№ 10 *2007*

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.374

ПЛАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СЕТЧАТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д-р техн. наук, проф. К.И. РОМАНОВ

Сформулированы критерии устойчивости по Друкеру для сетчатых материалов, что позволяет определить условие глобальной устойчивости в процессах вытяжки армированных элементов конструкций. Дана классификация микромоделей сетчатых материалов и показано, что потеря устойчивости дискретных материалов является квантованным процессом, сопровождающимся выходом из работы отдельных волокон или отслаиванием пространственной сетки по плоскостям.

Drucker-Prager criterion for mesh materials allowing to define a condition of global stability in processes of reinforced elements extraction from constructions are formulated. Classification of micro models of mesh materials shows that loss of stability in discrete materials is a quantized process accompanied by the exit of separate filaments from operation or a grid peeling on planes.

Исследование несущей способности сетчатых материалов [1—3] представляет интерес на стадии проектирования технологии получения армированных конструкций. Ниже для анализа пластической устойчивости сетчатых материалов применен постулат Друкера [4] и показано, что этот постулат дает возможность определить условие глобальной устойчивости в процессах вытяжки армированных элементов конструкций.

Сформулирован принцип равной устойчивости, открывающий путь к оптимальному проектированию сетчатых конструкций.

1. Диполь* (рис. 1). Рассмотрим стержень, растянутый силой P и имеющий в текущий момент нагружения длину l и площадь поперечного сечения F.

Примем уравнение состояния материала в виде

$$\sigma = A\varepsilon^n, \tag{1}$$

где $\sigma = P/F$ действительное напряжение, $\varepsilon = \ln(l/l_0)$ — логарифмическая деформация, l_0 — начальная длина стержня, A и n постоянные материала.

Считаем материал несжимаемым

$$F_0 l_0 = Fl, \tag{2}$$

где F_0 — ачальная площадь поперечного сечения стержня.

Уравнения (1) и (2) приводят к равенствам

$$P = AV_0\varepsilon^n/l, \tag{3}$$

$$dP = AV_0\varepsilon^{n-1}(n-\varepsilon)d\varepsilon/l, \tag{4}$$

где V_0 — начальный объем стержня.

По критерию $dPdl = 0$ получаем известный результат [5] $\varepsilon^* = n$, где ε^* — предельная деформация, обусловленная наступлением пластической неустойчивости.

* Использование терминов теории электричества не является принципиальным, однако позволяет классифицировать микромодели сетчатых материалов.

2. Квадруполь (рис. 2). В системе координат x, y все величины с индексами x и y имеют такой же смысл, как в случае диполя, направленного вдоль осей x и y, соответственно. В соответствии с постулатом Друкера глобальная неустойчивость [6] наступает при выполнении условия

$$dP_x du_x + dP_y du_y = 0, \qquad (5)$$

где $du_i = dl_i = l_i d\varepsilon_i$, $i = x, y$, суммирование по i не производить.

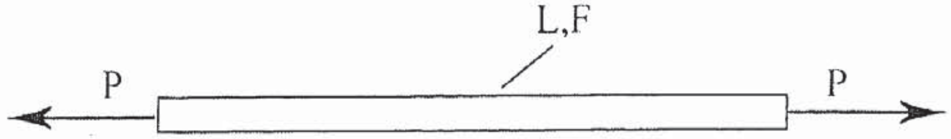

Рис. 1

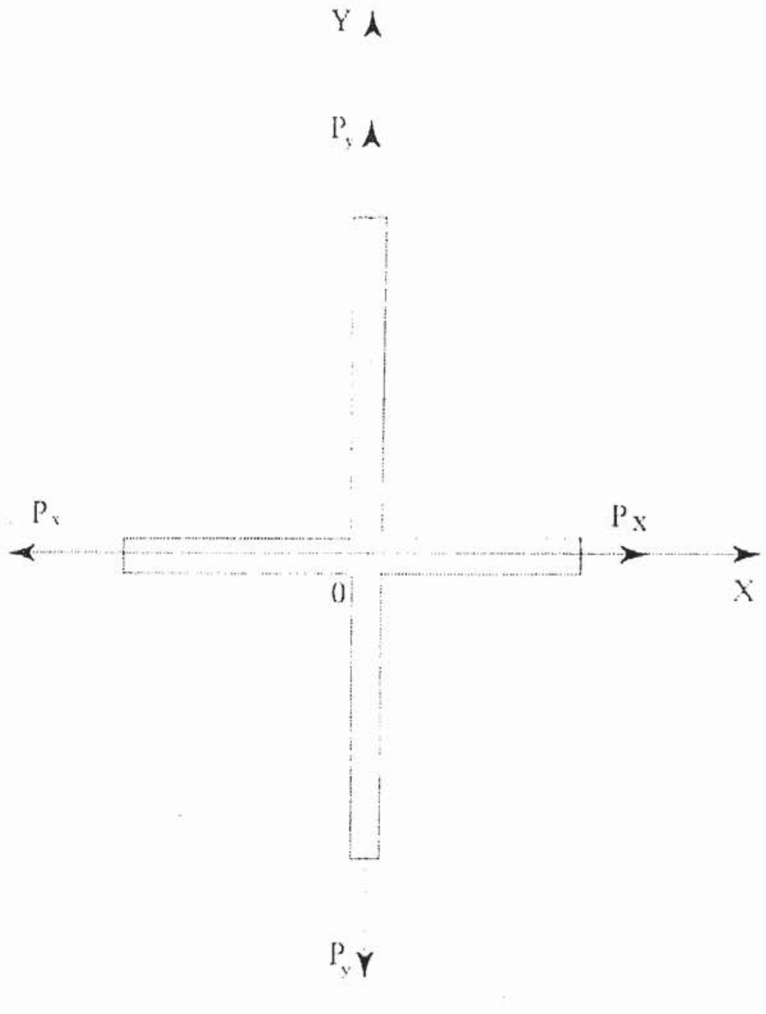

Рис. 2

Соотношения (4) и (5) приводят к равенству

$$A_x V_{ox} \varepsilon_x^{n_x - 1} \ (n_x - \varepsilon_x) d\varepsilon_x^2 + A_y V_{oy} \varepsilon_y^{n_y - 1} \ (n_y - \varepsilon_y) d\varepsilon_y^2 = 0. \qquad (6)$$

Выполнение равенств $\varepsilon_x = n_x$ или $\varepsilon_y = n_y$ означает появление локальной неустойчивости отдельных элементов. При одновременном $\varepsilon_x^* = n_x$ и $\varepsilon_y^* = n_y$ имеет место глобальная неустойчивость системы.

Условие (6) выполняется в конкретной точке траектории нагружения в пространстве деформаций. Связь $d\varepsilon_x$ и $d\varepsilon_y$ в процессе нагружения зависит от истории внешнего воздействия. При заданной функции $l_x(l_y)$ происходит кинематическое (жесткое) нагружение. Когда задается программа изменения P_x в зависимости от P_y, нагружение является силовым (мягким).

Пусть, например, история нагружения задается в пространстве сил (рис. 3). Установим связь $d\varepsilon_x$ и $d\varepsilon_y$ с параметром нагружения α в соотношении $P_y = \alpha P_x$.

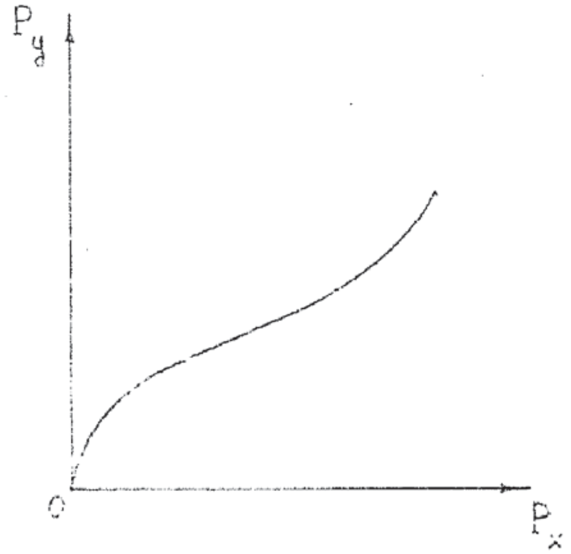

Рис. 3

На основании формулы (3)

$$\alpha = A_y V_{oy} \varepsilon_y^{n_y} l_x / \left(A_x V_{ox} \varepsilon_x^{n_x} l_y \right). \tag{7}$$

Кроме того, $l_i = l_{oi} \exp \varepsilon_i$. Поэтому (7) приводится к виду

$$\frac{\alpha \varepsilon_x^{n_x}}{\exp \varepsilon_x} = \frac{A_y F_{oy} \varepsilon_y^{n_y}}{A_x F_{ox} \exp \varepsilon_y},$$

откуда получаем искомое соотношение

$$\frac{\varepsilon_x^{n_x}}{\exp \varepsilon_x} \left(\frac{d\alpha}{d\varepsilon_x} + \alpha \frac{n_x - \varepsilon_x}{\varepsilon_x} \right) d\varepsilon_x = \frac{A_y F_{oy} \varepsilon_y^{n_y - 1} \left(n_y - \varepsilon_y \right)}{A_x F_{ox} \exp \varepsilon_y} d\varepsilon_y.$$

В частном случае простого нагружения $(\alpha = \mathrm{const})$

$$\frac{\alpha \varepsilon_x^{n_x - 1} \left(n_x - \varepsilon_x \right) d\varepsilon_x}{\exp \varepsilon_x} = \frac{A_y F_{oy} \varepsilon_y^{n_y - 1} \left(n_y - \varepsilon_y \right) d\varepsilon_y}{A_x F_{ox} \exp \varepsilon_y}.$$

Подстановка $d\varepsilon_x$ из этого соотношения в (6) приводит к условию глобальной неустойчивости квадруполя с учетом программы нагружения

$$\frac{\left(\exp \varepsilon_y \right)^2 \varepsilon_x^{n_x - 1} \left(n_x - \varepsilon_x \right)}{\left(\exp \varepsilon_x \right)^2 \varepsilon_y^{n_y - 1} \left(n_y - \varepsilon_y \right)} + \frac{A_y F_{oy} l_{ox}}{\alpha^2 A_x F_{ox} l_{oy}} = 0.$$

При обращении в нуль одной из двух разностей $n_x - \varepsilon_x$ или $n_y - \varepsilon_y$ происходит потеря устойчивости деформирования одного из двух элементов квадруполя. В свою очередь образующаяся в этот момент шейка приводит, вследствие нарушения однородности напряженно-деформированного состояния, через короткий промежуток деформирования к локальному разрушению. Таким образом, естественно взять за основу идущее в запас прочности предположение о том, что при $\varepsilon_x^* = n_x$ или $\varepsilon_y^* = n_y$ выходит из работы один из двух элементов квадруполя. Физически сказанное означает, что в энергетическом смысле система способна к догружению за счет несущей способности одного из двух оставшихся элементов, однако квадруполь продолжает воспринимать внешнее воздействие как диполь.

Представляет интерес изучение квадруполя при силах различных направлений (на рис. 2 P_y — сжимающая сила, $P_y > 0$). Здесь условие потери устойчивости пластического деформирования имеет вид $\alpha = \text{const}$)

$$\frac{\exp(\varepsilon_y)^2 \varepsilon_x^{n_x - 1}\left(n_x - \varepsilon_x\right)}{\exp(\varepsilon_x)^2 (-\varepsilon_y)^{n_y - 1}\left(n_y - \varepsilon_y\right)} + \frac{A_y F_{oy} l_{ox}}{\alpha^2 A_x F_{ox} l_{oy}} = 0.$$

В данном случае из-за $\varepsilon_y < 0$ глобальная неустойчивость невозможна, возможна только локальная неустойчивость при $\varepsilon_x^* = n_x$.

Состояние с $\alpha = 1$ можно назвать «чистым сдвигом». При «чистом сдвиге» одинаковы по величине и различны по направлению силы, а не напряжения как при чистом сдвиге в сопротивлении материалов.

В случае квадруполя, оба элемента которого работают на сжатие (на рис. 2 P_x и P_y — сжимающие силы, $P_x > 0$ и $P_y > 0$) условие неустойчивости имеет вид ($\alpha = \text{const}$)

$$\frac{\exp(\varepsilon_y)^2 \left(-\varepsilon_x\right)^{n_x - 1}\left(\varepsilon_x - n_x\right)}{\exp(\varepsilon_x)^2 \left(-\varepsilon_y\right)^{n_y - 1}\left(\varepsilon_y - n_y\right)} + \frac{A_y F_{oy} l_{0x}}{\alpha^2 A_x F_{ox} l_{0y}} = 0.$$

Поскольку здесь $\varepsilon_x < 0$ и $\varepsilon_y < 0$, то потеря пластической устойчивости материала невозможна.

Аналогом случая $\alpha = 1$ при сжимающих силах P_x и P_y в континуальной модели является равномерное двухосное сжатие, когда материал также всегда устойчив [7].

3. Пространственная система диполей (рис. 4). Критерий устойчивости $(i = x, y, z)$ $\sum dP_i du_i = 0$ может быть представлен в форме

$$A_x V_{ox} \varepsilon_x^{n_x - 1}\left(n_x - \varepsilon_x\right) d\varepsilon_x^2 + A_y V_{oy} \varepsilon_y^{n_y - 1}\left(n_y - \varepsilon_y\right) d\varepsilon_y^2 + A_z V_{oz} \varepsilon_z^{n_z - 1}\left(n_z - \varepsilon_z\right) d\varepsilon_z^2 = 0. \quad (8)$$

История нагружения в пространстве сил задается двумя параметрами $\alpha = P_y / P_x$ и $\beta = P_z / P_x$. Равенства

$$\frac{\alpha \varepsilon_x^{n_x}}{\exp \varepsilon_x} = \frac{A_y F_{oy} \varepsilon_y^{n_y}}{A_x F_{ox} \exp \varepsilon_y}, \quad \frac{\beta \varepsilon_x^{n_x}}{\exp \varepsilon_x} = \frac{A_z F_{oz} \varepsilon_z^{n_z}}{A_x F_{ox} \exp \varepsilon_z}$$

приводят в частном случае простого нагружения к выражениям для производных

$$\frac{d\varepsilon_y}{d\varepsilon_x} = \frac{\alpha A_x F_{ox} \varepsilon_x^{n_x - 1}\left(n_x - \varepsilon_x\right) \exp \varepsilon_y}{A_y F_{oy} \varepsilon_y^{n_y - 1}\left(n_y - \varepsilon_y\right) \exp \varepsilon_x},$$

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\varepsilon_x} = \frac{\beta A_x F_{ox} \varepsilon_x^{n_x - 1}(n_x - \varepsilon_x)\exp\varepsilon_z}{A_z F_{oz} \varepsilon_z^{n_z - 1}(n_z - \varepsilon_z)\exp\varepsilon_x}.$$

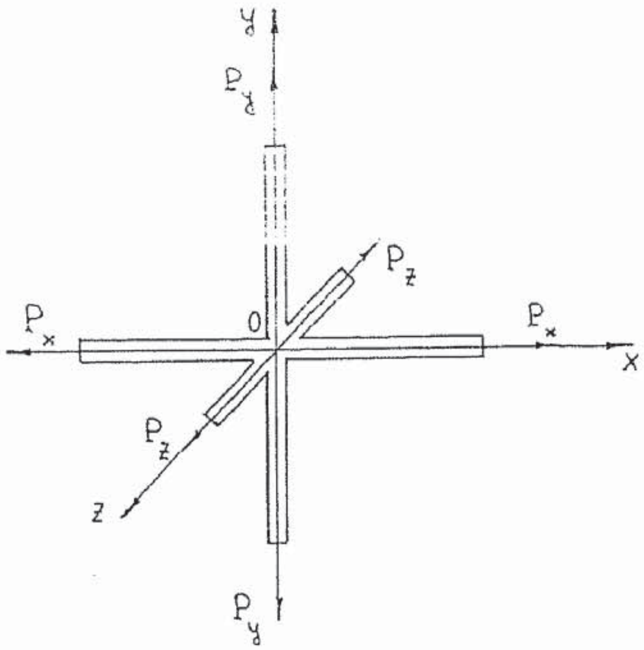

Рис. 4

В случае пространственной системы диполей так же, как и для квадруполя, следует различать понятия локальной и глобальной неустойчивости. Например, для пространственной системы условием глобальной неустойчивости является (8), а локальная неустойчивость реализуется в момент исчерпания несущей способности каждого из трех элементов при выполнении любого из трех равенств $\varepsilon_x^* = n_x$, $\varepsilon_y^* = n_y$, $\varepsilon_z^* = n_z$.

4. Однонаправленный материал. Однонаправленный материал, нагружаемый вдоль волокон, в частном случае двухэлементной модели изображен вверху на рис. 5. Условие глобальной неустойчивости $dP = 0$ имеет вид

$$\sum A_i F_{oi} \varepsilon^{n_i}(n_i - \varepsilon) = 0, \qquad (9)$$

где $\varepsilon = \ln(l/l_o)$ — деформация ансамбля волокон, одинаковая по всем волокнам; i — номер волокна.

Достижение равенства $\varepsilon^* = n_{\inf}$ означает выход из работы слабого звена. Затем, по мере увеличения деформации, волокна теряют последовательно устойчивость вплоть до достижения равенства $\varepsilon^* = n_{\sup}$, когда в момент $dP = 0$ наступает глобальная неустойчивость всей системы волокон.

Таким образом, если растягиваемый сплошной образец рассматривать на макроуровне как пучок продольных волокон, то шейкообразование оказывается процессом локализации, начинающимся в точке материала, где $n_i = n_{\inf}$. Положение указанной точки определяется статистической неоднородностью свойств материала. Заметим, что разброс коэффициентов A_i в уравнении состояния (1) не оказывает влияния на величины $\varepsilon_{\inf}^*$ и $\varepsilon_{\sup}^*$.

Сила, удерживаемая системой волокон, определяется по формуле

$$P = \frac{l_0}{l}\sum A_i F_{oi} \varepsilon^{n_i}.$$

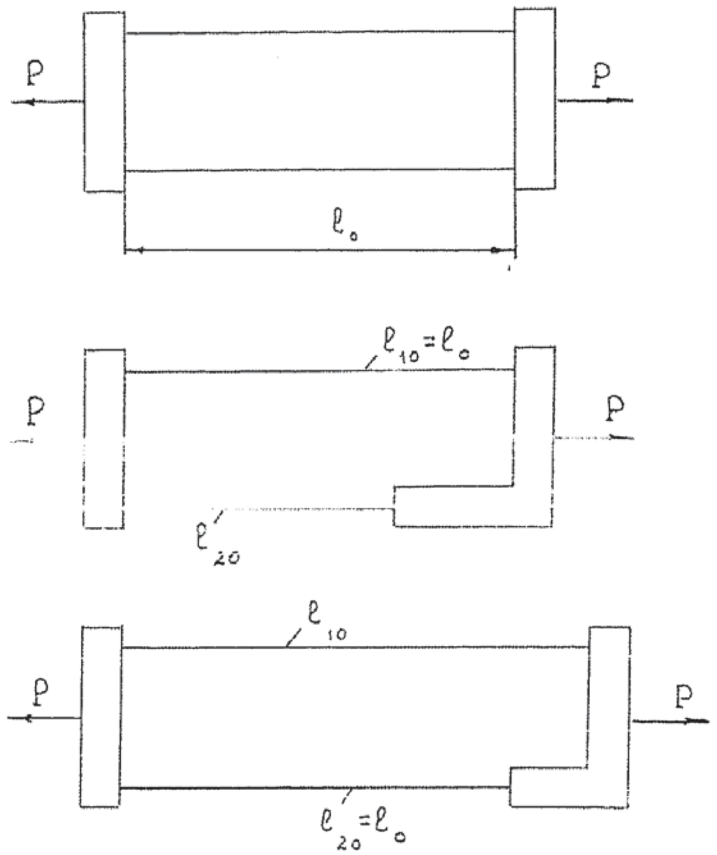

Рис. 5

Среднее напряжение в поперечном сечении однонаправленной модели

$$\langle\sigma\rangle = \frac{1}{\sum F_{oi}} \sum A_i F_{oi} \varepsilon^{n_i}.$$

Формула

$$\frac{1}{\sum F_{oi}} \sum A_i F_{oi} \varepsilon^{n_i} = A\varepsilon^{n}, \tag{10}$$

дает возможность определить постоянные континуальной модели материала.

Примерами многослойных композиций являются биметаллы, для которых формулы (9) и (10) позволяют объяснить экспериментальные данные [8].

Например, в случае двухэлементной модели при $F_{10} = F_{20} = F_0$; $A_1 = A_2 = A_0$; $n_1 = 0,2$; $n_2 = 0,6$ оказывается $\varepsilon^* = 0,36$. На рис. 6 при указанных параметрах кривая *1* представляет собой характеристику волокна с n_2, кривая *2* — аналогичная характеристика волокна с n_1, а кривая *3* построена для системы двух волокон (верхняя схема на рис. 5).

При анализе работы системы волокон необходимо учитывать, что характеристика 3 отражает реальную картину только до $\varepsilon^* = n_{\inf} = n_1$, т.е. до момента потери локальной устойчивости волокна с наименьшей пластичностью. В указанный момент в соответствии с предложенной в п. 2 схемой волокно с n_1 выходит из работы.

В результате усилие, выдерживаемое всей системой, падает до значения, которое в состоянии выдержать работоспособное волокно при данном уровне деформации $\varepsilon^* = 0,2$. Процесс деформирования сетки, в частности, двухэлементной модели, оказывается скачкообразным, квантованным и развивается по схеме, изображенной на рис. 7. Естественно, что реализация прерывистой диаграммы деформирования сетки возможна только в условиях жесткого нагружения.

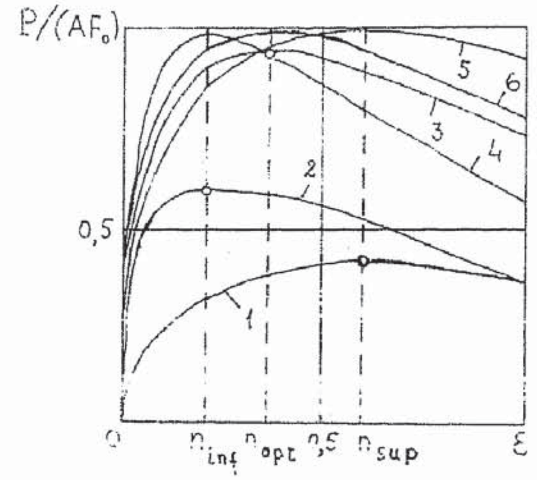

Рис. 6

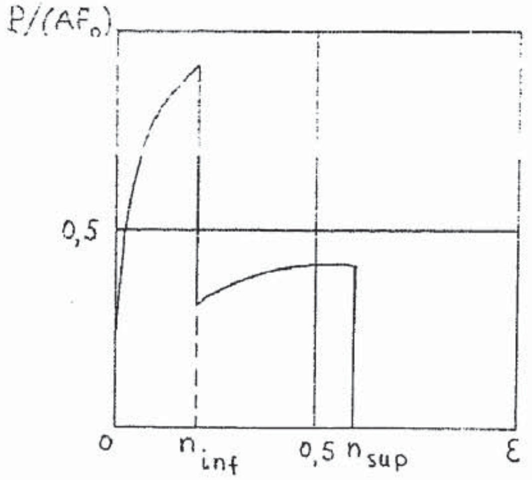

Рис. 7

Невозможность достижения в реальном процессе теоретической пластичности, в рассматриваемом примере $\varepsilon^* = 0,36$, приводит к постановке задачи оптимизации в механике сетчатых материалов.

Именно при проектировании формоизменения сетчатых материалов целесообразно исходить из принципа равной устойчивости, который может быть сформулирован следующим образом: реализация пластичности сетчатого материала возможна в наилучшей степени при сочетании параметров, соответствующем одновременному наступлению локальной и глобальной неустойчивости.

Например, в случае $n_1 = n_2 = n$ локальная и глобальная неустойчивости реализуются одновременно. В этом смысле одноосное растяжение сплошного стержня вплоть до образования шейки при $n = \text{const}$ по всему объему материала удовлетворяет требованию равной устойчивости.

В сетчатом материале при различных n_i обеспечение принципа равной устойчивости может достигаться за счет выбора соответствующих исходных размеров волокон.

Например, в случае двухэлементной модели (рис. 5) можно рассмотреть несколько проектов создания системы волокон.

Пример 1. Предположим, что в условиях предыдущей задачи длина одного волокна отличается от длины другого. Именно у волокна с $n_1 = 0,2$ $l_{10} = l_0$, а у волокна с $n_2 = 0,6$ $l_{20} < l_0$ (средняя расчетная схема на рис. 5). Условие глобальной устойчивости такой системы имеет вид

$$\frac{F_{10}l_{10}}{l_1} A_1 \varepsilon_1^{n_1-1}(n_1 - \varepsilon_1)d\varepsilon_1 + \frac{F_{20}l_{20}}{l_2} A_2 \varepsilon_2^{n_2-1}(n_2 - \varepsilon_2)d\varepsilon_2 = 0 .$$

При $A_1 = A_2 = A_0$, $F_{10} = F_{20} = F_0$ сила, удерживаемая системой определяется по формуле

$$P/(AF_0) = \varepsilon_1^{n_1} / \exp(\varepsilon_1 + \varepsilon_2^{n_2}) / \exp \varepsilon_2 .$$

Деформация второго волокна дается соотношением

$$\varepsilon_2 = \ln\left(\frac{l_0 \exp \varepsilon}{l_{20}} + 1 - \frac{l_0}{l_{20}}\right).$$

Выберем начальную длину второго волокна на основе принципа равной устойчивости, т.е. положим $\varepsilon_1^* = n_1$ и $\varepsilon_2^* = n_2$. Тогда получим $l_{20}/l_0 = (\exp n_1 - 1)/(\exp n_2 - 1) = 0,269$. На рис. 6 показан график (кривая *4*) зависимости силы от деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon = \ln(l/l_0)$, имеющий экстремум в точке $\varepsilon^* = n_{\text{inf}}$.

Вывод, который можно сделать по этому примеру, сводится к следующему. За счет уменьшения длины второго волокна сила, удерживаемая системой волокон, увеличилась на 10%, выигрыш в массе составил 37% при пластичности $\varepsilon^* = n_{\text{inf}} = 0,2$. Заметим, что в пластичности по средней схеме на рис. 5 по сравнению с верхней схемой потеря отсутствует, так как по верхней схеме при этом же значении ε^* происходит локальная потеря устойчивости одного из волокон, нарушающая работоспособность всей системы.

Пример 2. Оставим теперь исходную длину второго волокна равной l_0 (нижняя схема на рис. 5), а начальную длину первого волокна выберем с помощью принципа равной устойчивости. При этом оказывается $l_{10} = l_0(\exp n_2 - 1)/(\exp n_1 - 1) = 3,72 l_0$, проигрыш в массе по сравнению с верхней схемой на рис. 5 составляет 136%. Сила (кривая *5* на рис. 6) увеличилась так же, как и в предыдущем примере, на 10%, пластичность всей системы увеличилась до $\varepsilon^* = n_{\text{sup}} = 0,6$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что увеличение ресурса пластичности сетчатых материалов возможно за счет изменения длин волокон, но сопряжено со значительными затратами материала.

Пример 3. Подстроим теперь систему волокон по принципу равной устойчивости под выполнение равенств $\varepsilon_1^* = n_1$; $\varepsilon_2^* = n_2$; $\varepsilon^* = n_{\text{opt}}$, где

$$\varepsilon_1 = \ln\left[\frac{l_0 \exp(\varepsilon - 1)}{l_{10}} + 1\right]$$

$$\varepsilon_2 = \ln\left[\frac{l_0 \exp(\varepsilon - 1)}{l_{20}} + 1\right]$$

$n_{\text{opt}} = 0,36$ — значение деформации, являющееся оптимальным в том смысле, что при этом значении схема, изображенная вверху на рис. 5, теряет глобальную устойчивость.

Оказывается, что при значениях $l_{10}/l_0 = \exp(n_{\text{opt}}-1)/\exp(n_1-1) = 1{,}96$; $l_{20}/l_0 = \exp(n_{\text{opt}}-1)/\exp(n_2-1) = 0{,}527$ потеря в массе по сравнению с верхней расчетной схемой на рис. 5 составила 25%, сила (кривая *6* на рис. 6) снова увеличилась на 10%, но пластичность системы стала оптимальной в указанном выше смысле.

4. Ортогональный материал. Рассмотрим плоскую ортогональную сетку, нагружаемую растягивающими силами P_x и P_y вдоль волокон длиной l_x и l_y, соответственно.

Здесь

$$P_x = \frac{1}{l_x}\sum A_{ix}V_{oix}\varepsilon_x^{n_{ix}}\ ;\ \ P_y = \frac{1}{l_y}\sum A_{iy}V_{oiy}\varepsilon_y^{n_{iy}}\ ;\ du_x = l_x d\varepsilon_x;\ du_y = l_y d\varepsilon_y$$

и критерий устойчивости имеет вид

$$d\varepsilon_x^2\sum A_{ix}V_{oix}\varepsilon_x^{n_{ix}-1}(n_{ix}-\varepsilon_x) + d\varepsilon_y^2\sum A_{iy}V_{oiy}\varepsilon_y^{n_{iy}-1}(n_{iy}-\varepsilon_y) = 0\,. \quad (11)$$

При $\varepsilon_x^* = n_{ix}^{\inf}$ начинается выход из строя одного из волокон, ориентированных вдоль оси x. Аналогично равенство $\varepsilon_y^* = n_{iy}^{\inf}$ означает слабое звено в системе волокон, направленных вдоль y. При $\varepsilon_x^* = n_{ix}^{\sup}$ все волокна, направленные вдоль оси x, теряют устойчивость. Аналогично условие $\varepsilon_y^* = n_{iy}^{\sup}$ означает выход из работы всех волокон, ориентированных вдоль оси y.

Обобщение проведенного рассмотрения плоской сетки на трехмерный случай приводит к условию глобальной неустойчивости

$$d\varepsilon_x^2\sum A_{ix}V_{oix}\varepsilon_x^{n_{ix}-1}(n_{ix}-\varepsilon_x) + d\varepsilon_y^2\sum A_{iy}V_{oiy}\varepsilon_y^{n_{iy}-1}(n_{iy}-\varepsilon_y) + d\varepsilon_z^2\sum A_{iz}V_{oiz}\varepsilon_z^{n_{iz}-1}(n_{iz}-\varepsilon_z) = 0\,. \quad (12)$$

Особенностью работы пространственной системы является возможность, в зависимости от распределения n_x, n_y, n_z, разрыва волокон по плоскостям. В результате отслаивания материала по плоскостям, что характерно для конструктивно анизотропных сред, пространственная сетка может последовательно превратиться в плоскую, а затем в однонаправленную систему волокон.

Величина левой части критериев (11) и (12) в произвольный момент нагружения может служить мерой запаса устойчивости материала по Друкеру, а значения коэффициентов n_i можно рассматривать как квантовые уровни деформаций, определяющие несущую способность материала.

5. Несущая способность армированного материала. На рис. 8 показана расчетная схема листа, армированного волокнами в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

При равномерном распределении сил P_x и P_y вдоль кромок листа напряженное и деформированное состояние является однородным. В условиях двухстороннего приложения сил задача устойчивости волокна в матрице осложняется из-за неодноосного напряженного состояния, обусловленного поперечными напряжениями.

В дальнейшем будем приближенно считать, что волокна находятся в одноосном НС. Такое предположение оправдано при соизмеримых между собой силах P_x и P_y вследствие значительного превышения площади боковой поверхности волокна по сравнению с площадью его поперечного сечения.

Условие глобальной неустойчивости рассмотрим по критерию (5), где $P_x = \sigma_{mx}F_{mx} + \sigma_{fx}F_{fx}$; $P_y = \sigma_{my}F_{my} + \sigma_{fy}F_{fy}$; σ_{mx} и σ_{fx}, σ_{my} и σ_{fy} — напряжения в матрице и волокне в направлениях осей x и y соответственно; F_{mx} и F_{fx}, F_{my} и F_{fy} — площади поперечных сечений матрицы и волокна, ортогональные к осям x и y, соответственно.

Указанное условие с учетом несжимаемости материала может быть представлено в форме

$$V_{mo}\left(d\sigma_{mx}d\varepsilon_x + d\sigma_{my}d\varepsilon_y - \sigma_{mx}d\varepsilon_x^2 - \sigma_{my}d\varepsilon_y^2\right) + V_{fo}(d\sigma_{fx}d\varepsilon_x + d\sigma_{fy}d\varepsilon_y - \\ -\sigma_{fx}d\varepsilon_x^2 - \sigma_{fy}d\varepsilon_y^2) = 0, \tag{13}$$

где $V_{mo} = F_{mxo}l_{xo} = F_{myo}l_{yo}$ — объем матрицы; $V_{fo} = F_{fxo}l_{xo} = F_{fyo}l_{yo}$ — объем волокон, принимаемый без нарушения общности одинаковым в направлениях x и y.

Заметим, что в соотношении (13) первое слагаемое представляет собой вклад от матрицы [9], а второе — от волокна. Конфигурация критерия (13) соответствует схеме параллельного соединения элементов армированного материала, т. е. в рассматриваемом варианте несущая способность изучается по схеме тела Фойхта, когда деформации ε_x и ε_y принимаются одинаковыми для волокна и матрицы в направлениях осей x и y, соответственно.

Примем уравнение состояния матрицы в виде [5]

$$\sigma_e = A\left(\int \tilde{d}\varepsilon_e\right)^n, \tag{14}$$

где σ_e — эквивалентное напряжение, $\tilde{d}\varepsilon_e$ — эквивалентное приращение деформаций.

По уравнениям (13) и (14) получаем

$$V_{mo}\left[d\sigma_e\tilde{d}\varepsilon_e - \sigma_e\tilde{d}\varepsilon_e^2\frac{4\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+4}{4(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}}\right] + \\ +V_{fo}\left[A_{fx}\varepsilon_x^{n_{fx}-1}(n_{fx}-\varepsilon_x)d\varepsilon_x^2 + A_{fy}\varepsilon_y^{n_{fy}-1}(n_{fy}-\varepsilon_y)d\varepsilon_y^2\right] = 0, \tag{15}$$

где $\alpha = \sigma_{my}/\sigma_{mx}$ — коэффициент, характеризующий отношение напряжений в континуальной части.

Связь между деформациями при параллельном соединении волокна и матрицы может быть определена напряжениями в континуальной части армированного материала [9]

$$\begin{cases} d\varepsilon_x = \dfrac{(2-\alpha)\tilde{d}\varepsilon_e}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \\ d\varepsilon_y = \dfrac{(2\alpha-1)\tilde{d}\varepsilon_e}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \end{cases} \tag{16}$$

Поэтому условие (15) преобразуется к виду

$$V_{mo}\left[An\left(\int\tilde{d}\varepsilon_e\right)^{n-1} - A\left(\int\tilde{d}\varepsilon_e\right)^n\frac{4\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+4}{4\left(1-\alpha+\alpha^2\right)^{3/2}}\right] + \\ +V_{fo}\left[A_{fx}\varepsilon_x^{n_{fx}-1}\left(n_{fx}-\varepsilon_x\right)\frac{(2-\alpha)^2}{4\left(1-\alpha+\alpha^2\right)} + A_{fy}\varepsilon_y^{n_{fy}-1}\left(n_{fy}-\varepsilon_y\right)\frac{(2\alpha-1)^2}{4\left(1-\alpha+\alpha^2\right)}\right] = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \ln\left(l_x/l_{xo}\right) \\ \varepsilon_y = \ln\left(l_y/l_{yo}\right) \end{cases} \tag{18}$$

Соотношения (16) и (18) приводят к равенствам

$$\frac{l_x dl_y}{l_y dl_x} = \frac{2\alpha-1}{2-\alpha}, \tag{19}$$

$$\Gamma = \int \tilde{d}\varepsilon_e = \int_{l_{x0}}^{l_x} \frac{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{2-\alpha} \frac{dl_x}{l_x}.$$

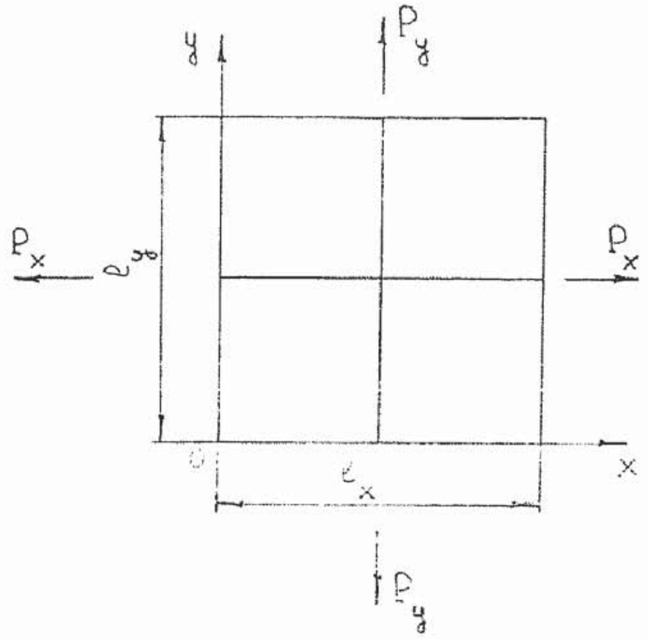

Рис. 8

Следовательно, для того, чтобы найти по критерию (17) Γ_* — критическое значение параметра Одквиста, необходимо знать три величины l_x, l_y и α, определяемые, в свою очередь, историей нагружения.

При наличии связи (19) два других дополнительных условия могут быть получены различными путями в зависимости от способа нагружения. При мягком способе нагружения два необходимых соотношения задаются уравнениями равновесия в направлениях осей x и y, соответственно. При жестком нагружении задаются скорости $v_x = dl_x / dt$ и $v_y = dl_y / dt$, где t — параметр нагружения.

Кроме критерия глобальной неустойчивости (17), границы несущей способности армированного материала определяются по критериям локальной неустойчивости матрицы: первое слагаемое в (17) — и глобальной неустойчивости сетчатого каркаса: второе слагаемое в (17), а также по критериям локальной неустойчивости волокон, сформулированным выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бунаков В. А., Протасов В. Д. Сетчатые композитные конструкции // Механика и научно-технический прогресс. Т. 4. Приложение механики к задачам технологии. — М.: Наука, 1988. — С. 273—286.
2. Prager W. Introduction to structural optimization. Udine: Springer – Verlag Wien – N. Y. — 1974. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций. — М.: Мир, 1977. — 109 с.
3. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники. — М.: Машиностроение, 1988. — 390 с.
4. Drucker D. C. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua //Докл. на 2-м Всесоюзн. съезде по теорет. и прикл. механике. — М., 29 января – 5 февраля 1964. = Друкер Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. Период.сб.переводов иностр.статей. 1964. — № 3. — С. 115—128.
5. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 398 с.
6. Романов К. И. К вопросу об исследовании устойчивости двухосного пластического растяжения // Известия вузов. Машиностроение. — 1979. — № 10. — С. 18—20.
7. Романов К. И. Устойчивость материала по Друкеру // ПММ. — 2001. — Т. 65. — Вып. 1. — С. 157—164.
8. Томенко Ю. С., Навроцкий И. В., Долженков Ф. Е. Деформация многослойных сталей при статическом растяжении // Известия АН СССР. Металлы. — 1970. — № 3. — С. 119—125.
9. Дель Г. Д. Технологическая механика. — М.: Машиностроение, 1978. — 174 с.