

УДК 539.3

Применение метода конечного элемента для оценки нижней границы предела приспособляемости конструкций при одновременном воздействии механических и тепловых нагрузок

Я.В. Кураева, Я.М. Клебанов

Рассмотрен численный метод оценки нижней границы предела приспособляемости конструкций, основанный на использовании теоремы Мелана. Применение метода демонстрируется на примере толстостенного сферического сосуда, подвергающегося повторным воздействиям внутреннего давления и неоднородного по радиусу температурного поля. Предлагаемый метод позволяет получать достаточно точную оценку нижней границы приспособляемости.

Ключевые слова: метод конечных элементов, теорема Мелана, предел приспособляемости.

Application of the finite element method to evaluate the lower bound shakedown limit for structures subjected to combined mechanical and thermal loading

Ya.V. Kuraeva, Ya.M. Klebanov

The article considers a numerical method for estimation of structures shakedown lower limit based on Melan' theorem. The method is demonstrated on a simple task: a thick-walled spherical vessel subjected to repeated internal pressure and inhomogeneous temperature field. The proposed method permits to give an appropriate estimation of the shakedown lower limit.

Keywords: finite element method, Melan' theorem, shakedown limit.

Большинство инженерных конструкций в процессе эксплуатации испытывают циклические воздействия от механических нагрузок и тепловых потоков. Исследования задач приспособляемости упругопластических конструкций, подвергающихся воздействию циклических нагрузок, первоначально были направлены на получение аналитических решений в основном для стержневых, балочных, осесимметричных и оболочечных конструкций с простыми граничными условиями [1–4]. Ограниченные возможности аналитических вычислений обусловили разработку альтернативных методов, в которых



КУРАЕВА
Яна Владимировна
ассистент
(Самарский государственный
технический университет)

KURAEVA
Yana Vladimirovna
Assistant
(Samara State Technical
University)



КЛЕБАНОВ
Яков Мордухович
доктор технических наук,
профессор
(Самарский государственный
технический университет)

KLEBANOV
Yakov Mordukhovich
Dr. Sc. Techn., Professor
(Samara State Technical
University)

для получения точной оценки верхних и нижних границ нагрузок приспособляемости конструкций используется анализ метода конечных элементов (МКЭ).

Для реализации краевых задач приспособляемости за последнее время создан ряд эффективных численных методов. Разработаны подходы к решению задач приспособляемости, основанные на МКЭ, теории математической оптимизации, методах анализа несущей способности конструкций. К их числу относится метод математического программирования [5—7], метод упругих компенсаций [8, 9], линейный метод согласования [10—14]. Разработаны, в частности, линейный метод согласования на основе кинематической теоремы Коитера. Он используется для получения оценки верхней границы приспособляемости в условиях сложных циклических термомеханических внешних воздействий. В работе [15] линейным методом согласования с помощью конечно-элементной программы ABAQUS определялись границы приспособляемости. Нелинейный анализ с использованием МКЭ рассматривался в работе [16] для решения двухмерной задачи определения верхней границы приспособляемости при пропорционально изменяющейся циклической нагрузке.

Достаточно эффективным представляется метод, основанный на проведении повторного упругого анализа [17], предназначенный для расчета нижней границы приспособляемости на основе теоремы Мелана. Этот метод, называемый методом упругих компенсаций, использовался для двухмерного и трехмерного анализа конструкций при пропорциональном нагружении. В соответствии с методом упругой компенсации выполняется решение последовательности линейноупругих задач с неоднородным изменением модулей упругости. На каждом этапе граница предельной циклической нагрузки определяется путем масштабирования решения таким образом, чтобы напряжения располагались внутри поверхности текучести [18]. В работе [19] метод упругих компенсаций распространен на задачи минимизации верхней оценки границы приспособляемости

в соответствии с теоремой Коитера; при этом определяются границы циклических нагрузок, соответствующие наступлению знакопеременной пластичности. Впоследствии развивался так называемый быстрый итерационный метод, основанный на совместном использовании метода упругих компенсаций, методов оптимизации и МКЭ [20—22].

Определенное распространение получил относительно простой метод суперпозиции полей напряжений при упругом и пластическом решении в условиях пропорционального нагружения, основанный на теореме Мелана [23]. На его основе был предложен метод оценки нагрузки нижней границы области приспособляемости с использованием нелинейного анализа МКЭ и упругопластических свойств материала конструкции [24]. Метод суперпозиции использовался только для относительно простых конструкций с пропорциональным и непропорциональным силовыми нагружениями [24, 25].

В данной статье метод упругой компенсации распространяется на совместное циклическое воздействие сил и неоднородных температурных полей.

Реализация предлагаемого метода. Большой прикладной интерес представляет проблема приспособляемости при совместном циклическом воздействии механических сил и неоднородного температурного поля [26, 27].

В методе упругой компенсации используется условие текучести Мизеса, на основе которого определяется нижняя граница нагрузки приспособляемости. При наложении полей упругих и остаточных напряжений должно выполняться условие

$$|\sigma_{kl}^r + \sigma_{kl}^e|_{\max} \leq \sigma_y, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где σ_y — предел текучести материала. Левая часть выражения представляет собой эквивалентное напряжение по Мизесу, максимальное по всей конструкции. Оно получается в результате суперпозиции двух полей напряжений: упругих напряжений σ_{kl}^e , соответствующих приложенным механическим и тепловым нагрузкам; самоуравновешенных остаточных напряжений σ_{kl}^r . Напряженное состояние, при ко-



Рис. 1. Схема определения нагрузок нижней границы приспособляемости с помощью МКЭ

тором напряжения не выходят за пределы поверхности текучести при любых изменениях нагрузок, принято называть безопасным.

Очевидно, что при наступлении приспособляемости должно также выполняться условие

$$|\sigma_{kl}^r|_{\max} \leq \sigma_y. \quad (2)$$

Рассмотрим идеальный упругопластический материал, поверхность текучести которого в процессе деформирования сохраняется неиз-

менной. Схема вычисления нагрузок границы упругой приспособляемости представлена на рис. 1. Согласно предлагаемому методу решаются чисто упругие и упругопластические задачи под действием приложенных термомеханических нагрузок. Номер расчета на схеме обозначается верхним индексом «i». Наибольшие значения тепловых и механических нагрузок, обозначаемые на схеме индексом «n», соответствуют достижению кратковременной предельной несущей способности.

При решении упругопластических задач в наиболее нагруженных точках интенсивность напряжений равна пределу текучести $|\sigma_{kl}^s|_{\max} = \sigma_y$. Поэтому достаточно выполнять проверку условия (2). В общем случае необязательно рассматривать все шаги нагрузки до кратковременной предельной несущей способности. Можно ступенчато увеличивать нагрузки до получения оценки нижней границы приспособляемости. Когда нарушается условие безопасности напряженного состояния, решения для двух последних циклов интерполируются на основе метода деления отрезка пополам до достижения заданной точности.

Таким образом, в ходе расчетов определяется безопасное поле остаточных напряжений, соответствующее наибольшей нагрузке, при которой значение интенсивности остаточных напряжений не превышает предела текучести материала, называемое нижней оценкой границы приспособляемости. Разработанный алгоритм реализован в виде программного макроса программы ANSYS.

Определение границ нагрузок приспособляемости сферического сосуда. Рассмотрим в качестве примера приспособляемость толстостенного сферического сосуда, подвергающегося повторным воздействиям внутреннего давления и неоднородного по радиусу температурного поля. Для проверки созданного программного макроса рассматриваем задачу как трехмерную.

Условия симметрии позволяют моделировать, например, 1/8 часть как это показано на рис. 2, задав в сечениях плоскостями декартовой системы координат условия симметрии.

К внутренней поверхности сферы циклически прикладывается равномерно распределенное давление, а неравномерно по толщине стенки — поле температур. В каждом цикле происходит изменение поля температуры от нулевого до заданного значения [26]:

$$t(\rho) = t_b + t_1 \frac{k(1-\rho)}{\rho(1-k)}; \quad (3)$$

$$t_1 = t_a - t_b; \quad (4)$$

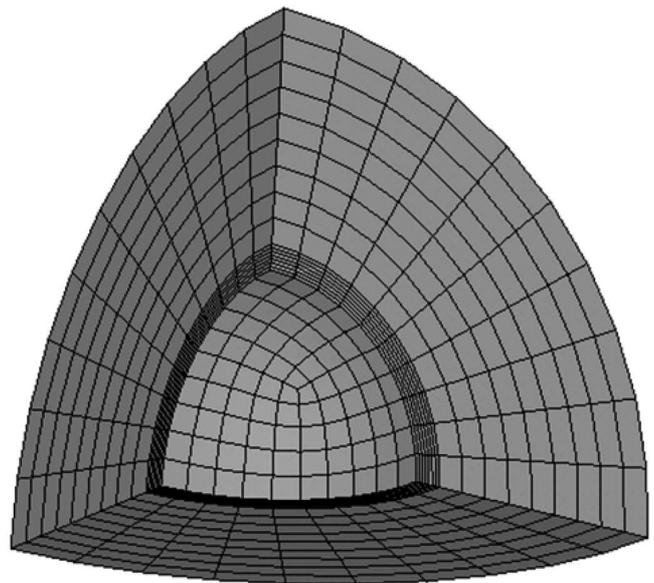


Рис. 2. Конечно-элементная модель 1/8 части сферического сосуда

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad k = \frac{a}{b}, \quad (5)$$

где t — температура; a, b, r — соответственно внутренний, наружный и текущий радиусы сферы. Радиусы представлены в виде безразмерных величин (5). Индексами отмечены значения температуры на соответствующих радиусах. Для упрощения принимаем, что предел текучести не зависит от температуры. Внешние воздействия характеризуются параметрами давления p и теплосмен q :

$$p = \frac{p_a}{\sigma_y} \frac{k^3}{1-k^3}, \quad 0 \leq p \leq p^*; \quad (6)$$

$$q = \frac{\alpha E t_1 k}{3\sigma_y(1-\mu)(1-k)}, \quad 0 \leq q \leq q^*. \quad (7)$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; σ_y — напряжение текучести; α — коэффициент теплового линейного расширения; p_a — значение давления на внутренней поверхности сферы. Верхним индексом «*» отмечены значения, соответствующие достижению предельной несущей способности.

Введем следующие параметры [26]:

$$p_0 = \frac{2k^3 \ln k}{k^3 - 1}; \quad (8)$$

$$q_0 = \frac{4k^3}{3(\delta - k^3)}, \quad (9)$$

где безразмерное число δ определяется зависимостью

$$\delta = \frac{3k^2}{1+k+k^2}. \quad (10)$$

Для решения упругопластической задачи используется пошаговый алгоритм с процедурой итерационного уточнения каждого подшага нагружения. При численной реализации МКЭ на узлы конечно-элементной модели накладывается ряд граничных условий, определяющих возможность их перемещения согласно условиям симметрии.

В примере приняты следующие значения: $a = 0,06$ м, $b = 0,15$ м, $t_b = 0$ °С, $\sigma_y = 50$ МПа, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$, $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6}$ °С.

Полученные численные результаты для сферического сосуда иллюстрируют диаграммы, представленные на рис. 3, на которых показано несколько характерных областей нагружения: области чисто упругого нагружения, приспособляемости и область, где приспособляемость отсутствует.

Граница приспособляемости получена двумя способами: с помощью разработанного метода и с использованием пошагового анализа циклического нагружения. В последнем из них выполнялись расчеты для различных соотношений параметров q/p и уровня нагружений. Количество циклов нагружения во всех расчетах не превышало 150. Пределом приспособляемости считались нагрузки, при которых после 100—150 циклов накопление пластической деформации прекращалось. Пересечения границы приспособляемости на рис. 3 с осью ординат q/q_0 соответствует нагружению переменным полем температур для $t_1 = 39$ °С, а с осью абсцисс p/p_0 — нагружению давлением $p_a = 64$ МПа. Величины нагрузок в этих точках совпадают с полученными точными аналитическими результатами [26, 27].

На диаграмме кривые 2, 3 оказываются весьма близкими, наибольшее расхождение соответствует 8%.

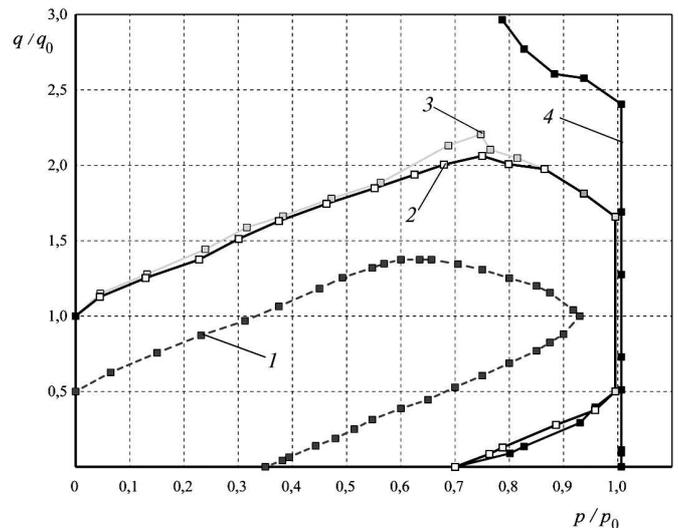


Рис. 3. Диаграмма предельных нагрузок полой сферы:

- 1 — граница области упругого деформирования;
- 2 — нижняя оценка границы приспособляемости по предложенному методу;
- 3 — результаты пошагового расчета границы приспособляемости;
- 4 — кратковременная несущая способность

Разработанный алгоритм также использовался для решения задачи приспособляемости полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления и неоднородного температурного поля. Рассматривались отдельные характерные сочетания величин температурных и силовых воздействий. В этой задаче также получено совпадение с существующими точными аналитическими результатами [26, 27].

Таким образом, предложенный метод анализа приспособляемости позволяет достаточно просто и надежно определять нижнюю границу нагрузки приспособляемости, используя конечно-элементные программы без привлечения трудоемкого пошагового циклического упругопластического решения. В данной статье использовалась конечно-элементная программа ANSYS, а процедура была автоматизирована путем написания программного макроса. Область применения метода — задачи с одновременным изменением температурного поля и одной силы или нескольких пропорционально изменяющихся сил. Реализация задач приспособляемости для двух простых конструкций подтвердила достаточную точность решения.

Литература

1. Bree J. Elastic plastic behavior of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements // *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1967. Vol. 2, 3. P. 226—238.
2. Chinh P.D. Shakedown theory for elastic-perfectly plastic bodies revisited // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003. Vol. 45. P. 1011—1027.
3. Mahbadi H., Eslami M.R. Cyclic loading of beams based on the Prager and Frederick—Armstrong kinematic hardening models // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002. Vol. 44. P. 859—879.
4. Leckie F.A., Penny R.K. Shakedown pressure for radial nozzles in spherical pressure vessels // *International Journal of Solids and Structures*. 1967. Vol. 3. P. 743—755.
5. Liu Y.H., Carvelli V., Maier G. Integrity assessment of defective pressurized pipelines by direct simplified methods // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1997. Vol. 74. P. 49—57.
6. Vu D.K., Yan A.M., Nguyen-Dang H. A primal—dual algorithm for shakedown analysis of structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004. Vol. 193. P. 4663—4674.
7. Staat M., Heitzer M. LISA a European Project for FEM-based Limit and Shakedown Analysis // *Nuclear Engineering and Design*. 2001. Vol. 206. P. 151—166.
8. Mackenzie D., Boyle J.T., Hamilton R. Elastic compensation method in shell-based design by analysis // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1996. Vol. 338. P. 203—208.
9. Mackenzie D., Boyle J.T., Hamilton R. The elastic compensation method for limit and shakedown analysis: a review // *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2000. Vol. 3. P. 171—188.
10. Chen H.F., Ponter A.R.S. Shakedown and limit analyses for 3-D structures using the Linear Matching Method // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2001. Vol. 78. P. 443—451.
11. Chen H.F., Ponter A.R.S. Method for the Evaluation of a Ratchet Limit and the Amplitude of Plastic Strain for Bodies Subjected to Cyclic Loading // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2001. Vol. 20. P. 555—571.
12. Chen H.F., Ponter A.R.S., Ainsworth R.A. The Linear Matching Method applied to the High Temperature Life Integrity of Structures, Part 1: Assessments involving Constant Residual Stress Fields // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2006. Vol. 83. P. 123—135.
13. Chen H.F., Ponter A.R.S., Ainsworth R.A. The Linear Matching Method applied to the High Temperature Life Integrity of Structures, Part 2: Assessments beyond shakedown involving Changing Residual Stress Fields // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2006. Vol. 83. P. 136—147.
14. Chen H.F., Ponter A.R.S. Linear Matching Method on the evaluation of plastic and creep behaviours for bodies subjected to cyclic thermal and mechanical loading // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006. Vol. 68. P. 13—32.
15. Chen H.F. Lower and upper bound shakedown analysis of structures with temperature-dependent yield stress // *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2010. Vol. 132. P. 1—8.
16. Kalnins A. Plastic analysis in pressure vessel design—role of limit analysis and cyclic loading // ASME PVP conference. Seattle, USA 2000. P. 23—29.
17. Mackenzie D., Boyle J.T. The elastic compensation method for limit and shakedown analysis: a review // *Trans mech., J. Strain Anal. Eng. Des.* 2000. Vol. 35. P. 171—188.
18. Chen Y., Ponter A.R.S. A method for the evaluation of ratchet limit and the amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading // *European Journal of Mechanics. A/Solids*. 2001. Vol. 20. P. 555—571.
19. Ponter A.R.S., Chen H. A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2001. Vol. 20. P. 539—553.
20. Casciaro R., Garcea G. An iterative method for shakedown analysis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2002. Vol. 191. P. 49—50.
21. Belytschko T. Plane stress shakedown analysis by finite elements // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1972. Vol. 14. P. 35—40.
22. Corradi L., Zavelani A. A linear programming approach to shakedown analysis of structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974. Vol. 3. P. 37—53.
23. Preiss P. On the shakedown analysis of nozzles using elastoplastic FEA // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1999. Vol. 76. P. 421—434.
24. Muscat M., Hamilton R. Elastic shakedown in pressure components under non-proportional loading // ASME, PVP 2002 Conference. Vancouver, BC Canada. 2002. Vol. 1522. P. 437—453.
25. Muscat M., Mackenzie D., Hamilton R. Evaluating shakedown under proportional loading by non-linear static analysis // *Computers and Structures*. 2003. Vol. 82. P. 1727—1737.
26. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность в условиях теплосмен. М.: Машиностроение, 1970. 256 с.
27. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1979. 263 с.

References

1. Bree J. Elastic plastic behavior of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 1967, vol. 2, 3, pp. 226—238.
2. Chinh P.D. Shakedown theory for elastic-perfectly plastic bodies revisited. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2003, vol. 45, pp. 1011—1027.
3. Mahbadi H., Eslami M.R. Cyclic loading of beams based on the Prager and Frederick—Armstrong kinematic hardening models. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, vol. 44, pp. 859—879.
4. Leckie F.A., Penny R.K. Shakedown pressure for radial nozzles in spherical pressure vessels. *International Journal of Solids and Structures*. 1967, vol. 3, pp. 743—755.
5. Liu Y.H., Carvelli V., Maier G. Integrity assessment of defective pressurized pipelines by direct simplified methods. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1997, vol. 74, pp. 49—57.
6. Vu D.K., Yan A.M., Nguyen-Dang H. A primal—dual algorithm for shakedown analysis of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2004, vol. 193, pp. 4663—4674.
7. Staat M., Heitzer M. LISA a European Project for FEM-based Limit and Shakedown Analysis. *Nuclear Engineering and Design*, 2001, vol. 206, pp. 151—166.
8. Mackenzie D., Boyle J.T., Hamilton R. Elastic compensation method in shell-based design by analysis. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1996, vol. 338, pp. 203—208.
9. Mackenzie D., Boyle J.T., Hamilton R. The elastic compensation method for limit and shakedown analysis: a review. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2000, vol. 3, pp. 171—188.
10. Chen H.F., Ponter A.R.S. Shakedown and limit analyses for 3-D structures using the Linear Matching Method. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2001, vol. 78, pp. 443—451.

11. Chen H.F., Ponter A.R.S. Method for the Evaluation of a Ratchet Limit and the Amplitude of Plastic Strain for Bodies Subjected to Cyclic Loading. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2001, vol. 20, pp. 555—571.
12. Chen H.F., Ponter A.R.S., Ainsworth R.A. The Linear Matching Method applied to the High Temperature Life Integrity of Structures, Part 1: Assessments involving Constant Residual Stress Fields. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2006, vol. 83, pp. 123—135.
13. Chen H.F., Ponter A.R.S., Ainsworth R.A. The Linear Matching Method applied to the High Temperature Life Integrity of Structures, Part 2: Assessments beyond shakedown involving Changing Residual Stress Fields. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2006, vol. 83, pp. 136—147.
14. Chen H.F., Ponter A.R.S. Linear Matching Method on the evaluation of plastic and creep behaviours for bodies subjected to cyclic thermal and mechanical loading. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006, vol. 68, pp. 13—32.
15. Chen H.F. Lower and upper bound shakedown analysis of structures with temperature-dependent yield stress. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2010, vol. 132, pp. 1—8.
16. Kalnins A. Plastic analysis in pressure vessel design—role of limit analysis and cyclic loading. *ASME PVP conference*. Seattle, USA, 2000, pp. 23—29.
17. Mackenzie D., Boyle J.T. The elastic compensation method for limit and shakedown analysis: a review. *Trans mech., J. Strain Anal. Eng. Des.* 2000, vol. 35, pp. 171—188.
18. Chen Y., Ponter A.R.S. A method for the evaluation of ratchet limit and the amplitude of plastic strain for bodies subjected to cyclic loading. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, 2001, vol. 20, pp. 555—571.
19. Ponter A.R.S., Chen H. A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, 2001, vol. 20, pp. 539—553.
20. Casciaro R., Garcea G. An iterative method for shakedown analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2002, vol. 191, pp. 49—50.
21. Belytschko T. Plane stress shakedown analysis by finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1972, vol. 14, pp. 35—40.
22. Corradi L., Zavelani A. A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974, vol. 3, pp. 37—53.
23. Preiss P. On the shakedown analysis of nozzles using elastoplastic FEA. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1999, vol. 76, pp. 421—434.
24. Muscat M., Hamilton R. Elastic shakedown in pressure components under non-proportional loading. *ASME, PVP 2002 Conference*. Vancouver, BC Canada, 2002, vol. 1522, pp. 437—453.
25. Muscat M., Mackenzie D., Hamilton R. Evaluating shakedown under proportional loading by non-linear static analysis. *Computers and Structures*. 2003, vol. 82, pp. 1727—1737.
26. Gokhfel'd D.A., O.F. Cherniavskii O.F. *Nesushchaia sposobnost' v usloviakh teplosmen* [Bearing capacity in thermal cycles]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1970. 256 p.
27. Gokhfel'd D.A., Cherniavskii O.F. *Nesushchaia sposobnost' pri povtornykh nagruzheniakh* [Bearing capacity after repeated loadings]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1979. 263 p.

Статья поступила в редакцию 29.10.2012

Информация об авторах

КУРАЕВА Яна Владимировна (Самара) — ассистент кафедры «Механика». Самарский государственный технический университет (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, e-mail: yanakuraeva@yahoo.com).

КЛЕБАНОВ Яков Мордухович (Самара) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Механика». Самарский государственный технический университет (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244).

Information about the authors

KURAEVA Yana Vladimirovna (Samara) — Assistant of «Mechanics» Department. Samara State Technical University (Molodogvardeyskaya str., 244, Samara State Technical University, Samara, 443100, Russia, e-mail: yanakuraeva@yahoo.com).

KLEBANOV Yakov Mordukhovich (Samara) — Dr. Sc. Techn., Professor, Head of Department of «Mechanics» Department. Samara State Technical University (Molodogvardeyskaya str., 244, Samara, State Technical University, Samara 443100, Russia).