

# Расчет и конструирование машин

УДК 629.76:08

## Исследование поведения частот аэроупругих колебаний ракеты внутри области динамической устойчивости при вариации масс и жесткостей отдельных элементов конструкции

**А.Ф. Георгиев**

*Приведены результаты исследования чувствительности частот колебаний ракеты в потоке к вариациям масс и жесткостей отдельных элементов конструкции. Показано, что при увеличении массы частота растет, а при увеличении жесткости — падает. Указанный эффект имеет место внутри области аэроупругой устойчивости.*

**Ключевые слова:** ракета, аэроупругость, собственная частота, масса, жесткость.

*The article considers the results of study of the missile oscillation frequencies sensitivity in the flow with regard to variations of the missile components mass and stiffness. The oscillation frequency is shown to increase when the mass of missile components increases and to decrease when the stiffness of missile components increases. This effect occurs inside the aeroelastic stability area.*

**Keywords:** rocket, aeroelasticity, natural frequencies, mass, stiffness.



**ГЕОРГИЕВ**  
Александр Федорович  
соискатель,  
технический эксперт  
ООО «ЭМ-ЭС-СИ  
Софтвэр РУС»

## Введение

Упругая ракета в потоке воздуха представляет собой систему с распределенными параметрами и имеет бесконечное количество степеней свободы. На практике задача о колебаниях упругой конструкции в потоке сводится к конечной системе дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. к матричному уравнению аэроупругости, описывающему динамику упругой ракеты в потоке воздуха. Аэроупругая динамическая модель ракеты состоит из двух моделей: модели конструкции (упруго-массовая модель) ракеты и модели аэродинамического воздействия.

Нами рассматривается решение задачи аэроупругости в конечно-элементной постановке, с использованием пакетов MSC Nastran и FlightLoads компании MSC Software. Верификация расчетной модели и программного обеспечения проводилась по результатам испытаний и расчетов с помощью программных комплексов, традиционно применяемых на отечественных предприятиях и зарекомендовавших себя в течение нескольких десятилетий.

## Модель упругого ЛА

В отечественной промышленности широко распространен и весьма успешно используется метод «полиномов» В.Г. Бунькова [2] для создания упруго-массовой модели летательных аппаратов (ЛА). В рамках данного метода ракета сложной конструктивно-силовой схемы моделируется системой двумерных подконструкций, состоящих из формализованных упру-

гих балок, панелей, линейных и угловых связей, масс и моментов инерций. Это позволяет оперативно, в сжатые сроки формировать расчетные модели существенно меньших размеров и с приемлемой точностью решать весь спектр задач прикладной аэроупругости.

Наряду с методом «полиномов» используется и метод конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ позволяет более детально проработать отдельные узлы конструкций и учесть особенности поведения конструкции в потоке.

На рис. 1 представлена упруго-массовая модель гипотетической ракеты класса «земля—воздух», которая рассмотрена в данной статье. Массовые и жесткостные характеристики модели соответствуют характеристикам реального прототипа изделия. Была проведена идентификация упруго-массовой модели ракеты по результатам статических и динамических испытаний и аэродинамической модели — по результатам продувок и расчетов в специализированных газодинамических системах.

Модель состоит из балочных, оболочечных элементов, сосредоточенных масс, жестких и упругих связей. Жесткие связи использовались для моделирования шарниров, упругие связи — для моделирования проводки системы управления аэродинамическими поверхностями. В общей сложности модель имеет около 11 300 степеней свободы. В настоящей статье рассматривается параметрический эффект, поэтому большое внимание уделяется достоверности выбираемой модели и результатов расчета.

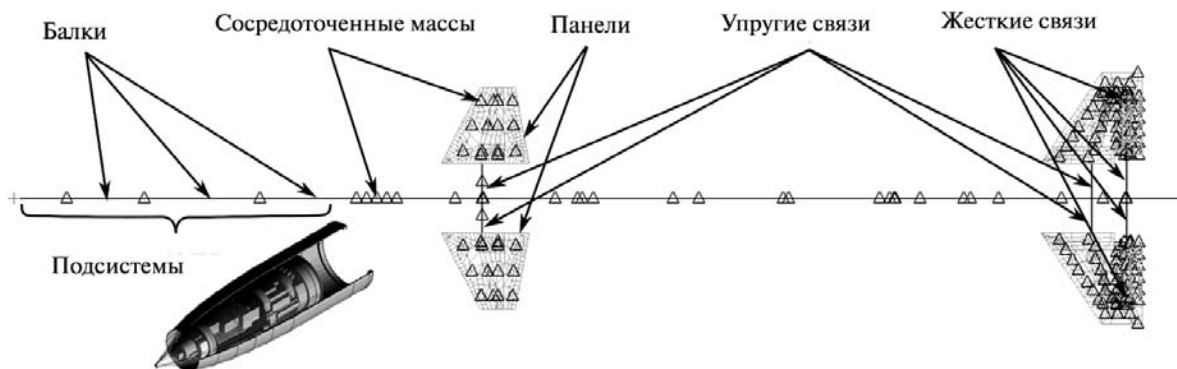


Рис. 1. Упруго-массовая модель гипотетической ракеты класса «земля — воздух»

### Модель аэродинамического воздействия

Существует множество теорий и методов различной сложности для моделирования аэродинамических нагрузок в задачах аэроупругости. В отечественной промышленности для моделирования аэродинамики в задачах аэроупругости используют метод Вудварта [9] и теорию «поршня» (дозвук и сверхзвук соответственно), а в зарубежной — метод «дипольных решеток» [7] (дозвук) и метод Zona51 [6] (сверхзвук).

Сравнение отечественных и зарубежных методов решения задач аэроупругости на трех примерах было рассмотрено в докладе на конференции MSC.Software в 2003 г. Из проведенных исследований следует вывод, что зарубежные методы расчета аэродинамических нагрузок — метод «дипольных решеток» (Double Lattice Method (DLM)) и метод Zona51 — дают результаты, которые хорошо согласуются с результатами, полученными в отечественной промышленности.

