

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трощенко В. Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. — Киев: Наукова думка, 1981. — 343 с.
2. Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник — М.: Машиностроение, 1985. — 224 с.
3. Гурьев А. В., Савкин А. Н. Об изменении демпфирующей способности конструкционных сталей в процессе циклического деформирования / Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. — Киев: Наукова думка, 1976. — С.122—127.
4. Гурьев А. В., Кондрагьев О. В. Влияние асимметрии цикла на рассеяние энергии и усталостную прочность / Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. — Киев: Наукова думка, 1982. С. 206—214.
5. Багмутов В. П., Кондратьев О. В. Формирование условий для моделирования полной кривой усталости лабораторных образцов при асимметричном нагружении растяжением-сжатием. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — № 3. 2004. — Т. 70. — С.1—9.
6. Багмутов В. П., Кондратьев О. В. Прогнозирование усталостной прочности на основе расчетной кривой усталости // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — №4. 2004.— Т. 70. — С. 1—5.
7. Стрижало В.А. Циклическая прочность и ползучесть металлов при малоцикловом нагружении в условиях низких и высоких температур. — Киев: Наукова думка, 1978. — 238с.

539.3

## СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ БАЛКИ-ПЛАСТИНКИ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

*Д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. ШЛЯХОВ, асп. А. В. ЕФРЕМОВ, канд. техн. наук Э.Ф. КРИВУЛИНА*

*Получено решение конструктивно-связанной задачи теплопроводности и термоупругости для тел пористой структуры. Учтено влияние зависимости коэффициента теплопроводности от напряжений. В основу решения положены вариационные принципы, реализация которых осуществлена методом конечных элементов.*

*In article the solution of the constructional-connected problem of thermal conductivity and thermoelasticity for bodies of porous structure is receive. Influence of dependence of coefficient of thermal conductivity from voltages is considered. In a basis of a solution, the variational principles which implementation is realised by a finite element method are supposed.*

Многие элементы конструкций теплоэнергетического оборудования выполнены из материалов, полученных методом порошкового спекания или порошковой металлургии. Речь идет о жаростойких и тугоплавких материалах, как металлических, так и неметаллических — это карбиды различных металлов, графит, пенокерамика и т.д.

Структура таких материалов изначально пористая, причем пористость может быть как кажущаяся (не сквозная), так и сквозная (капиллярная).

Изделия из пористого материала выполняются методами прессования, при этом плотность материала и, следовательно, пористость распределяется по массиву самого материала неравномерно. Возникает изначально нарушение гипотез сплошности и однородности материала, принимаемых в механике твердого деформируемого тела как основные.

Поскольку все чаще требуются решения задач механики деформируемого твердого тела именно для таких материалов, приходится возвращаться к гипотезе сплошности, но учитывать пористость введением поправок в исходные зависимости состояния материала, т.е. подходить к решению задач механики деформируемого твердого тела с позиции



механики неоднородных тел. При этом механические и теплофизические характеристики принимаются как некоторые функции пористости и температуры, законы изменения которых определяются экспериментально.

Сформулируем конструкционно-связанную задачу теплопроводности, т.е. учтем зависимость коэффициента теплопроводности от нормальных напряжений  $\lambda(P(\sigma), T)$ . Это стало необходимым, поскольку пористость, строго говоря, не остается неизменной при наложении на твердое тело поля напряжений. Так как коэффициент теплопроводности зависит от пористости, то поле температур становится зависящим от поля напряжений. В [1] имеются экспериментальные данные зависимости  $\lambda$  от напряжений сжатия близкой к линейной функции  $\lambda = a - b\sigma$ . Условимся в дальнейшем считать эту зависимость справедливой и для растяжения.

При этом для пористых огнеупорных материалов увеличение сжимающих напряжений на каждые  $\Delta\sigma = 100$  МПа приводит к увеличению коэффициента теплопроводности до 3% (рис. 3). Минимальная, технологически получаемая пористость для тугоплавких материалов  $P = 3\%$ .

