi_{i_n}^{-1}$ — матрица значений функций Коши–Крылова на i -м интервале.

Если интервалы выбрать равными, то

$$K_i = K = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, для каждого интервала справедлива следующая зависимость:

$$\mathbf{t}_k = K \mathbf{t}_n.$$

Для того чтобы решить краевую задачу для основного интервала необходимо выполнить сопряжение интервалов, на которые он делится. С этой целью столбец \mathbf{t} , характеризующий состояние сечения оболочки, делим на геометрический $\mathbf{p} = \|u_n, v_n, w_n, w'_n\|^T$ и силовой $\mathbf{q} = \|T_{1n}, \bar{S}_n^*, \bar{Q}_{1n}^*, \bar{M}_{1n}\|^T$, а матрицу K значений функций Коши–Крылова — на соответствующие блоки:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}.$$

В этом случае матричное соотношение для каждого интервала переписывается в виде системы матричных уравнений:

$$\mathbf{p}_k = K_{11} \mathbf{p}_n + K_{12} \mathbf{q}_n;$$

$$\mathbf{q}_k = K_{21} \mathbf{p}_n + K_{22} \mathbf{q}_n.$$

Полученная система матричных уравнений преобразовывается к матричным зависимостям столбцов \mathbf{q}_n и \mathbf{q}_k силовых параметров через столбцы \mathbf{p}_n и \mathbf{p}_k геометрических параметров:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n &= G_1 \mathbf{p}_n + G_2 \mathbf{p}_k; \\ \mathbf{q}_k &= G_3 \mathbf{p}_n + G_4 \mathbf{p}_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где матрицы

$$G_1 = -K_{12}^{-1} K_{11}, \quad G_2 = K_{12}^{-1},$$

$$G_3 = K_{21} - K_{22} K_{12}^{-1} K_{11}, \quad G_4 = K_{22} K_{12}^{-1}.$$

В совокупности матрицы $G_1 - G_4$ характеризуют жесткость интервала оболочки, так как они связывают силовые параметры с геометрическими.

Сопряжение интервалов осуществляется по геометрическим параметрам

$$\mathbf{p}_{1n} = \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{ik} = \mathbf{p}_{i+1n} = \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_{nk} = \mathbf{p}_n$$

и по силовым параметрам

$$\mathbf{q}_{1n} = -\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{q}_{ik} - \mathbf{q}_{i+1n} = \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{q}_{nk} = -\mathbf{r}_n.$$

Здесь \mathbf{r} — столбец с погонной внешней силовой нагрузкой; индекс « i » обозначает номер интервала, а « n » и « k » — его начало и конец соответственно; n — число интервалов.

Столбец \mathbf{r} имеет следующие элементы:

$$\mathbf{r} = \left\| \bar{T}_{1\text{вн}n}, \bar{S}_{\text{вн}n}^*, \bar{Q}_{1\text{вн}n}^*, \bar{M}_{1\text{вн}n} \right\|^T.$$

Здесь индекс «вн» обозначает скачок во внутренних силовых факторах, обусловленный внешним воздействием.

Следует отметить, что оболочку необходимо делить на интервалы таким образом, чтобы сечения, в которых действует внешняя силовая нагрузка, находились на стыке интервалов.

После преобразований получаем систему матричных алгебраических уравнений:

$$-G_{1,1} \mathbf{p}_0 - G_{2,1} \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_0,$$

$$G_{3,1} \mathbf{p}_0 + (G_{4,1} - G_{1,2}) \mathbf{p}_1 - G_{2,2} \mathbf{p}_2 = \mathbf{r}_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$G_{3,i} \mathbf{p}_{i-1} + (G_{4,i} - G_{1,i+1}) \mathbf{p}_i - G_{2,i+1} \mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{r}_i,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$G_{3,n-1} \mathbf{p}_{n-2} + (G_{4,n-1} - G_{1,n}) \mathbf{p}_{n-1} - G_{2,n} \mathbf{p}_n = \mathbf{r}_{n-1},$$

$$-G_{3,n} \mathbf{p}_{n-1} - G_{4,n} \mathbf{p}_n = \mathbf{r}_n.$$

Здесь второй индекс у матриц G_i обозначает номер интервала, для которого вычисляется матрица G_i .