В основу решения аэродинамической задачи положен метод потенциала ускорений. Движение сжимаемого газа предполагается безвихревым. Ракета произвольной формы в плане в дозвуковом и сверхзвуковом потоке газа моделируется профилированными поверхностями. Эти поверхности разбиваются на достаточно большое количество элементарных панелей, по которым распределяются вихревые особенности постоянной интенсивности. Интенсивности особенностей определяются из условия «непротекания». При этом учитывается изменение местных углов атаки за счет упругости конструкции под действием аэродинамических и инерционных сил. Используются допущения гипотезы «малых возмущений» и теории «тонкого крыла». В принципе, может быть учтена толщина профиля любой несущей поверхности. Аэродинамическая модель гипотетической ракеты представлена на рис. 2.

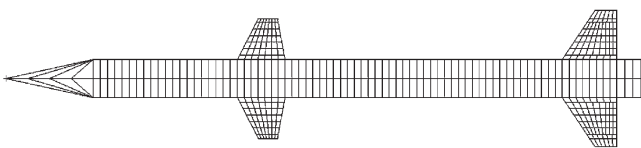


Рис. 2. Аэродинамическая модель ракеты

### Решение уравнения упругих колебаний ракеты в потоке

Методика расчета аэроупругих колебаний ЛА в потоке состоит из следующих этапов [2, 3, 8]:

— решение задачи о собственных колебаниях упругого ЛА в пустоте:

$$([M]\lambda^2 + [K])\varphi = 0,$$

где  $[M]$  — матрица масс;  $[K]$  — матрица жесткости;  $\lambda = \omega^2$  — собственные значения и  $\{\varphi\}$  — собственные векторы консервативной системы;

— приведение уравнения аэроупругости, записанного в базисе «физических» координат, к модальным координатам. Переход к модальным координатам осуществляется с целью существенного сокращения размерности задачи.

Матричное уравнение флаттера в «физических» координатах в общем виде:

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([B] - \frac{1}{4}\rho\bar{c}V\frac{[Q^I]}{k})\{\dot{x}\} + ([K] - \frac{\rho V^2}{2}[Q^R])x = 0, \quad (1)$$

где  $\{x\}$  — перемещения в «физических» координатах;  $[B]$  — матрица конструкционного демпфирования;  $[Q^I]$  — матрица аэродинамического демпфирования;  $[Q^R]$  — матрица аэродинамической жесткости;  $k = f\bar{c}/2V$  — приведенная частота;  $f$  — частота собственных колебаний;  $V$  — скорость набегающего потока.

Представим перемещения в виде

$$\{x\} = \{\varphi\}\{u_h\}e^{pt}, \quad (2)$$

где  $\{u_h\}$  — перемещения в модальных координатах.

Подставив выражение (2) в уравнение (1), сократив полученное выражение на  $e^{pt}$ , умножив на  $\{\varphi\}^T$  и проведя преобразования, получим уравнение флаттера в модальных координатах:

$$\left( [M_{hh}]p^2 + \left( [B_{hh}] - \frac{1}{4}\rho\bar{c}V\frac{[Q_{hh}^I]}{k} \right)p + \left( [K_{hh}] - \frac{\rho V^2}{2}[Q_{hh}^R] \right) \right) \{u_h\} = 0,$$

где  $[M_{hh}] = \{\varphi\}^T [M] \{\varphi\}$  — модальная матрица масс; так как при решении задачи собственных

значений для консервативной используется условие нормировки по массе, то  $[M_{hh}] = [I]$ ,  $[Q_{hh}^I] = \{\varphi\}^T [Q^I] \{\varphi\}$  — модальная матрица аэродинамического демпфирования;  $[B_{hh}] = \{\varphi\}^T [B] \{\varphi\}$  — модальная матрица конструкционного демпфирования;  $[K_{hh}] = \{\varphi\}^T [K] \{\varphi\}$  — модальная матрица жесткости;  $[Q_{hh}^R] = \{\varphi\}^T [Q_{hh}^R] \{\varphi\}$  — модальная матрица аэродинамической жесткости;  $p = \omega(\gamma \pm i)$  — собственные значения;  $\gamma$  — коэффициент демпфирования, характеризующий устойчивость аэроупругой системы в потоке;  $\{u_h\}$  — вектор собственных форм.

Решение полной проблемы собственных значений неконсервативной задачи — определение комплексных частот колебаний ЛА в потоке.

Задача о колебаниях линейной неконсервативной системы сводится к квадратичной задаче на собственные значения (для вещественной несимметричной матрицы) и решению полной проблемы собственных значений методом QR-итераций при фиксированных значениях числа Маха и параметра  $k$ :

$$[A - pI]\{u_h\} = 0,$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\left[ K_{hh} - \frac{\rho V^2}{2} Q_{hh}^R \right] & -\left[ B_{hh} - \frac{\rho \bar{c} V}{4k} Q_{hh}^I \right] \end{bmatrix}.$$

Анализ поведения частот колебаний ЛА в потоке на комплексной плоскости для различных чисел Маха и значений приведенной частоты  $k$ , что позволяет делать выводы об устойчивости или неустойчивости упругих колебаний ЛА в потоке воздуха.

## Поведение частот аэроупругих колебаний ракеты внутри области устойчивости при вариации масс и жесткостей ракеты

На практике, задавая вариации массовых и жесткостных характеристик, традиционно пользуются подходом, при котором считают, что при увеличении жесткости конструкции ее частота растет, при увеличении массы конструкции — падает. Однако в условиях аэродинамического нагружения наблюдается следующая особенность: при увеличении жесткости элементов конструкции ракеты частота колебаний ракеты в потоке газа падает, а при увеличении массы элементов конструкции ракеты частота растет. Эта особенность проявляется внутри области аэроупругой устойчивости ракеты, на штатных режимах полета, причем в потоке проявляется не сразу, а только когда интенсивность аэродинамического нагружения становится достаточно большой. Данный эффект наблюдается не во всех расчетных точках, а только локально на тех подконструкциях, для которых в потоке имеет место парное взаимодействие степеней свободы.