Рассмотрим тонкую пластинку (балку-стенку) постоянного прямоугольного сечения, выполненную из пористого материала. Пластинка находится в одномерном поле температур под воздействием внутреннего теплового источника. Она может быть как закрепленной, так и свободной.

На верхней и нижней границах пластины поддерживаются постоянные различные температуры. Боковые поверхности теплоизолированы. Пористость материала переменна по высоте сечения. Теплофизические и механические характеристики зависят от температуры  $T$  и пористости  $P$ . Тепловой режим в пластине — нестационарный.

Решение задачи теплопроводности сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения [2, 3]:

$$\frac{d}{dZ} \left[ \lambda(P(\sigma), T) \frac{dT}{dZ} \right] + W(T, P) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

при удовлетворении начальным и граничным условиям

$$\begin{aligned} &\text{при } t = 0, T(Y) = 0, W = W_0 \\ &\text{при } t > 0, T = T_1 \text{ при } Y = 0, T = T_2 \text{ при } Y = h. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\lambda(P(\sigma), T)$  — коэффициент теплопроводности как функция температуры, пористости и напряжения,  $P(Y)$  — объемная пористость,  $\rho C_p(T, P)$  — объемная удельная теплоемкость,  $W(T, P)$  — удельная объемная мощность теплового источника.

В соответствии с [1, [4, 5] аппроксимируем  $\lambda(P(\sigma), T)$ ,  $W(T, P)$  функциями

$$\lambda = \left( \lambda_0 \sqrt{(1-P)^3} - b\sigma \right) (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots),$$

$$W(T, P) = W_0 (1-P) (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots),$$

где  $b, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  — экспериментальные коэффициенты.

Решение нелинейного уравнения с переменными коэффициентами (1) ищется методом последовательных приближений [6], [7] на основе метода конечных элементов (МКЭ) [8].

Краевую задачу (1, 2) заменяем эквивалентной ей вариационной с поиском минимума функционала в фиксированный момент времени  $t'$  для  $m$ -го приближения

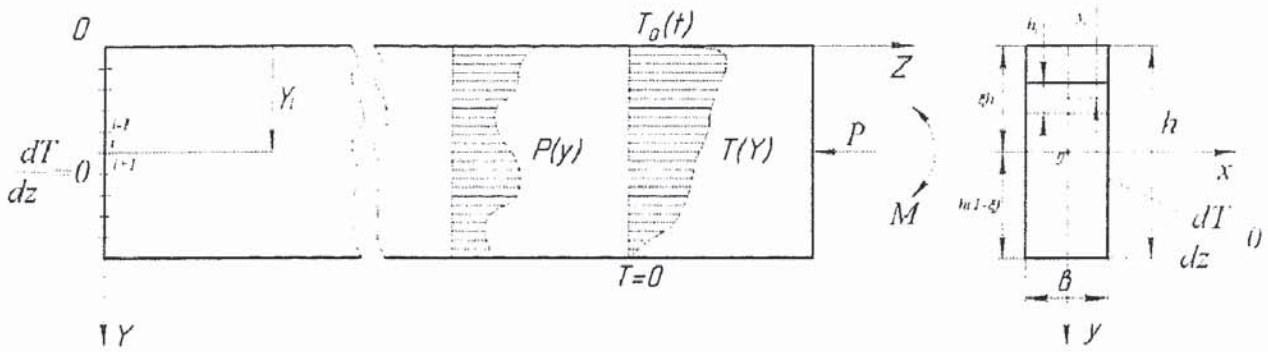


Рис. 1. Схема балки-пластинки в одномерном поле температур

$$J = \int_0^h \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}}{2} \left[ \frac{\partial T^{(m)}}{\partial y} \right]^2 - T^{(m)} W^{(m-1)} + T^{(m)} \rho C_p^{(m-1)} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=t'} \right\} dY, \quad m=1, 2, \dots \quad (3)$$

Для реализации минимума функционала (3) используем метод конечных элементов (МКЭ) [8].