Каждое матричное уравнение приведенной выше системы записано для соответствующего сечения, включая и краевые, которые здесь представляют столбцы \mathbf{p}_0 и \mathbf{p}_n . Очевидно также, что число уравнений соответствует числу искомых столбцов \mathbf{p}_i .

Отличительным признаком построенного алгоритма решения краевой задачи является то, что система алгебраических уравнений получена для определения искомых величин, а не иных параметров или констант, через которые они определяются. Система алгебраических уравнений построена без использования краевых условий задачи. Краевые условия задачи учитываются при решении системы алгебраических уравнений.

Если один край оболочки при $\xi = 0$ зашпатель, то можно записать $\mathbf{p}_0 = 0$. Следовательно, соответствующее, т. е. первое, уравнение рассматриваемой системы отбрасывается как лишнее.

Аналогично учитываются и другие краевые условия при решении системы алгебраических

уравнений. В результате решения этой системы алгебраических уравнений определяются столбцы \mathbf{p}_i геометрических параметров для сечений оболочки. Столбцы силовых параметров \mathbf{q}_i для сечений оболочки определяются с помощью алгебраических зависимостей (2). Таким образом, алгоритм в конечном итоге позволяет определить напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки.

Вычислительный эксперимент. Рассмотрим цилиндрическую оболочку, защемленную по краям. В сечении, равноудаленном от краев, оболочка нагружена поперечной силой P . Расчетная схема оболочки представлена на рис. 3.

Оболочка имеет следующие физические и геометрические параметры: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, $h/R = 1/100$, $l/R = 5$.

Нагрузка выбирается «плохой», т. е. локальной, распределенной по площадке поверхности оболочки. В расчетной схеме она идеализируется. Если площадка мала, то нагрузка идеализируется силой. В нашем исследовании такая идеализация неприемлема, так как решения для внутренних силовых факторов в точке приложения силы имеют особенности, ряды Фурье не сходятся. Если нагрузка идеализируется распределенной по линии, например, окружной координаты, то ряды Фурье решений для внутренних силовых факторов сходятся. В нашей расчетной схеме принимаем, что нагрузка равномерно распределена по дуге 20° .

За основу для расчета была взята математическая модель В. Флюгге [9]. ОДУ этой модели в перемещениях имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} - \frac{1-\nu}{2} n^2 u_n + \frac{1+\nu}{2} n \frac{dv_n}{d\xi} + \nu \frac{dw_n}{d\xi} - \\ & - c^2 \left(\frac{1-\nu}{2} n^2 u_n + \frac{d^3 w_n}{d\xi^3} + \frac{1-\nu}{2} n^2 \frac{dw_n}{d\xi} \right) = 0; \\ & - \frac{1+\nu}{2} n \frac{du_n}{d\xi} - n^2 v_n + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 v_n}{d\xi^2} - n w_n + \\ & + c^2 \left[\frac{3}{2} (1-\nu) \frac{d^2 v_n}{d\xi^2} + \frac{3-\nu}{2} n \frac{d^2 w_n}{d\xi^2} \right] = 0; \quad (3) \\ & \nu \frac{du_n}{d\xi} + n v_n + w_n + c^2 \left(- \frac{1-\nu}{2} n^2 \frac{dv_n}{d\xi} - \right. \\ & - \frac{d^3 u_n}{d\xi^3} - \frac{3-\nu}{2} n \frac{d^2 v_n}{d\xi^2} + \frac{d^4 w_n}{d\xi^4} - \\ & \left. - 2n^2 \frac{d^2 w_n}{d\xi^2} + n^4 w_n - 2n^2 w_n + w_n \right) = 0 \end{aligned}$$