На рис. 3 изображены области ракеты, для которых изменялись жесткости и массы: область № 1 — передние управляющие плоскости; область № 2 — задние несущие плоскости; область № 3 — проводка задних рулей; область № 4 — проводка передних рулей; область № 5 — крепление задних несущих плоскостей; область № 6 — задние управляющие плоскости.

Чтобы оценить изменения частоты колебаний при вариациях массы и жесткости каждой области, были проведены расчеты для каждой из шести рассматриваемых областей (рис. 3).

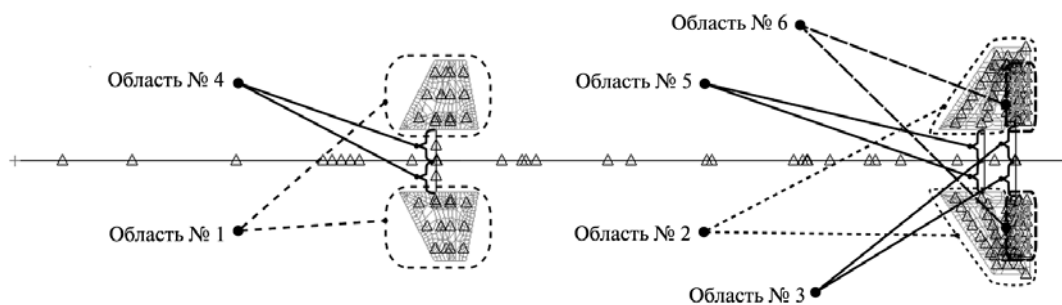


Рис. 3. Области исследования упругой динамической модели ракеты класса «земля — воздух»

Было принято, что плотность набегающего потока для всех расчетов равна  $1,225 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука равна  $340 \text{ м/с}$ . Для исследования изменения частотных характеристик ракеты принят следующий ряд чисел Маха:  $[0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0]$ .

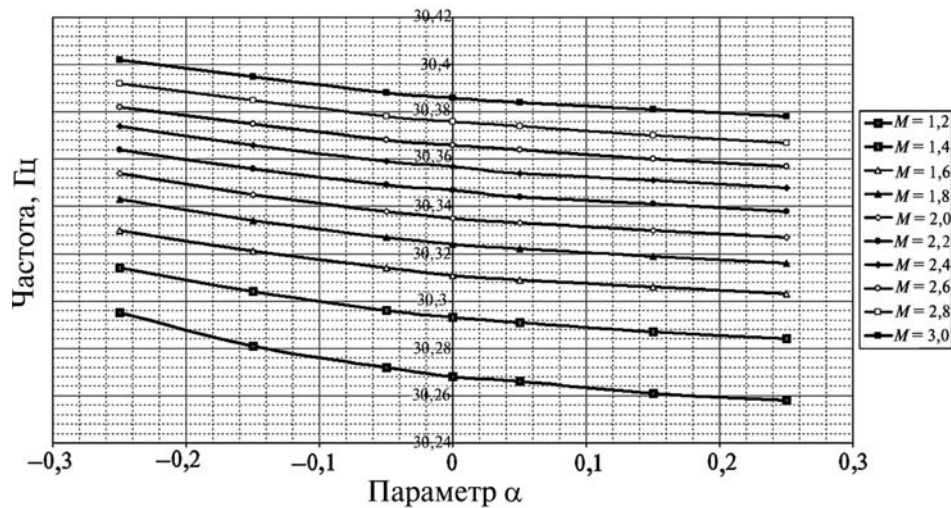
Для исследования изменения частоты колебаний в потоке при вариациях массы и жесткости каждой области, применительно к вышеуказанным областям жесткость и масса представлены в виде  $X(1 + \alpha)$ , где  $X$  — номинальное значение жесткости (массы);  $\alpha$  — безразмерный параметр вариации жесткости (массы). Для параметра  $\alpha$  значения брались из следующего ряда:  $[-0,25; -0,15; -0,05; 0,00; 0,05; 0,15;$

$0,25]$ . Таким образом, для исследования было проведено  $14 \times 7 \times 6 \times 2 = 1176$  расчетов.

По полученным результатам построены графики зависимости частоты от значений варьируемого параметра, а также траектории корней в потоке, характеризующие аэроупругие колебания рассматриваемой модели ракеты в исследуемом диапазоне скоростей.

Ниже представлены некоторые из полученных результатов, отражающие особенность поведения частот колебаний ракеты в потоке газа при штатном режиме полета: с увеличением жесткости областей исследования частота падает, а с увеличением массы частота растет (рис. 3) на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях.

Тон 1. Область исследования № 2



Тон 1. Область исследования № 5

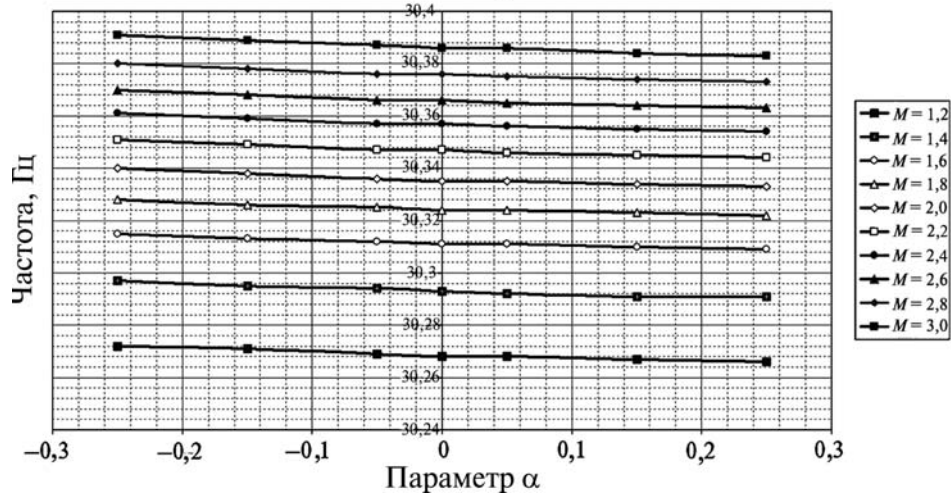


Рис. 4. Эффект уменьшения частоты колебаний в потоке при увеличении жесткости конструкции

