539.3

ВЫВОД ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ.

Канд. техн. наук А. Ж. СЕЙТМУРАТОВ

Предложены аналитические исследования в области динамики вязкоупругого трехмерного тела, ограниченного двумя цилиндрическими поверхностями. Получены общие уравнения продольно-радикальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки, из которых однозначно выводятся приближенные уравнения любого конечного порядка по производным.

Analytical researches in the field of dynamics of viscoelastic three-dimensional body restricted by two cylindrical surfaces are offered. The common equations of direct-radical oscillations in a circular cylindrical viscoelastic envelope from which the approximate equations of any final order on derivatives uniquely output are obtained.

Многие прикладные задачи о динамическом поведении оболочек решаются на основе приближенных уравнений колебания. В [1] проведено уточнение уравнений колебания вязкоупругих пластин и круглого стержня. Ниже выводятся общие уравнения продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки, из которых однозначно выводятся приближенные уравнения любого конечного порядка по производным, пригодные для решения прикладных задач.

В цилиндрической системе координат (r,θ,z) рассмотрим однородную изотропную вязкоупругую оболочку кругового поперечного сечения с внешним r_2 и внутренним r_1 радиусами. Ось z направим вдоль оси цилиндра. Цилиндрическую оболочку будем рассматривать как трехмерное вязкоупругое тело

Зависимости $\sigma-\varepsilon$ в точках слоя примем в виде [1]

$$\sigma_{jj}=L_1(\varepsilon)+2M\left(\varepsilon_{jj}\right);\quad \sigma_{ij}=M\left(\varepsilon_{ij}\right)\quad (i\neq j),$$

где $i,j=r,\theta,z$; L_1 и M – вязкоупругие операторы.

$$L_1(\zeta)=\lambda\left[\zeta(t)-\int_0^t f_1(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi\right];\ M(\zeta)=\mu\left[\zeta(t)-\int_0^t f_2(t-\xi)\zeta(\xi)d\xi\right];\ f_i(t)$$ — ядра операторов. Будем предполагать, что операторы L_1 и M обратимы.

При продольно-радиальных колебаниях искомые величины не зависят от угла θ и движение материальной оболочки как вязкоупругой среды описывается интегро-дифференциальными уравнениями

$$L(\Delta\Phi)=\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2};\quad M(\Delta\Psi)=\rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2};\quad L=L_1+2M, \tag{1}$$

где потенциалы Φ и Ψ введены по формуле [1]

$$\vec{U}=\mathrm{grad}\Phi+\mathrm{rot\,rot}\left(\vec{e}_z\Psi\right).$$

Продольно-радиальные колебания оболочки вызываются усилиями на ее внутренней и внешней поверхностях, т.е.

$$\sigma_{rr}=f_r^{(i)}(z,t);\quad \sigma_{rz}=f_{rz}^{(i)}(z,t)\quad \left(r=r_i,\ i=1.2\right). \tag{2}$$

Начальные условия нулевые.

Задачу (1) и (2) будем решать, применяя преобразование Фурье по координате z и Лапласа по времени, т.е. положим

$$\Phi = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(l)} \Phi_0 e^{pt} dp; \quad \Psi = \int_0^\infty \left. \begin{matrix} \cos kz \\ +\sin kz \end{matrix} \right\} dk \int_{(l)} \Psi_0 e^{pt} dp. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения Φ_0 и Ψ_0

$$\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi_0}{dr} - \alpha^2\Phi_0 = 0; \quad \frac{d^2\Psi_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_0}{dr} - \beta^2\Psi_0 = 0,$$

общие решения которых равны

$$\Phi_0(r) = A_1 I_0(dr) + A_2 K_0(\alpha r); \quad \Psi_0(r) = B_1 I_0(\beta r) + B_2 K_0(\beta r), \tag{4}$$

где $\alpha^2 = k^2 + \rho p^2 L_0^{-1}$; $\beta^2 = k^2 + \rho p^2 M_0^{-1}$; $L_0^{-1} = \dfrac{1}{(\lambda + 2\mu)\left[1 - f_0(p)\right]}$;

$$M_0^{-1} = \frac{1}{\mu\left[1 - f_{20}(p)\right]}; \quad f_0(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt; \quad f_{20}(p) = \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt;$$

$$f(t) = \alpha_0 f_1(t) + 2\beta_0 f_2(t); \quad \alpha_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}; \quad \beta_0 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Представляя перемещения U_R, U_Z также в виде (3) и используя решения (4), для преобразованных величин перемещений $U_R^{(0)}, U_Z^{(0)}$ будем иметь

$$\begin{aligned} U_r^{(0)} &= \alpha\left[I_1(\alpha r)A_1 - K_1(\alpha r)A_2\right] - k\beta\left[I_1(\beta r)B_1 - K_1(\beta r)B_2\right]; \\ U_z^{(0)} &= k\left[I_0(\alpha r)A_1 + K_0(\alpha r)A_2\right] - \beta^2\left[I_0(\beta r)B_1 + K_0(\beta r)B_2\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Разложим в ряды по координате r выражения (5)

$$\begin{aligned} U_r^{(0)} = \sum_{n=0}^\infty \Bigg\{ & \alpha^{2n+2}\left[A_1 - A_2\left[\ln\frac{\alpha r}{2} - \frac{1}{2}\psi(n+1) - \frac{1}{2}\psi(n+2)\right]\right] - \\ & - k\beta^{2n+2}\left[B_1 - B_2\left[\ln\frac{\beta r}{2} - \frac{1}{2}\psi(n+1) - \frac{1}{2}\psi(n+2)\right]\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{kB_2 - A_2}{r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_z^{(0)} = \sum_{n=0}^\infty \Bigg\{ & k\alpha^{2n}\left[A_1 - A_2\left[\ln\frac{dr}{2} - \psi(n+1)\right]\right] - \\ & - \beta^{2n}\left[B_1 - B_2\left[\ln\frac{\beta r}{2} - \psi(n+1)\right]\right]\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

При классическом исследовании колебания цилиндрической оболочки за искомые величины принимаются смещения точек срединной поверхности оболочки. Однако такой выбор не единственный. Например, рассматривая толстостенную оболочку, необходимо выбирать такую поверхность, которая для стержня переходит в осевую линию, а для тонких оболочек — в поверхность, близкую к срединной. С другой стороны, в исследованиях получают информацию о смещении внешней или внутренней поверхностях оболочки, по которым необходимо определить напряженно-деформированное состояние самой оболочки.

В связи со сказанным выше примем за искомые величины перемещения и деформации в точках поверхности цилиндрической оболочки, определяемые так

$$r=\xi_0,\quad \xi_0=\frac{r_1}{2}\left(v_0-\frac{r_1}{r_2}\right),\quad 2+\frac{r_1}{r_2}\le v_0\le 2\frac{r_2}{r_1}+\frac{r_1}{r_2}\ . \tag{7}$$

Рассмотрим главные части преобразованных перемещений (6) при $r=\xi_0$, которые равны первым слагаемым в рядах (6), т.е.

$$\begin{aligned} &U_{r,0}^{(0)}=\alpha^2A_{10}-k\beta^2B_{10};\quad \xi_0^2U_{r,1}^{(0)}=A_2-kB_2;\\ &U_{z,0}^{(0)}=kA_{10}-\beta^2B_{10};\quad \xi_0^2U_{z,1}^{(0)}=kA_2-\beta^2B_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $[A_{10},B_{10}]=[A_1,B_1]-[A_2,B_2]\left[\ln\frac{(\alpha\beta)\xi_0}{2}-\psi(1)-\frac{1}{2}\right]$; Ψ – логарифмическая производная и гамма-функция [2, 3]. Исходя из размерностей величин (8), входящих в (6), нетрудно видеть, что величина $U_{z,0}^{(0)}$ описывает перемещение, а $U_{r,0}^{(0)},\xi_0U_{r,1}^{(0)},\xi_0U_{z,1}^{(0)}$ – безразмерные величины (преобразованные по Фурье и Лапласу).

Выражения (6) через (8) запишутся в виде

$$\begin{aligned} U_r^{(0)}=&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\beta^{2n}U_{r,0}^{(0)}+\alpha^2q_1^{(0)}Q_n^{(0)}\left[U_{r,0}^{(0)}-kU_{z,0}^{(0)}\right]\right\}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}-\frac{\xi_0^2}{r}U_{r,1}^{(0)}-\\ &-\sum_{n=0}^{\infty}\xi_0\eta_{1,n}^{(r)}\left\{\beta^{2n+2}\xi_0U_{r,1}^{(0)}+q_2^{(0)}Q_{n+1}^{(0)}\left[\beta^2\xi_0U_{r,1}^{(0)}-kU_{z,1}^{(0)}\right]\right\}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!};\\ U_z^{(0)}=&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\alpha^{2n}U_{z,0}^{(0)}+q_2^{(0)}Q_n^{(0)}\left[kU_{r,0}^{(0)}-\alpha^2U_{z,0}^{(0)}\right]\right\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}-\\ &-\sum_{n=0}^{\infty}\xi_0\eta_{2,n}(r)\left\{\alpha^{2n}U_{z,1}^{(0)}+\beta^2q_2^{(0)}Q_{n-1}^{(0)}\left[k\xi_0U_{r,1}^{(0)}-U_{z,1}^{(0)}\right]\right\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}; \end{aligned} \tag{9}$$

где $\eta_{1,n}(r)=\ln\frac{r}{\xi_0}+\frac{n}{2(n+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k};\quad \eta_{2,n}(r)=\eta_{1,n}(r)+\frac{1}{2(n+1)};$

$$q_1^{(0)}=1-L_0M_0^{-1};\quad q_2^{(0)}=M_0L_0^{-1}-1;$$

$$Q_n^{(0)}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{2(n-k-1)}\beta^{2k};\quad Q_0^{(0)}=0;\quad Q_1^{(0)}=1.$$

Таким образом, (9) дает представление преобразованных величин перемещений через главные части (8). Для определения этих главных частей имеем граничные условия (2). Подставляя (9) в левые части граничных условий (2), после применения к ним преобразований Фурье по координате z и Лапласа по времени получаем систему алгебраических уравнений относительно $U_{r,0}^{(0)},U_{z,0}^{(0)},U_{r,1}^{(0)},U_{z,1}^{(0)}$.

Приняв за основные искомые величины $U_{r,0}^{(0)}$ и $U_{z,0}^{(0)}$, исключив из полученной алгебраической системы $U_{r,1}^{(0)},U_{z,1}^{(0)}$ и обратив полученные выражения по k и p, получим систему уравнений для определения искомых $U_{r,0}^{(0)},U_{z,0}^{(0)}$

$$\begin{aligned} &x_{11}U_{r,0}+x_{21}U_{z,0}=M^{-1}\left[\Delta_0f_{rz}^{(1)}+\overline{\Delta}_1f_r^{(2)}-\overline{\Delta}_2f_r^{(1)}\right];\\ &x_{12}U_{r,0}+x_{22}U_{z,0}=M^{-1}\left[\Delta_0f_{rz}^{(2)}+\overline{\Delta}_3f_r^{(2)}-\overline{\Delta}_4f_r^{(1)}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

При этом функции и определяются с требуемой точностью при решении конкретных задач из следующих формул:

$$U_{z,1} = -\Delta_0^{-1}\left\{M^{-1}\left[d_{31}f_r^{(2)} - d_{32}f_r^{(1)}\right] + \Delta_1 U_{r,0} + \Delta_2 U_{z,0}\right\};$$
$$U_{r,1} = -\Delta_0^{-1}\left\{M^{-1}\left[d_{42}f_r^{(1)} - d_{41}f_r^{(2)}\right] + \Delta_3 U_{r,0} + \Delta_4 U_{z,0}\right\}; \qquad (11)$$

где $x_{1i} = e_{1i}\Delta_0 + e_{3i}\Delta_3 + e_{4i}\Delta_1;$ $\quad x_{2i} = e_{2i}\Delta_0 + e_{3i}\Delta_4 + e_{4i}\Delta_2$ $\quad (i = 1, 2);$

$$\Delta_0 = d_{31}d_{42} - d_{32}d_{41}; \quad \Delta_1 = d_{12}d_{31} - d_{11}d_{32}; \quad \Delta_2 = d_{21}d_{32} - d_{22}d_{31};$$
$$\Delta_3 = d_{12}d_{41} - d_{11}d_{42}; \quad \Delta_4 = d_{21}d_{42} - d_{22}d_{41}; \quad \overline{\Delta}_1 = e_{31}d_{41} - e_{41}d_{31};$$
$$\overline{\Delta}_2 = e_{31}d_{42} - e_{41}d_{32}; \quad \overline{\Delta}_3 = e_{32}d_{41} - e_{42}d_{31}; \quad \overline{\Delta}_4 = e_{32}d_{42} - e_{42}d_{32};$$

$$d_{1i} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[n(1-q_1) - q_1\right]\lambda_2^n - \left[\lambda_1 - (n+1)\left(\lambda_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]q_1 Q_n\right\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{n!(n+1)!};$$

$$d_{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(1+q_1)(n+1)\frac{\partial}{\partial z}\lambda_2^n + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_1 - (n+1)\left(\lambda_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]q_1 Q_n\right\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{n!(n+1)!}$$

$$d_{3i} = -2\frac{\xi_0^2}{r_i^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\xi_0^2\lambda_2\left\{\eta_{2,n}(r_i)\left[\lambda_2^n + \left(\lambda_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)q_2 Q_n\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\eta_{1,n}(r_i)}{n+1}\left(\lambda_2 + q_2 Q_{n+1}\right)\right\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2};$$

$$d_{4i} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\eta_{2,n}(r_i)\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_2^n - \left(\lambda_2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)q_2 Q_n\right] + \frac{\eta_{1,n}(r_i)}{n+1}\frac{\partial}{\partial z}q_2 Q_{n+1}\right\}\xi_0\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}; \qquad (12)$$

$$e_{1i} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_2^n + q_1(Q_{n+1} + \lambda_1 Q_n)\right]\frac{(r_i/2)^{2n-1}}{n!(n+1)!};$$

$$e_{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_1\left\{(1-q_1)\lambda_2^n + 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}q_1 Q_n\right\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{n!(n+1)!};$$

$$e_{3i} = \sum_{n=0}^{\infty}\xi_0^2\eta_{1,n}(r_i)\frac{\partial}{\partial z}\eta_{2,n}(r_i)\left[\lambda_2^{n+1} + 2q_2\lambda_2 Q_{n+1}\right]\frac{(r_i/2)^{2n-1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi_0}{r_i}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$e_{4i} = \sum_{n=0}^{\infty}\xi_0\eta_{1,n}(r_i)\left[\lambda_2^{n+1} + 2q_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}Q_{n+1}\right]\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} + \frac{\xi_0}{r_i};$$

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_1^{n-k-1}\lambda_2^k;$$

$$q_1 = 1 - LM^{-1}; \qquad q_1 = -1 + ML^{-1};$$

$$\lambda_1^n = \left[\rho L^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n; \qquad \lambda_2^n = \left[\rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n \qquad (i = 1, 2).$$

Уравнения (10) являются общими уравнениями продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки, содержащими производные любого порядка по z и t. Эти уравнения в правой части явно учитывают внешние усилия, приложенные к поверхностям $r = r_i$ $(i = 1, 2)$, а также комбинации вязкоупругих операторов L и M. При $L = \lambda + 2\mu$; $M = \mu$ из (10) следуют уравнения для упругой оболочки. Кроме того, для разных значений постоянной v_0 из (10) можно получить уравнения для главных частей перемещений желаемой поверхности оболочки. Например, при $v_0 = 2\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}$ имеем уравнения относительно главных частей перемещений внешней поверхности оболочки. При $r_1 = 0$ из (10) получается уравнение продольных колебаний вязкоупругого круглого стержня, описывающее смещения точек оси стержня [4].

СПИКОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов И. Г. Уточнение уравнений колебания вязкоупругих пластин и стержней // Прикл. механика. — 1986. — 22, № 2. — С. 71—78.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. — Киев:
3. Костин В. И., Филиппов И. Г. Математическое моделирование вязкоупругих стержневых элементов строительных конструкций. — Деп. в ВНИИИС 14.05.86;
4. Филиппов И. Г., Егорычев О. А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. — М.: Машиностроение, 1983. — 270 с.

621.852

ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНКИ ТЯГОВОЙ СПОСОБНОСТИ КЛИНОРЕМЕННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Д-р техн наук В.К. МАРТЫНОВ, инж. И.Н. СЕМИН

Рассматриваются особенности оценки тяговой способности клиноременной передачи, свойственные работе в ней клинового ремня как гибкого стержня, а не нити, как это принято в классической теории. Приведен анализ вызываемых нагружением клиноременной передачи сопутствующих эффектов, характерных для ее поведения при различном конструктивном исполнении.

In the article was considered a features of traction ability of V-belt drive, when V-belt working as a flexible core, instead of a non-stretched string accepted in the classical theory. The analysis was carrying out with taking of attendant effects, typical for V-belt drive behaviour is resulted at a various design.

В отечественной литературе тяговую способность клиноременной передачи оценивают по экспериментальным кривым скольжения в координатах $\xi = f(\psi)$, где ξ — относительное падение частоты вращения ведомого шкива под нагрузкой или скольжение передачи; ψ — коэффициент тяги или отношение окружной силы к суммарному натяжению ветвей. Кривая скольжения дополняется зависимостью к.п.д. передачи от изменения ψ [1—3]. Экспериментальная установка для снятия кривых скольжения, как правило, выполняется в виде двухшкивной передачи со шкивами одного диаметра, т.е. передаточным отношением $i_0 = 1$, причем узел одного из шкивов является подвижным и на него воздействует постоянная межосевая сила F_a, создающая натяжение ремню. Сам ремень при анализе кривых