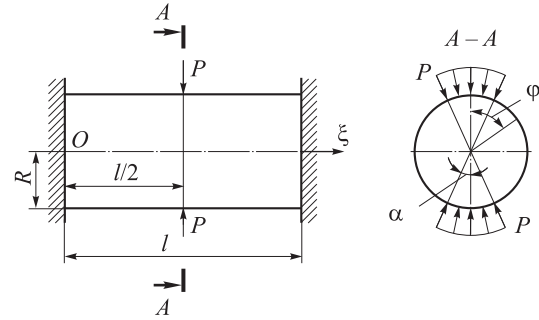


Рис. 3. Расчетная схема оболочки

($c^2 = D/(BR^2) = h^2/(12R^2)$ — малый параметр), а физические соотношения описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} T_{1n} &= \frac{B}{R} \left[\frac{du_n}{d\xi} + \nu (w_n + n v_n) \right] - \frac{D}{R^3} \frac{d^2 w_n}{d\xi^2}; \\ T_{2n} &= \frac{B}{R} \left(n v_n + w_n + \nu \frac{du_n}{d\xi} \right) + \frac{D}{R^3} (1-n^2) w_n; \\ S_{12n} &= \frac{B}{R} \frac{1-\nu}{2} \left(-n u_n + \frac{dv_n}{d\xi} \right) + \frac{D}{R^3} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{dv_n}{d\xi} + n \frac{dw_n}{d\xi} \right); \\ S_{21n} &= \frac{B}{R} \frac{1-\nu}{2} \left(-n u_n + \frac{dv_n}{d\xi} \right) - \frac{D}{R^3} \frac{1-\nu}{2} \left(u_n + \frac{dw_n}{d\xi} \right) n; \\ M_{1n} &= \frac{D}{R^2} \left(\frac{d^2 w_n}{d\xi^2} - \nu n^2 w_n - \frac{du_n}{d\xi} - \nu n v_n \right); \quad (4) \\ M_{2n} &= \frac{D}{R^2} \left[(1-n^2) w_n + \nu \frac{d^2 w_n}{d\xi^2} \right]; \\ M_{12n} &= \frac{D(1-\nu)}{R^2} \left(-n \frac{dw_n}{d\xi} - \frac{dv_n}{d\xi} \right); \\ M_{21n} &= \frac{D(1-\nu)}{R^2} \left(-n \frac{dw_n}{d\xi} - \frac{n}{2} u_n - \frac{1}{2} \frac{dv_n}{d\xi} \right). \end{aligned}$$

Необходимые для записи граничных условий обобщенные в смысле Кирхгофа перерезывающие Q_1^* и сдвигающие S^* усилия в оболочке описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} Q_{1n}^* &= \frac{D}{R^3} \left[(1+c^2) \frac{1-\nu}{2} n^2 u_n + \left(2 - \frac{1+\nu}{2} \right) n \frac{dv_n}{d\xi} - \right. \\ & \left. - \nu \frac{dw_n}{d\xi} + \frac{1-\nu}{2} c^2 n \frac{dw_n}{d\xi} + (2-\nu) n^2 \frac{dw_n}{d\xi} + (c^2 - 1) \frac{d^3 w_n}{d\xi^3} \right]; \\ S^* &= \frac{B}{R} \frac{1-\nu}{2} \left[-n u_n + (1+3c^2) \frac{dv_n}{d\xi} - 3nc^2 \frac{dw_n}{d\xi} \right]. \end{aligned}$$

Классическое аналитическое решение уравнений (3) получено в виде

$$\begin{aligned}
 u_n &= A_1(d_1F_1 - e_1F_2) - B_1(e_1F_1 + d_1F_2) - \\
 &- C_1(d_1F_3e_1F_4) - D_1(e_1F_3 - d_1F_4) + \dots; \\
 v_n &= A_1(f_1F_1 - g_1F_2) - B_1(g_1F_1 + f_1F_2) + \\
 &+ C_1(f_1F_3 + g_1F_4) + D_1(g_1F_3 - f_1F_4) + \dots; \\
 w_n &= A_1F_1 - B_1F_2 + C_1F_3 - D_1F_4 + \dots
 \end{aligned}$$