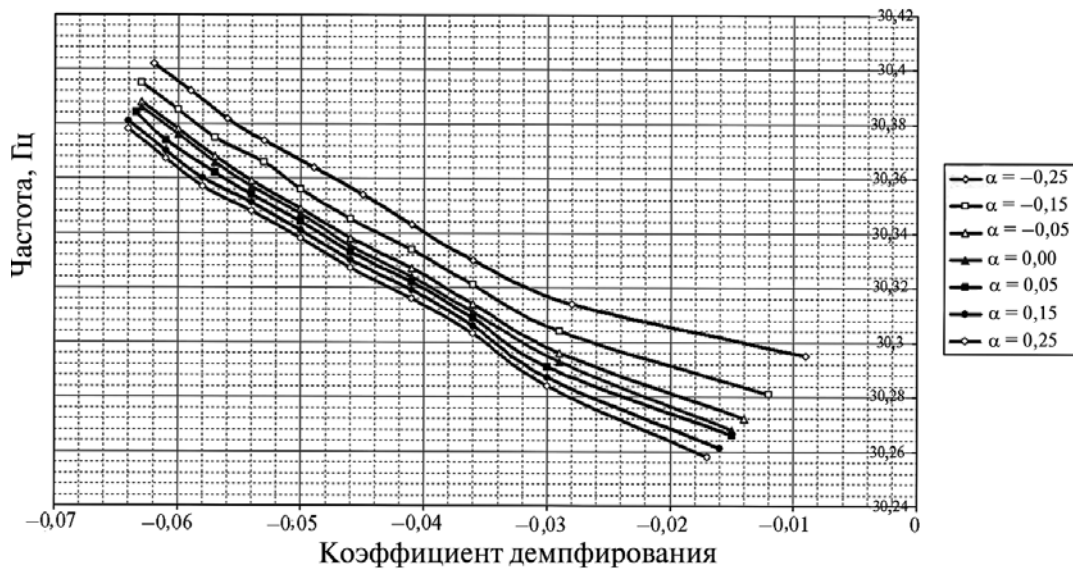
Следует отметить, что такое поведение частот колебаний ракеты проявляется не для всех тонов колебаний.

На рис. 4 приведены зависимости изменения частоты 1-го тона колебаний ракеты при вариации жесткости 2-й и 5-й областей исследования для различных скоростей полета. Из результатов, представленных на рис. 4, видно, что при увеличении жесткости 2-й и 5-й областей исследования модели частота падает, что подтверждает наличие особенностей в по-

ведении частот колебаний упругой ракеты в потоке газа.

На рис. 5 представлены результаты, характеризующие устойчивость ракеты в потоке. Из рис. 5 видно, что рассматриваемые режимы полета, на которых были обнаружены особенности поведения частот колебаний ракеты — эффект уменьшения частоты колебаний ракеты в потоке при увеличении жесткости 2-й области исследования модели — находятся внутри области устойчивости, вдали от границ флаттера и дивергенции.

**Диаграмма устойчивости 1-го тона колебаний ЛА в потоке в зависимости от вариации жесткости 2-й области исследования**



**Диаграмма устойчивости 1-го тона колебаний ЛА в потоке в зависимости от вариации жесткости 5-й области исследования**

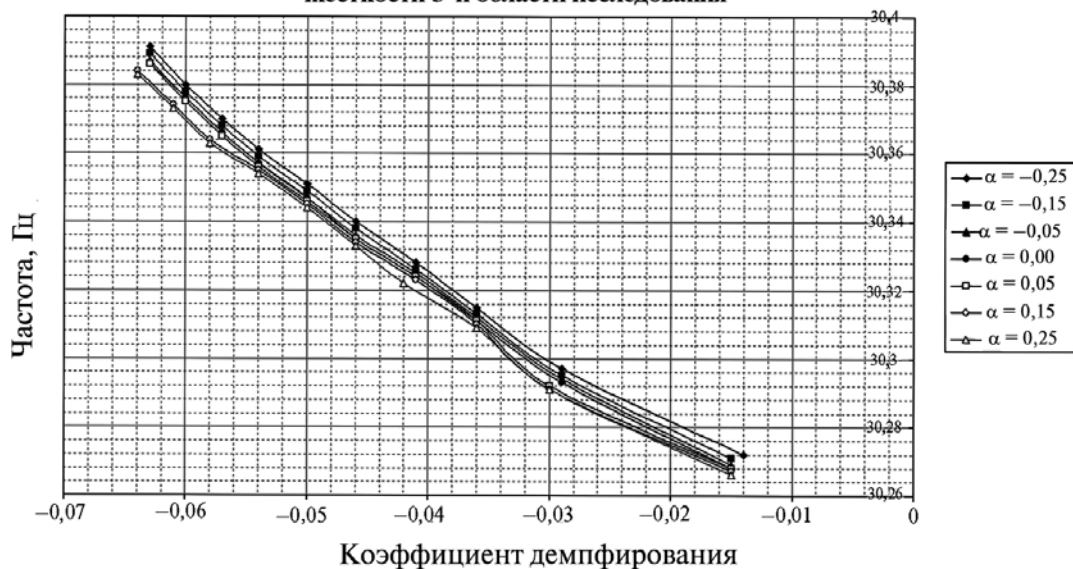
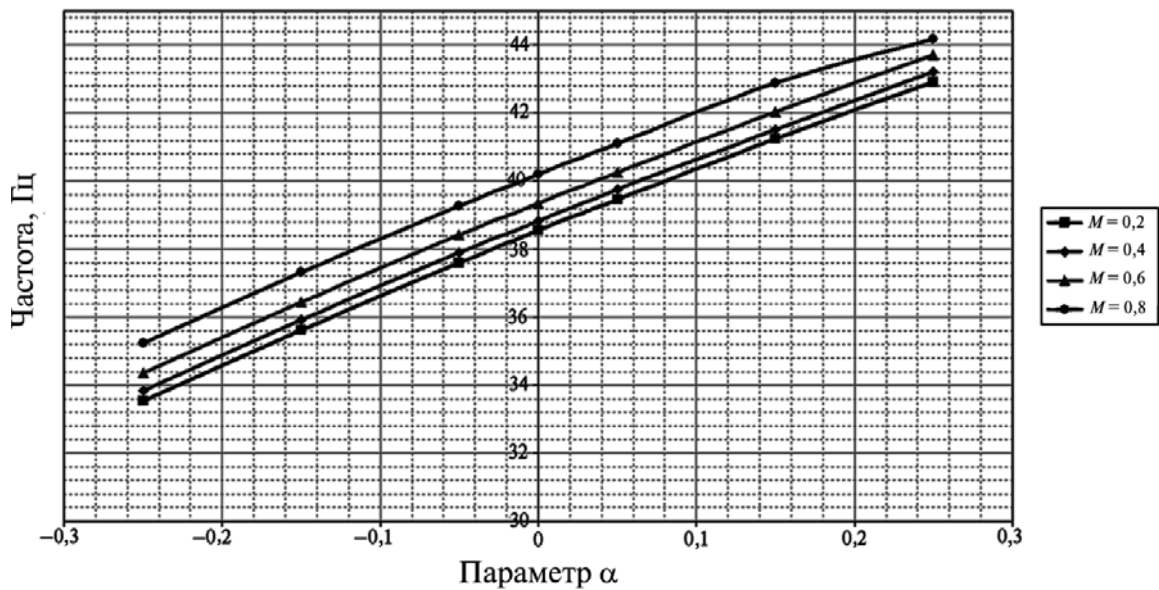


Рис. 5. Диаграмма устойчивости при различных значениях жесткости конструкции

Изменение частоты 4-го тона в зависимости от числа Маха и вариации параметра массы  
2-й области исследования



Изменение частоты 1-го тона в зависимости от числа Маха и вариации параметра массы  
4-й области исследования

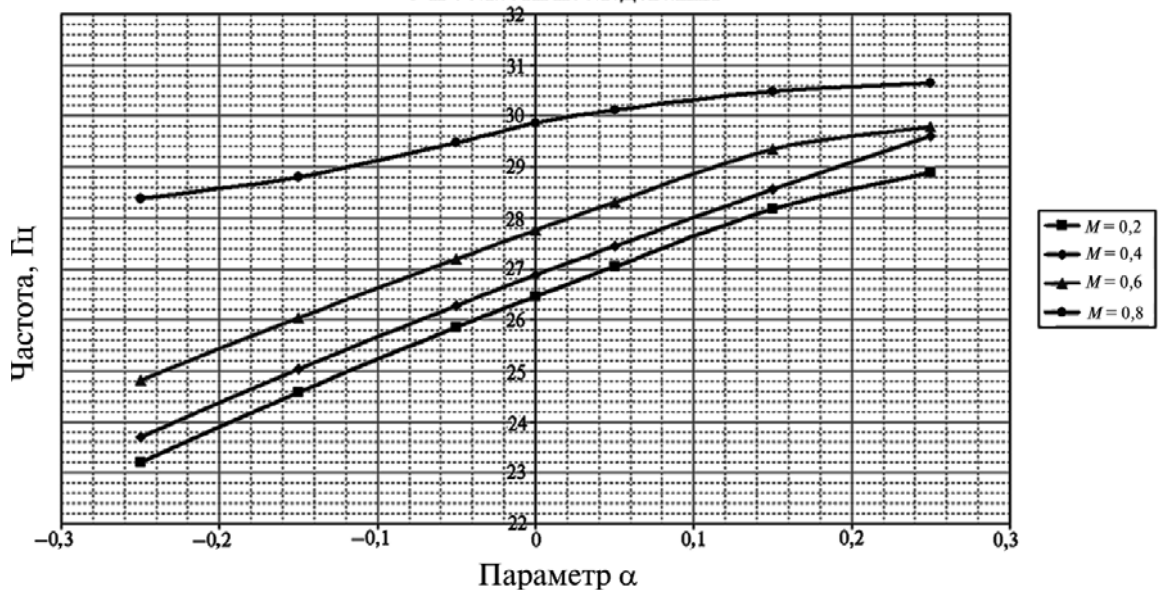


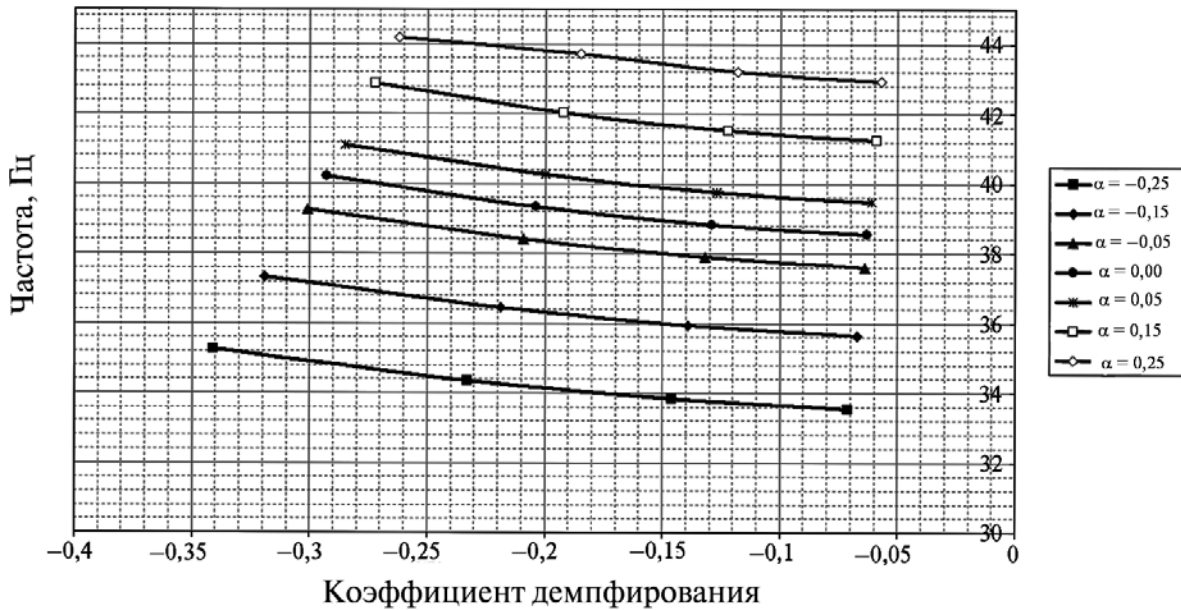
Рис. 6. Эффект увеличения частоты колебаний при увеличении массы конструкции при  $M < 1$

Необходимо отметить, что результаты, представленные на рис. 4 и рис. 5, соответствуют одним и тем же режимам полета.

Анализ результатов расчетов показал, что наиболее часто особенности поведения частот колебаний ракеты в потоке газа наблюдаются при вариациях сосредоточенных масс и характерны для всех областей исследования и на всем диапазоне рассматриваемых скоростей.

На рис. 6 представлены зависимость изменения частоты 4-го тона от вариации массы 2-й области исследования и зависимость изменения частоты 1-го тона от вариации массы 5-й области исследования для дозвуковых скоростей полета. Из результатов, представленных на рис. 6, видно, что при увеличении массы как 2-й, так и 5-й областей исследования частота растет. При вариации массы областей исследо-

**Диаграмма устойчивости 4-го тона колебаний ЛА в потоке в зависимости от вариации массы 2-й области исследования**



**Диаграмма устойчивости 1-го тона колебаний ЛА в потоке в зависимости от вариации жесткости 4-й области исследования**

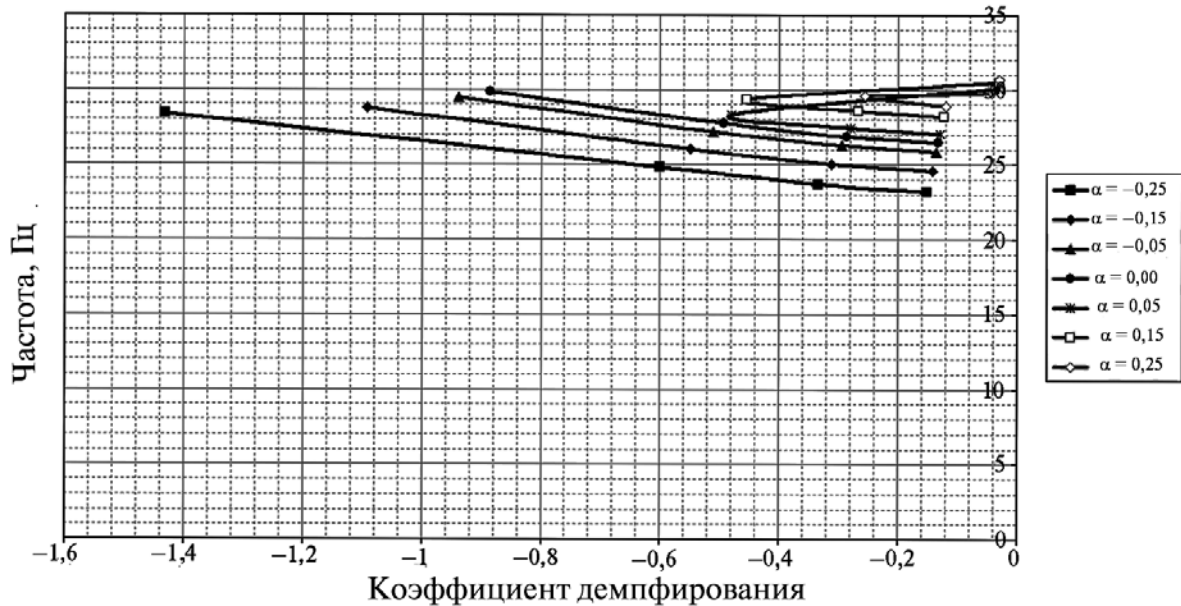


Рис. 7. Диаграмма устойчивости при различных значениях массы при  $M < 1$

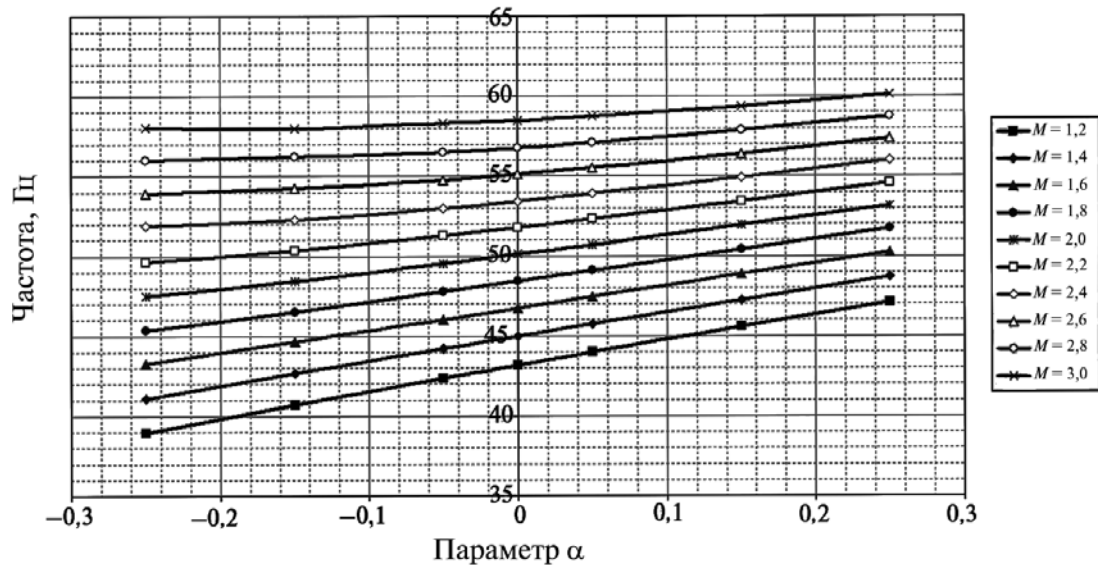
вания в диапазоне значений  $[0,75...1,25]$  от номинального значения массы изменение частоты в среднем составляет: более 8,5 Гц — при изменении массы задних несущих поверхностей (2-я область исследования) и около 5 Гц — при изменении массы крепления задних несущих поверхностей (5-я область исследования). Это также подтверждает наличие особенностей

в поведении частот колебаний упругой ракеты в потоке газа.

На рис. 7 представлены результаты, характеризующие устойчивость ракеты в потоке. Из рис. 7 видно, что режимы полета, на которых проявляется особенность поведения частот колебаний упругой ракеты в потоке газа — увеличение частоты колебаний при увеличении мас-



**Изменение частоты 6-го тона в зависимости от числа Маха и вариации массы  
2-й области исследования**



**Изменение частоты 10-го тона в зависимости от числа Маха и вариации параметра массы  
2-й области исследования**

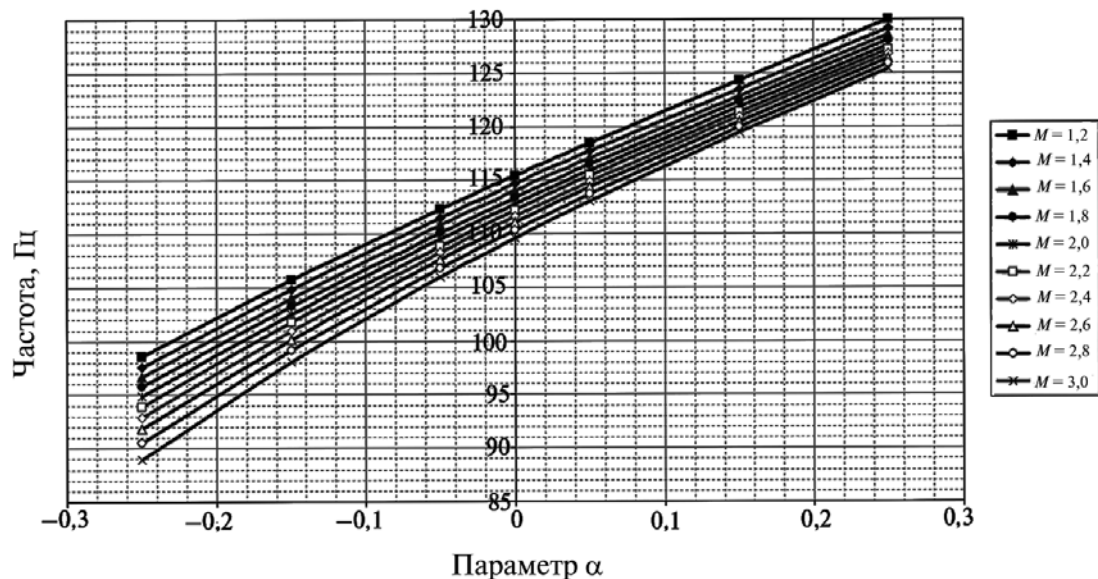


Рис. 8. Эффект увеличения частоты колебаний при увеличении массы конструкции при  $M > 1$

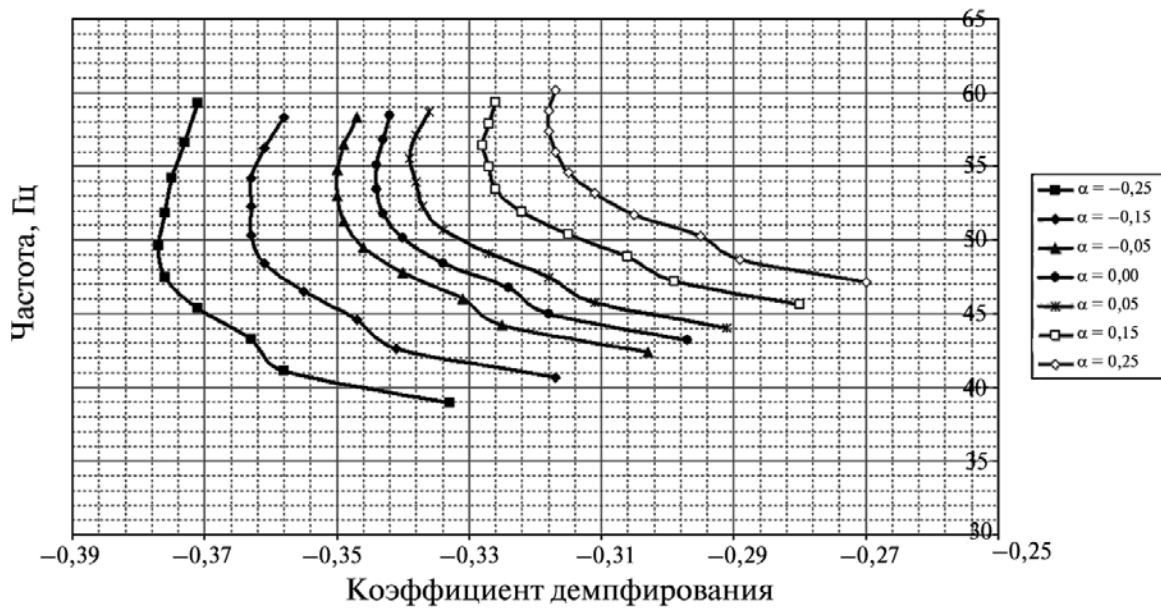
сы (4-я область исследования конструкции), — находятся внутри области устойчивости, вдали от границ флаттера и дивергенции. Результаты, представленные на рис. 6 и рис. 7, соответствуют одним и тем же режимам полета.

На рис. 8 и рис. 9 приведены графики изменения частоты 6-го и 10-го тонов в зависимости от вариации массы 2-й области исследования для сверхзвуковых режимов полета. Из рис. 8 видно, что существует особенность в поведении частот колебаний упругой ракеты

в потоке, т. е. при увеличении массы задних несущих плоскостей (2-я область исследования) частота растет. Изменение частоты (при  $M = 1,2$ ) для 6-го тона колебаний составляет порядка 8 Гц, а 10-го тона — более 36 Гц при изменении массы задних несущих поверхностей в диапазоне значений  $[0,75...1,25]$  от номинального значения их массы.

Диаграмма устойчивости ракеты в полете (рис. 9) показывает, что рассматриваемые режимы полета находятся далеко внутри области

**Диаграмма устойчивости 6-го тона колебаний ЛА в потоке в зависимости от вариации массы 2-й области исследования**



**Диаграмма устойчивости 10-го тона колебаний ЛА в потоке в зависимости от вариации массы 2-й области исследования**

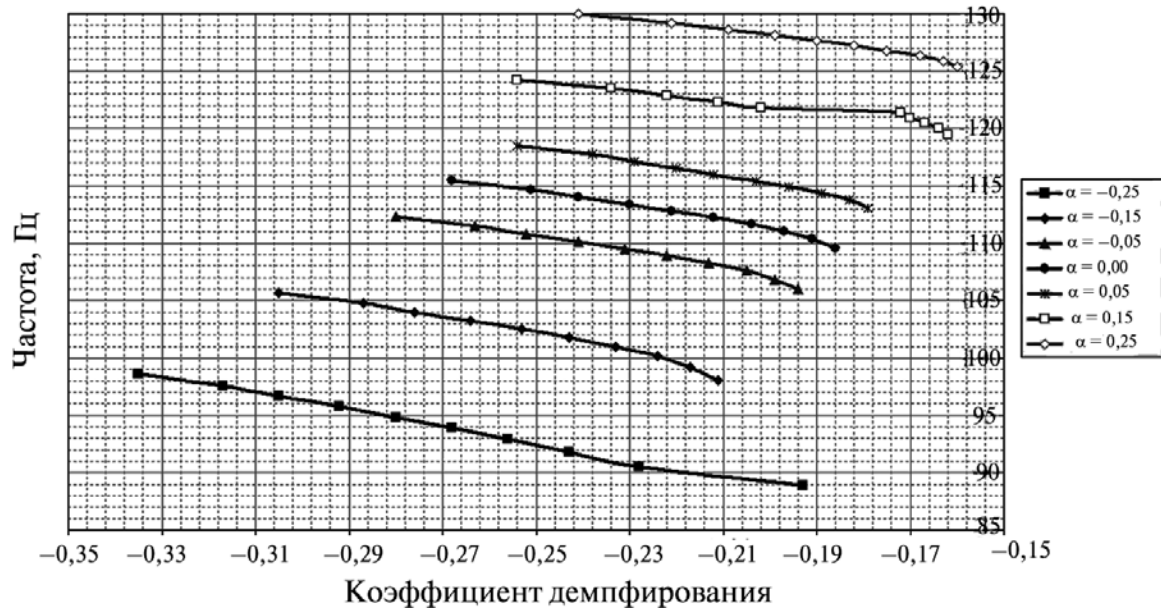


Рис. 9. Диаграмма устойчивости при различных значениях массы при  $M > 1$

аэроупругой устойчивости ракеты. Результаты, представленные на рис. 8 и рис. 9, соответствуют одним и тем же режимам полета.

### Выводы

1. Показано, что наблюдаются особенности поведения частот колебаний упругой ракеты в потоке газа: при увеличении жесткости эле-

ментов конструкции ракеты частота колебаний ракеты в потоке газа падает, а при увеличении массы элементов конструкции ракеты частота растет. Эта особенность проявляется внутри области аэроупругой устойчивости, на штатных режимах полета ракеты. Эффект возникает в потоке не сразу, а когда интенсивность аэродинамического нагружения становится достаточно большой.

2. Данная особенность поведения частот колебаний упругой ракеты в потоке газа может существенно повлиять на аэроупругую устойчивость ракеты, в связи с чем рекомендуется проводить детальные исследования изменения частот колебаний в потоке при вариации масс и жесткостей отдельных элементов конструкции.

Выводы, сделанные в работе, могут быть распространены и на другие задачи для систем с парным взаимодействием степеней свободы, таких, как продольные колебания жидкостных ракет, колебания управляемых упругих конструкций и т. д.

### Литература

1. *Аринчев С.В.* Теория колебаний неконсервативных систем. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 464 с.
2. *Буньков В.Г.* Расчет на флаттер крыла малого удлинения на БЦВМ // Труды ЦАГИ. 1964. Вып. 905. С. 3—20.
3. *Ватрухин Ю.М., Рыбаков А.А., Набиуллин Э.Н.* Построение математической модели упругого летательного аппарата сложных пространственных схем в задачах аэроупругости // МРС ТТЭ. Сер. А. 1983. Вып. 5.
4. *Георгиев А.Ф., Солдаткин А.Н.* Решение задач аэроупругости в MSC.FlightLoads. М.: MSC.Software Corporation RUS, 2003. 74 с.
5. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1950. 360 с.
6. *Chen, P. C., Liu D. D.* A Harmonic Gradient Method for Unsteady Supersonic Flow Calculations. J. Aircraft. 1985. Vol. 22. Pp. 371—379.
7. *Rodden W.P., Giesing J.P. and Kalman T.P.* Refinement of the Nonplanar Aspects of the Subsonic Doublet Lattice Lifting Surface Method. Journal of Aircraft. Vol. 9. 1972. P. 69—73.
8. *Rodden W.P., Johnson E.H.* MSC/NASTRAN Version 68. Aeroelastic Analysis User Guide. The MacNeal-Schwendler Corporation. Los Angeles, CA, 1994.
9. *Woodward F.A.* Analysis and Design of Wing-Body Combinations at Subsonic and Supersonic Speeds. Paper 68—55 at the AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting. New York, 1968.

Статья поступила в редакцию 27.12.2010 г.