При  $m = 1$  принимаем  $\lambda^{(0)}(Y) = \lambda_0 \sqrt{(1-P)^3}$ ,  $W^{(0)}(Y) = W_0(1-P)$ . При  $m > 1$  имеем

$$\lambda^{(m-1)}(Y) = \left( \lambda_0 \sqrt{(1-P)^3} - b\sigma \right) (1 + \beta_1 T_{(m-1)} + \beta_2 T_{(m-1)}^2 + \dots),$$

$$W(T, P) = W_0(1-P)(1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots).$$

Разбиваем пластину по высоте сечения  $h$  на  $n$  элементов (отрезков)  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Обозначая  $T_i$  - искомую температуру в  $i$ -ом узле, соответственно будем иметь  $T = T_1$  при  $i = 1$ ,  $T = T_2$  при  $i = n + 1$ . Рассматривая два смежных элемента 1 и 2, примыкающих к узлу  $i$ , представим функционал  $J$  в виде суммы

$$J = J_1 + J_2 + \chi_1 + \chi_2 + \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$\text{где } J_1 = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \left\{ \frac{\lambda_1^{(m-1)}}{2} \left[ \frac{\partial T^{(m)}}{\partial y} \right]^2 \right\} dy, \quad \chi_1 = \int_{y_i}^{y_{i+1}} T^{(m)} \omega_1^{(m-1)} \frac{\partial T}{\partial t} dy, \quad \gamma_1 = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} T^{(m)} W_1^{(m-1)} dy,$$

$$J_2 = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left\{ \frac{\lambda_2^{(m-1)}}{2} \left[ \frac{\partial T^{(m)}}{\partial y} \right]^2 \right\} dy, \quad \chi_2 = \int_{y_{i-1}}^{y_i} T^{(m)} \omega_2^{(m-1)} \frac{\partial T}{\partial t} dy, \quad \gamma_2 = - \int_{y_{i-1}}^{y_i} T^{(m)} W_2^{(m-1)} dy.$$

$\lambda_1^{(m-1)} = \lambda_{(i)}^{(m-1)} + \lambda_{(i+1)}^{(m-1)} / 2$ ,  $\lambda_2^{(m-1)} = \lambda_{(i-1)}^{(m-1)} + \lambda_{(i)}^{(m-1)} / 2$  — средние по элементам коэффициенты теплопроводности,  $\omega_1 = \rho_i C_{p(i)}^{(m-1)} + \rho_{i+1} C_{p(i+1)}^{(m-1)} / 2$ ,  $\omega_2 = \rho_{i-1} C_{p(i-1)}^{(m-1)} + \rho_{i+1} C_{p(i)}^{(m-1)} / 2$ ,

$W_1 = W_{(i)}^{(m-1)} + W_{(i+1)}^{(m-1)} / 2$ ,  $W_2 = W_{(i-1)}^{(m-1)} + W_{(i)}^{(m-1)} / 2$  — средние по элементам мощности источников тепла. Другие элементы в сумме не учитываем, так как они не содержат узел  $i$ .

Аппроксимируем функцию температур в каждом из элементов линейным сплайном  $T_{i,i+1} = N_{11} T_i + N_{12} T_{i+1}$ ,  $T_{i-1,i} = N_{21} T_{i-1} + N_{22} T_i$ . Здесь через  $N_{11}, \dots, N_{22}$  обозначены функции  $N_{11} = Y_{i+1} - Y/h_1$ ,  $N_{12} = Y - Y_i/h_1$ ,  $N_{21} = Y_i - Y/h_2$ ,  $N_{22} = Y - Y_{i-1}/h_2$ ,  $h_i = y_{i+1} - y_i$ ,  $h_{2i} = y_i - y_{i-1}$ . Выполняя процедуру Рунге, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений вида



$$\frac{\partial T_i}{\partial t} A_1 + \frac{\partial T_{i-1}}{\partial t} A_2 + \frac{\partial T_{i+1}}{\partial t} A_3 + A_4 T_i - A_5 T_{i+1} - A_6 T_{i-1} - A_7 = 0. \quad (4)$$