Здесь с целью сокращения записи ограничили первой половиной правых частей на том основании, что вторая отличается только индексами;

$$F_1 = e^{\alpha_1 \xi} \cos \beta_1 \xi; \quad F_2 = e^{\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi;$$

$$F_3 = e^{-\alpha_1 \xi} \cos \beta_1 \xi; \quad F_4 = e^{-\alpha_1 \xi} \sin \beta_1 \xi,$$

а для отброшенной половины

$$F_5 = e^{\alpha_2 \xi} \cos \beta_2 \xi; \quad F_6 = e^{\alpha_2 \xi} \sin \beta_2 \xi;$$

$$F_7 = e^{-\alpha_2 \xi} \cos \beta_2 \xi; \quad F_8 = e^{-\alpha_2 \xi} \sin \beta_2 \xi.$$

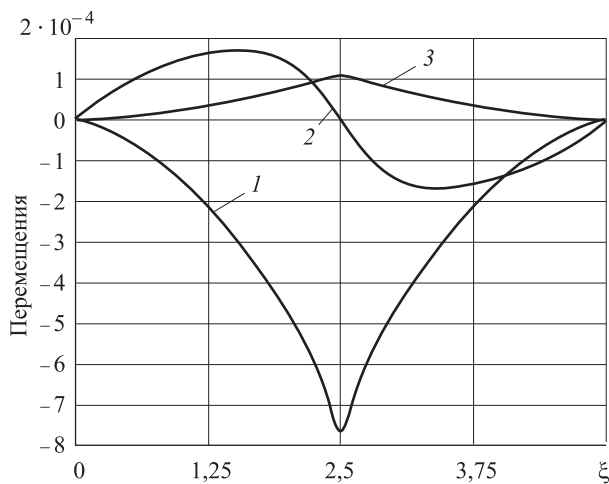


Рис. 4. Перемещения точек на срединной поверхности вдоль образующей $\varphi = 0$:
1 — \bar{w} ; 2 — \bar{u} ; 3 — \bar{v}

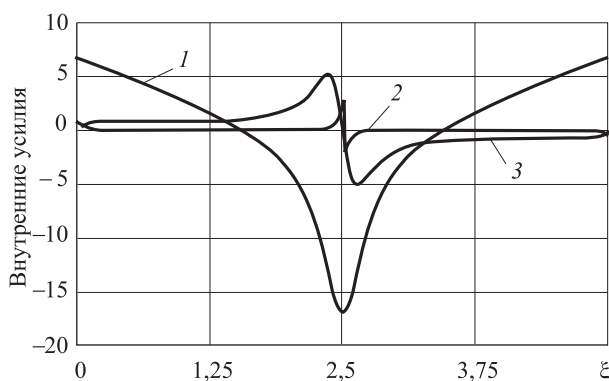


Рис. 5. Внутренние силовые факторы вдоль образующей $\varphi = 0$:
1 — \bar{T}_1 ; 2 — \bar{Q}_1^* ; 3 — \bar{S}^*

Угол поворота нормали к поверхности оболочки в плоскости осевого сечения определяется по формуле

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} [A_1(\alpha_1 F_1 - \beta_1 F_2) - B_1(\alpha_1 F_2 - \beta_1 F_1) - C_1(\alpha_1 F_3 + \beta_1 F_4) - D_1(\beta_1 F_3 - \alpha_1 F_4) + \dots] \cos n\varphi.$$

Решения для внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях оболочки, определяются с помощью физических соотношений (4).

Далее, используя предложенный алгоритм устойчивого счета, получено решение краевой задачи с контролируемой погрешностью (рис. 4). Результаты представлены на рис. 4–6.

Угловая координата цилиндрической оболочки отсчитывается от вертикали, как показано на рис. 3.

Перемещения и внутренние силовые факторы, возникающие в оболочке, в безразмерном виде показаны на рис. 5, 6:

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{w}{R}; \quad \bar{v} = \frac{v}{R}; \quad \bar{u} = \frac{u}{R}; \quad \bar{T}_1 = T_1 \frac{\pi R}{2P}; \\
 \bar{Q}_1^* &= Q_1^* \frac{\pi R}{2P}; \quad \bar{S}^* = S^* \frac{\pi R}{2P}; \quad M_1 = M_1 \frac{\pi}{2P}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчета перемещений точек на срединной поверхности оболочки в зависимости от продольной координаты представлены на рис. 4. Перемещения \bar{w} и \bar{u} точек приведены для $\varphi = 0^\circ$, а перемещения \bar{v} точек — для $\varphi = 10^\circ$.

Результаты расчета изменения внутренних силовых факторов вдоль образующей оболочки представлены на рис. 5. Силовые факторы \bar{T}_1 и \bar{Q}_1^* приведены для $\varphi = 0^\circ$, а касательное усилие \bar{S}^* — для $\varphi = 10^\circ$.

Результат расчета продольного изгибающего момента \bar{M}_1 по длине оболочки для $\varphi = 0^\circ$ представлен на рис. 6.

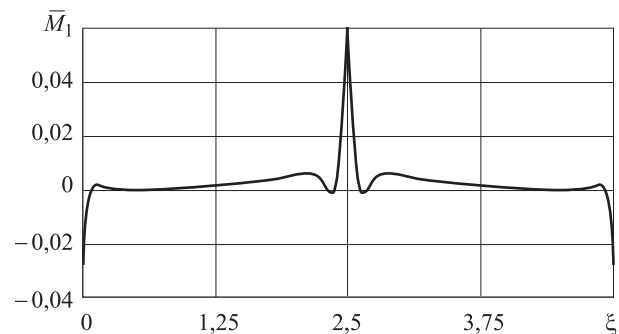


Рис. 6. Продольный изгибающий момент вдоль образующей $\varphi = 0$

Выводы

1. Исследование показало, что корни характеристических уравнений известных математических моделей механики деформирования цилиндрической оболочки ка-

чественно и количественно отличаются.

2. Разработан алгоритм аналитического решения для анализа математических моделей механики деформирования цилиндрической оболочки.

Литература

- [1] Матвеевко А.М., Нерубайло Б.В. *Вопросы прочности, устойчивости и надежности конструкций*. Москва, изд-во МАИ, 2013. 158 с.
- [2] Власов В.З. *Общая теория оболочек и ее приложение в технике*. Москва, Ленинград, Гостехиздат, 1949. 784 с.
- [3] Власов В.З. *Избранные труды*. Москва, изд-во АН СССР, 1962, т. 1. 528 с.
- [4] Власов В.З. *Избранные труды*. Т. 3. *Тонкостенные пространственные системы*. Москва, ОНИКС, 2013. 488 с.
- [5] Погорелов В.И. *Строительная механика тонкостенных конструкций*. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2007. 528 с.
- [6] Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. Москва, Наука, 1976. 512 с.
- [7] Даревский В.М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках. В сб. *Прочность и динамика авиационных двигателей*. Москва, Машиностроение, 1964, вып. 1, с. 23–83.
- [8] Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. Санкт-Петербург, изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 380 с.
- [9] Флюгге В. *Статика и динамика оболочек*. Москва, Госстройиздат, 1961. 306 с.
- [10] Бояршинов С.В. *Основы строительной механики машин*. Москва, ОНИКС, 2012. 456 с.
- [11] Корн Г.А., Корн Т.М. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Санкт-Петербург, Лань, 2003. 823 с.
- [12] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery P.B. *Numerical recipes. The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007. 1262 p.
- [13] Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. Функции Коши–Крылова и алгоритмы решения краевых задач теории оболочек. *ДАН РФ*, 2000, т. 375, № 3, с. 331–333.