Решение системы (4) ищем на основе разностной схемы Кранка-Николсона сведя ее к линейной алгебраической системе уравнений и используя метод итераций на каждом временном шаге. Вводя разностный аналог согласно [8], получим окончательно алгебраическую систему уравнений относительно узловых температур

$$T_i^{(m)} = \frac{1}{a_1} \left[ \Phi_i^{(m)} a_2 + T_{i-1}^{(m)} a_3 + \Phi_{i-1}^{(n)} a_4 + T_{i+1}^{(m-1)} a_5 + \Phi_{i+1}^{(n)} a_6 + \frac{1}{2} (h_1 W_1 + h_2 W_2) \right], \quad i = 2, \dots, n, \quad (5)$$

где

$$a_1 = \left( 2 \frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}{3\Delta t} + \frac{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}{h_1 h_2} \right), \quad a_2 = \left( 2 \frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}{3\Delta t} - \frac{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}{h_1 h_2} \right), \quad a_3 = \left( \frac{\lambda_2}{h_2} - \frac{\omega_2 h_2}{3\Delta t} \right),$$

$$a_4 = \left( \frac{\lambda_2}{h_2} + \frac{\omega_2 h_2}{3\Delta t} \right), \quad a_5 = \left( \frac{\lambda_1}{h_1} - \frac{\omega_1 h_1}{3\Delta t} \right), \quad a_6 = \left( \frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\omega_1 h_1}{3\Delta t} \right).$$

Решение системы (5) на каждом временном шаге ищется итерационным методом Гаусса—Зейделя до сходимости с заданной точностью. Далее уточняем теплофизические характеристики и повторяем решение на следующем временном шаге. итерации повторяем до сходимости двух приближений по  $m$ :  $(T^{(m)} - T^{(m-1)})/T^{(m)} 100\% \leq \varepsilon$ .

Для поиска нормальных температурных напряжений в балке-стенке исходим из посылки, что длина бруса велика и краевыми эффектами можно пренебречь. В этом случае с достаточной точностью можно использовать прием, основанный на принципе освобожденности от связей [9, 10].

При полном закреплении пластинки по краям в ней возникнут напряжения, обусловленные стесненным тепловым расширением [10]

$$\sigma'_z(y) = -E(y)\alpha(T)T(y), \quad (6)$$

где  $\alpha(T)$  — средний в рабочем диапазоне температур коэффициент линейного расширения материала как функция координаты  $y$ ;  $E(Y)$  — переменный по высоте сечения модуль Юнга, зависящий от пористости и температуры.

На основании [4] представим модуль Юнга следующей функциональной зависимостью:

$$E(y) = E(T)E(P), \quad (7)$$

где  $E(T) = E_0(1 + b_1 T + b_2 T^2)$ ,  $E(P) = 1 + a_1 P + a_2 P^2$ .

Входящие в (7) коэффициенты определяются экспериментально. Заметим, что координатная ось  $x$  проходит по нейтральному слою сечения так, что  $y = Y - \xi h$ .

Нормальные напряжения (6) вызывают в сечении продольную силу  $N$  и момент  $M$ , определяемые по абсолютному значению так:

$$N = -b \int_{-\xi h}^{h(1-\xi)} \sigma'_z(y) dy, \quad M = -b \int_{-\xi h}^{-h(1-\xi)} \sigma'_z(y) y dy, \quad (8)$$

где  $\xi$  — определяет положение нейтральной оси [11].

Если освободить брус от связей, то для расчета действительных напряжений необходимо к напряжениям (6) добавить напряжения  $\sigma_z''(y)$ ,  $\sigma_z'''(y)$ , обусловленные силой  $N$  и моментом  $M$ . Согласно (8)

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z''(y) + \sigma_z'''(y).$$

Для поиска напряжений  $\sigma_z''$ , обусловленных силой  $N$ , используем следующий прием. Разбиваем брус по высоте на  $n$  слоев постоянного сечения  $A_i = bh_i$  (рис. 1) с постоянными физико-механическими характеристиками по слою  $E_i = \text{const}$ . Распределим продольную

силу  $N$  по слоям, т. е.  $N_1 + N_2 + \dots = N$ . Так как  $\Delta l_i = N_i L / E_i A_i$ , то из уравнения равно-

весия и условий совместности деформаций получим  $N_i = N / \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}$ , соответственно напряжения  $\sigma_z''$  будут равны

$$\sigma_{z(i)}'' = \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

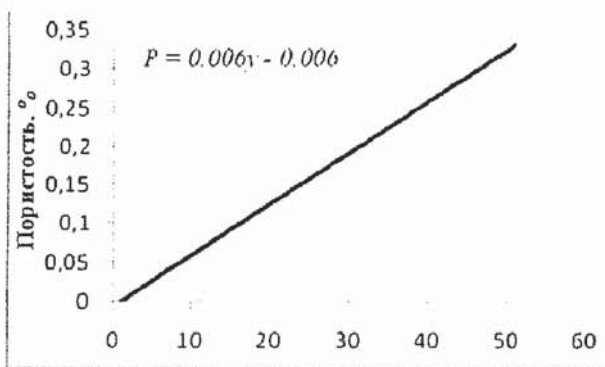


Рис. 2. Закон изменения пористости

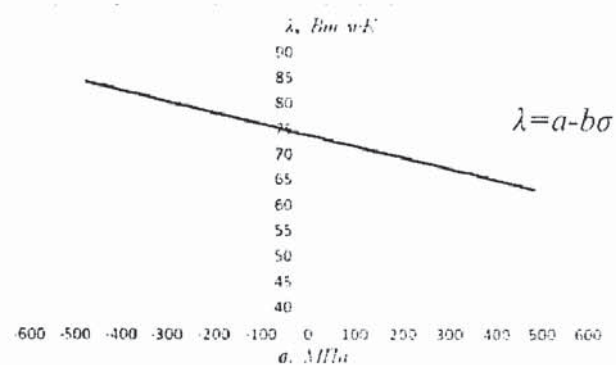


Рис. 3. График зависимости теплопроводности от напряжений

Считая брус многослойным, с постоянными характеристиками по толщине слоя и следуя [11], положение нейтральной линии из условия равенства нулю продольной силы при чистом изгибе бруса определим так:

$$\xi = \frac{0,5 E_1 h_1^2 + \sum_{i=2}^n E_i h_i \left[ 0,5 h_i + \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right]}{h \sum_{i=1}^n E_i h_i}.$$

Соответственно по теории изгиба многослойного бруса [11] будем иметь

$$\sigma_z''(y) = \frac{E(y) y M}{\sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{b h_i^3}{12} + b h_i y_{ci}^2 \right]}.$$



На основании полученных решений, используя принцип суперпозиции, получим расчетные формулы для температурных напряжений в стержне при различных способах его закрепления:

$$\sigma_z(y) = -E(y)\alpha(T)T(Y) + \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}} + \frac{E(y)yM}{\sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{bh_i^3}{12} + bh_i y_{ci}^2 \right]} \quad (9)$$

При наличии подвижной заделки, разрешающей радиальное перемещение, но запрещающей поворот, в (9) убирается последнее слагаемое. В случае жесткой заделки в (9) остается лишь первое слагаемое. После определения поля напряжений на первом шаге, уточняется коэффициент теплопроводности как функция напряжений  $\lambda(P(\sigma), T)$  заново решаем задачу теплопроводности для второго шага по времени, а затем и термоупругости. Количество шагов по времени регламентируется достижением установившегося режима. Из полученного решения (9) как частный случай вытекает решение для однородной задачи термоупругости для балки-пластинки [9].

Проведем практическое исследование полей температур и напряжений балки-пластинки, выполненной из пористого железа. Высота пластины  $h = 0,02$  м, ширина — произвольная ( $b \ll h$ ).

Температурное поле вызвано внутренним тепловым источником с удельной объемной мощностью  $W_0 = 275000 \frac{\text{кВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . На верхней границе сечения пластины поддерживается постоянная температура  $T = 120$  °С, на нижней границе  $T = 20$  °С. Боковые поверхности теплоизолированы. Закон изменения пористости от высоты сечения имеет линейную зависимость  $P = 0,006y - 0,006$  (рис. 2).

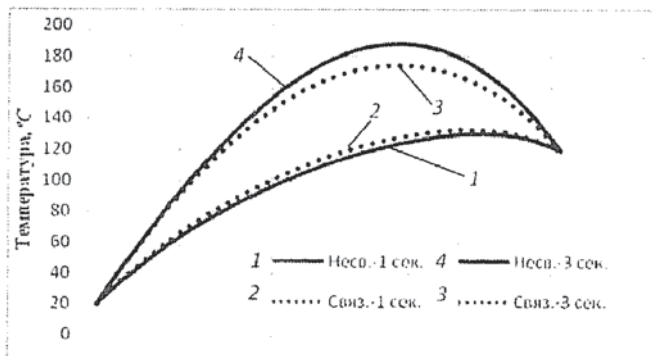


Рис. 4. Поле температур

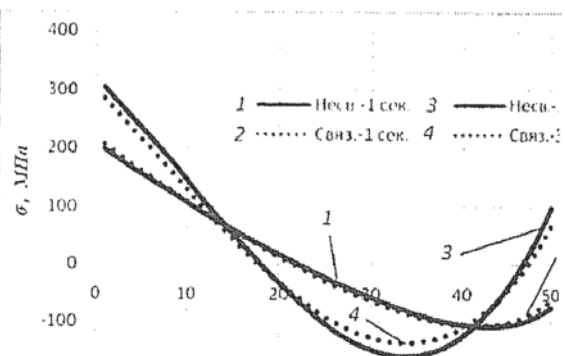


Рис. 5. Поле напряжений для пластины, закрепленной по схеме скользящей заделки

Количество разбиений по толщине  $h$  принято  $n = 50$ . Поля температур и напряжений (рис. 3—5) при связанной постановке задачи представлены для моментов времени 1 и 3 с. Для сравнения приведены значения в случае несвязанной задачи соответственно для 1 и 3 с. Поля напряжений приведены для случая закрепления пластинки по схеме скользящей заделки рис. 5. На графиках по оси абсцисс показан номер конечного элемента.

Таким образом, нами оценено влияние закона изменения пористости, температуры и способа закрепления пластинки на НДС. Установлено, что роль пористости, термочувствительности и связанности при нестационарном режиме нагрева существен-

но и требует обязательного учета ее при расчетах НДС и проектировании различных конструкций.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литовский Е. Я., Пучкелевич Н. А. Теплофизические свойства огнеупоров. — М.: Металлургия, 1982. — 152 с.
2. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Наука, 1975. — 228 с.
3. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. — М.: ИЛ, 1960. — 479 с.
4. Кашталян Ю. А. Характеристики упругости материалов при высоких температурах. — Киев: Наукова думка, 1970. — 112 с.
5. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов. — М.: Мир, 1970. — 356 с.
6. Шляхов С. М., Кривулина Э. Ф. Задача термоупругости для балки-пластины из пористого материала в одномерном поле температур / Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. научн. сб. — Саратов: СГТУ, 2003. — С. 58—63.
7. Шляхов С. М., Ефремов А. В. Термоупругое состояние балки-пластины из пористого материала в нестационарном поле температур / Авиакосмические технологии «АКТ-2006»: Труды седьмой Международной научно-технической конференции. — Воронеж: изд-во Воронеж. гос. техн. ун-т, 2006. — С. 355—360.
8. Сегерлинд Ларри Дж. Применение метода конечных элементов / Под ред. Б. Е. Победри. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
9. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / Под ред. Г. С. Шапиро. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
10. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения. — М.: Изд-во И. Л., 1959. — 349 с.
11. Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек. — М.: Машиностроение, 1971. — 304 с.