References

- [1] Matveenko A.M., Nerubailo B.V. *Voprosy prochnosti, ustoichivosti i nadezhnosti konstruksii* [Questions of strength, stability and reliability of structures]. Moscow, Moscow Aviation Institute publ., 2013. 158 p.
- [2] Vlasov V.Z. *Obshchaia teoriia obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* [The general theory of shells and its application in engineering]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat publ., 1949. 784 p.
- [3] Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, AN SSSR publ., vol. 1, 1962. 528 p.
- [4] Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. Tom 3. Tonkostennye prostranstvennyye sistemy* [Selected Works. Vol. 3. Thin-walled spatial system]. Moscow, ONIKS publ., 2013. 488 p.
- [5] Pogorelov V.I. *Stroitel'naia mekhanika tonkostennykh konstruksii* [Structural mechanics of thin-walled structures]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg publ., 2007. 528 p.
- [6] Gol'denveizer A.L. *Teoriia uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of thin elastic shells]. Moscow, Nauka publ., 1976. 512 p.
- [7] Darevskii V.M. *Opredelenie peremeshchenii i napriazhenii v tsilindricheskoi obolochke pri lokal'nykh nagruzkakh* [Determination of displacements and stresses in a cylindrical shell under local loads]. *Sbornik Prochnost' i dinamika aviatsionnykh dvigatelei* [Collection of strength and dynamics of aircraft engines]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1964, issue 1, pp. 23–83.
- [8] Novozhilov V.V. *Teoriia tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. St. Petersburg, Saint Petersburg State University publ., 2010. 380 p.

- [9] Flugge V. *Statika i dinamika obolochek* [Statics and dynamics of shells]. Moscow, Gostroiizdat publ., 1961. 306 p.
- [10] Boiarshinov S.V. *Osnovy stroitel'noi mekhaniki mashin* [Fundamentals of structural mechanics of machines]. Moscow, ONIKS publ., 2012. 456 p.
- [11] Korn G.A., Korn T.M. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]. St. Petersburg, Lan' publ., 2003. 823 p.
- [12] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery P.B. *Numerical recipes. The art of scientific computing*, Cambridge university press, 2007. 1262 p.
- [13] Vinogradov A.Iu., Vinogradov Iu.I. Funktsii Koshi-Krylova i algoritmy resheniia kraevykh zadach teorii obolochek [The Cauchy-Krylov algorithms for solving boundary value problems of the theory of shells]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences]. 2000, vol. 375, no. 3, pp. 331–333.

Статья поступила в редакцию 02.06.2014

Информация об авторах

АФЛИТОНОВ Дмитрий Владимирович (Москва) — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: aflitonovdv@gmail.com).

ВИНОГРАДОВ Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).

Information about the authors

AFLITONOV Dmitriy Vladimirovich (Moscow) — Post-Graduate of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: aflitonovdv@gmail.com).

VINOGRADOV Yuriy Ivanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Professor of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет 2-е издание учебного пособия
А.А. Дорофеева

«Основы теории тепловых ракетных двигателей. Теория, расчет и проектирование»

Содержание учебника, состоящего из трех частей, соответствует курсу лекций, которые автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана. В ч. I представлены общие основы и понятийный аппарат теории идеальных тепловых ракетных двигателей, а также их классификация. В ч. II изложены физико-химические механизмы реальных рабочих процессов, протекающих в тепловых ракетных двигателях, и методики количественной оценки их влияния на выходные параметры двигателя при отличии этих процессов от идеальных. Приведены методики решения задач термодинамического расчета состава продуктов сгорания и изменения их параметров при движении по соплу как химически активного потока. В ч. III представлены методические указания и полный комплект контрольно-измерительных материалов по блочно-модульным образовательным технологиям.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru