

Расчет и конструирование машин

УДК 534.1

Особенность поведения частот колебаний неконсервативной системы с парным взаимодействием степеней свободы

А.Ф. Георгиев, С.В. Аринчев

Показано, что для неконсервативных систем на штатных режимах работы, вдали от границ неустойчивости теоремы, сформулированные для консервативных систем, могут не выполняться. Необходимо проводить более глубокие исследования этих систем. Показано, что в неконсервативной системе при увеличении массы частота колебаний растет, а при уменьшении жесткости — уменьшается.

Ключевые слова: неконсервативная система, собственная частота, колебания, масса, жесткость.

It is shown that the theorems formulated for conservative systems couldn't hold true for nonconservative systems under standard operating conditions far from the boundaries of instability. It is necessary to carry out a more profound research of these systems. It is demonstrated that in a nonconservative system the natural frequency of the system is growing when the mass increases and it is decreasing when the stiffness reduces.

Keywords: nonconservative system, natural frequency, oscillation, mass, stiffness.



**Георгиев
Александр Федорович**
соискатель,
технический эксперт
(ООО «ЭМ-ЭС-СИ
Софтвэр РУС»)



**Аринчев
Сергей Васильевич**
доктор технических наук,
профессор кафедры
«Аэрокосмические
системы»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Введение

В настоящей работе рассматриваются неконсервативные системы с парным взаимодействием степеней свободы, т. е. нагрузка, пропорциональная второй обобщенной координате, совершает работу на вариациях первой; и наоборот: нагрузка, зависящая от первой обобщенной координаты и совершающая работу на второй, отсутствует. Таким образом, нагрузка имеет «однонаправленный» характер. Простейшая неконсервативная система с парным взаимодействием степеней свободы предложена в работах [2, 6] и представлена на рис. 1. Здесь ко второму грузу приложена сила F_2 , зависящая от смещения первого груза y_1 ; k — параметр неконсервативного нагружения. Данная простейшая модель может быть использована для предварительного анализа аэроупругих колебаний летательных аппаратов, продольных колебаний жидкостной ракеты, колебаний управляемой упругой конструкции и т. д.

В настоящей статье простейшая модель используется для иллюстрации нарушения известной осцилляционной теоремы, сформулированной Ф.Р. Гантмахером и М.Г. Крейн, и неприменимости теоремы Дж.В. Рэлея для прогнозирования изменения частоты колебаний системы при вариации масс и жесткостей.

Теорема об узлах форм колебаний (Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн [1]):

У собственного вектора размерности n , отвечающего наименьшей частоте, все координаты отличны от нуля и одного знака; у второго соб-

ственного вектора в ряду координат имеется одна переменна знака, и вообще в ряду координат k -го собственного вектора имеется ровно $k - 1$ перемен знака, $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорема Дж.В. Рэлея о влиянии на частоты изменений масс и жесткостей системы (Дж.В. Рэлея [3, § 88]):

Если жесткость системы увеличивается без изменения кинетической энергии, то частоты колебаний системы увеличиваются или, по крайней мере, не уменьшаются; если масса системы увеличивается без изменения потенциальной энергии, то частоты колебаний системы убывают или, по крайней мере, не возрастают.

Нарушение теоремы об узлах форм колебаний

Отметим, что при $k = 0$ система является консервативной. При небольших k система неконсервативна, но остается осцилляционной (выполняются все основные осцилляционные теоремы). Ниже на простейшей модели показано, что с увеличением k неконсервативная система перестает быть осцилляционной и имеет место нарушение теоремы об узлах форм колебаний. Нарушение теоремы никак не связано с потерей динамической или статической устойчивости, оно имеет место не на границе, а внутри области устойчивости на штатных режимах движения летательного аппарата.

Уравнения малых колебаний без демпфирования простейшей неконсервативной модели

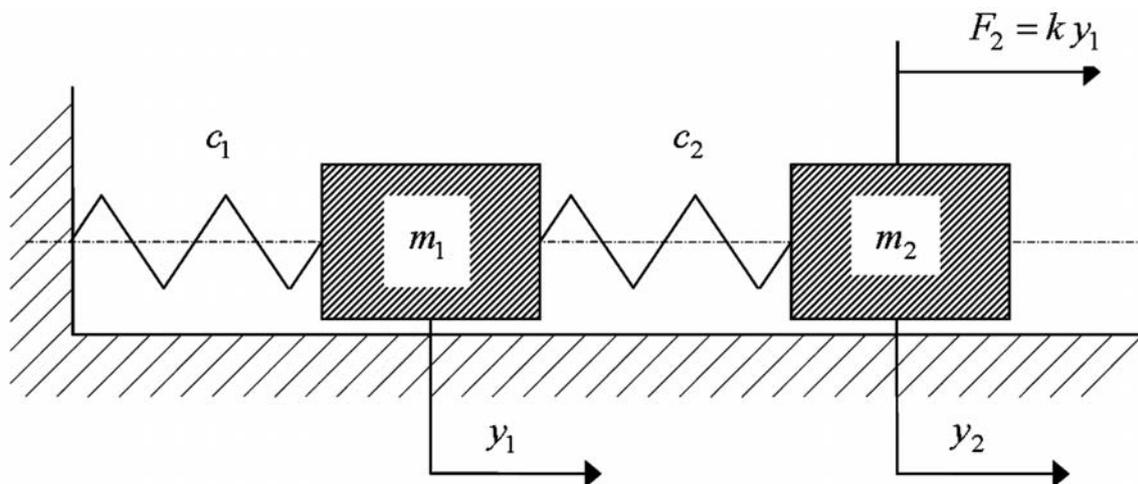


Рис. 1. Простейшая неконсервативная динамическая система с парным взаимодействием степеней свободы

с парным взаимодействием степеней свободы (рис. 1) имеют вид:

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{y}_1 - c_1 y_1 + c_2 (y_2 - y_1) = 0, \\ -m_2 \ddot{y}_2 + k y_1 - c_2 (y_2 - y_1) = 0. \end{cases}$$

Для параметров системы зададим конкретные числовые значения. Это не снижает общности иллюстрации, но упрощает анализ и делает его более наглядным.

Положим, масса первого груза $m_1 = 1$ кг, масса второго груза $m_2 = 5$ кг, жесткость первого упругого элемента $c_1 = 500$ Н/м, жесткость второго упругого элемента $c_2 = 500$ Н/м. Частотное матричное уравнение системы примет вид:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - 1000 & 500 \\ 500 + k & 5\omega^2 - 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Обнуляя определитель частотной матрицы, получаем характеристическое алгебраическое уравнение вида:

$$\lambda^2 - 1100\lambda - 100k + 50\,000 = 0, \text{ где } \lambda = \omega^2.$$

Корни характеристического уравнения равны:

$$\lambda_{1,2} = 550 \pm 10\sqrt{D}, \text{ где } D = 2525 + k \text{ — дискриминант уравнения.}$$

Система становится неустойчивой, если:

- 1) $D < 0$ (флаттер);
- 2) $\lambda_i \leq 0$ (дивергенция), где λ_i — i -й корень характеристического уравнения (i -е собственное значение).

Таким образом, диапазон устойчивых значений параметра неконсервативного нагружения k — это интервал $(-2525; 500)$. График значений частот обоих тонов представлен на рис. 2. Видно, что при $k = -2525$ частота становится кратной (флаттер), а при $k = 500$ частота низшего тона обнуляется (дивергенция). Данный результат иллюстрирует границы устойчивости системы и является вспомогательным.

Зависимость элементов векторов форм колебаний от параметра неконсервативного нагружения k представлена на рис. 3. Нормировка формы колебаний: $y_2^{1,2} = 1$. Формы колебаний системы в устойчивом интервале значений параметра неконсервативного нагружения — действительные (рис. 3), соответственно грузы могут двигаться либо в фазе, либо в противофазе. При значениях $k > -500$ грузы колеблются в противофазе по второму тону, что соответствует одной смене знака элементов собственного вектора второго тона (см. теорему Ф.Р. Гантмахера и М.Г. Крейна). На границе устойчивости формы собственных колебаний становятся крат-

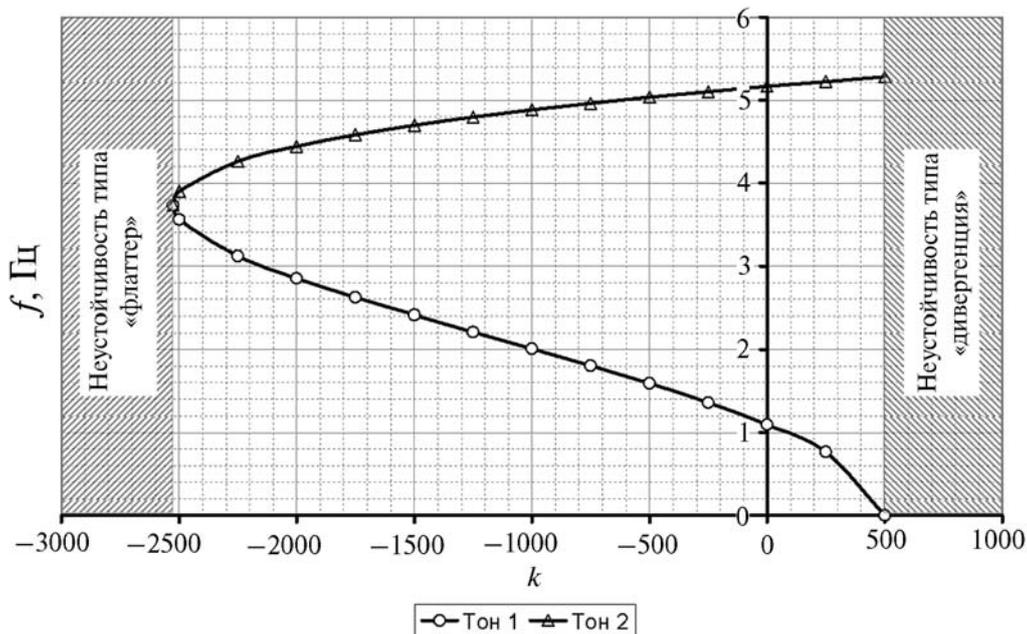


Рис. 2. Зависимость собственных значений простейшей модели от параметра неконсервативного нагружения k

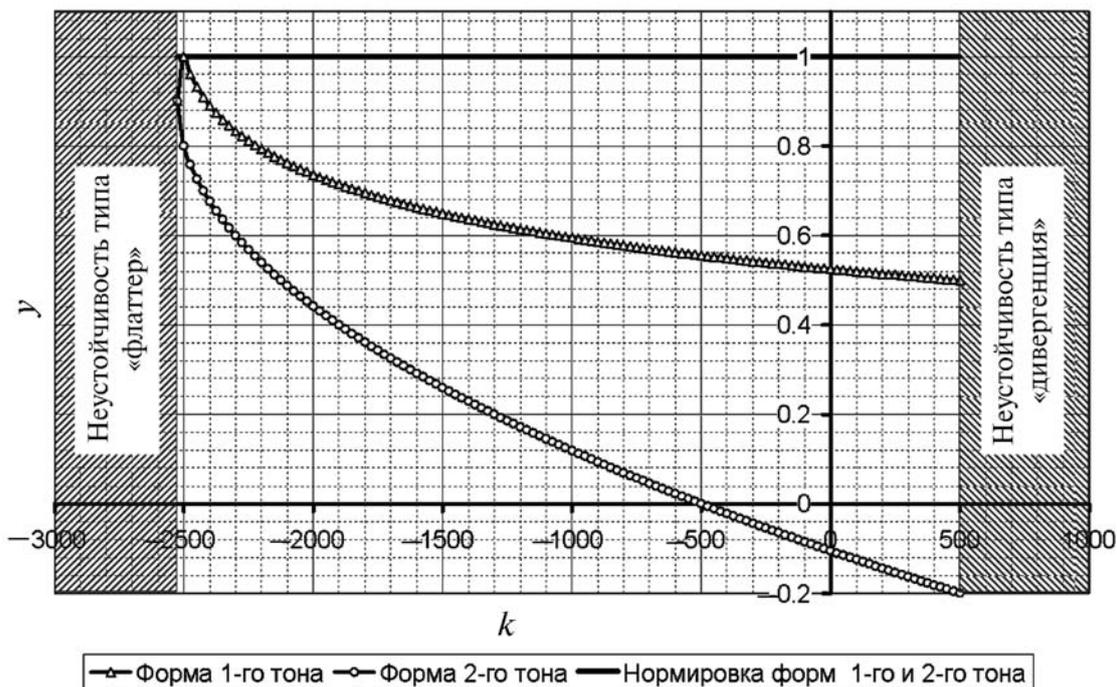


Рис. 3. Зависимость элементов векторов форм колебаний от параметра неконсервативного нагружения k

ными. Отметим, что вдали от границ устойчивости (при значениях $k < -500$) при колебаниях по второму тону грузы совершают синфазное движение, что противоречит теореме об узлах форм колебаний.

Таким образом, точка $k = -500$ является особой, так как в ее окрестности происходит нарушение теоремы об узлах форм колебаний. Подчеркнем важную особенность: нарушение происходит внутри области устойчивости вдали от ее границ.

Для анализа применимости теоремы Дж.В. Рэлея при вариации масс и жесткостей проведем исследование чувствительности собственных значений к вариациям масс и жесткостей системы в интервале устойчивых значений и в окрестности особой точки $k = -500$.

Особенности поведения частоты колебаний системы при изменении масс и жесткостей системы

Рассмотрим чувствительность собственных значений (квадратов частот колебаний) к вариациям α значений внешней жесткости c_1 . Будем считать значение жесткости равным $c_1(1 + \alpha)$. Найдем производные $\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$. Тради-

ционное допущение, принимаемое при анализе чувствительности [3] неконсервативных динамических систем, заключается в том, что система предполагается находящейся на границе устойчивости до вариации параметра при его номинальном значении. Кроме того, считают, что система продолжает оставаться на границе устойчивости после вариации параметра.

В данной работе рассматривается другой подход. Предположим, что параметр неконсервативного нагружения фиксирован, он не зависит от α .

В рассматриваемой простейшей системе коэффициенты чувствительности собственных значений можно получить аналитически для ранее выбранных исходных данных. Это не нарушает общности задачи, но делает ее обсуждение более наглядным.

Частотное матричное уравнение системы в данном случае имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - 1000 - \alpha & 500 \\ 500 + k & 5\omega^2 - 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Обнуляя определитель частотной матрицы, получаем корни характеристического квадратного алгебраического уравнения:

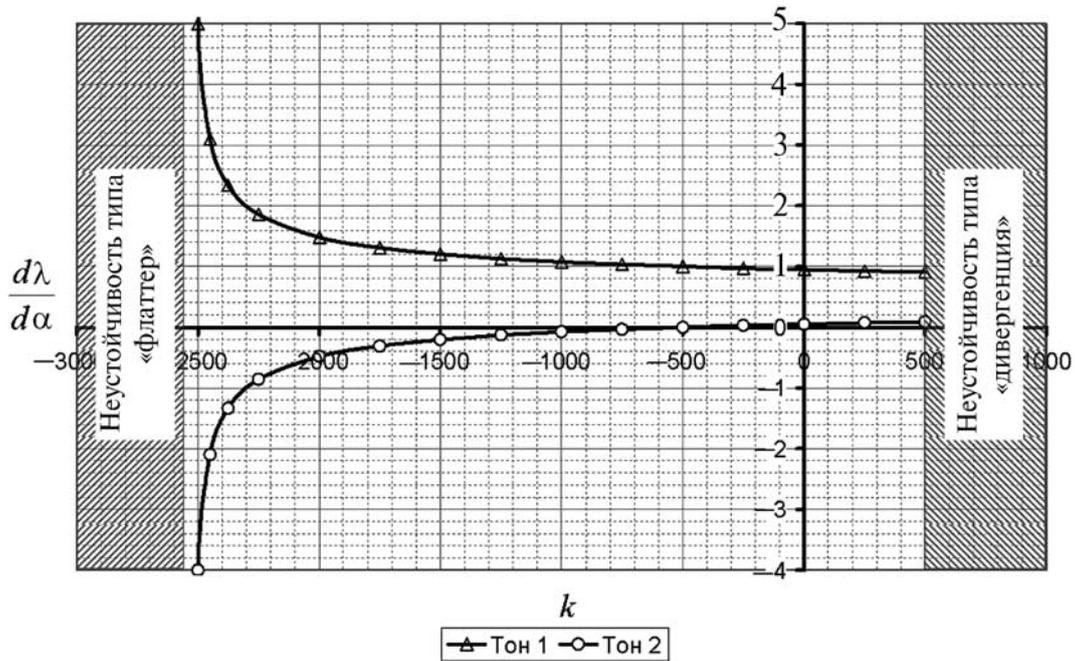


Рис. 4. Зависимость коэффициентов чувствительности собственных значений к изменению жесткости первого упругого элемента от параметра неконсервативного нагружения k

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} (1100 + \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 1800\alpha + 1010000 + 400k}).$$

После дифференцирования получим:

$$\left. \frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{900}{\sqrt{1010000 + 400k}} \right).$$

Из данного уравнения нетрудно видеть, что при $k = -500$ собственные значения первого тона системы, а следовательно, и частота первого тона перестает быть чувствительной к вариации значений жесткости первого упругого элемента. Необходимо отметить, что точка $k = -500$ достаточно удалена от границ неустойчивости системы (рис. 4).

Несложно показать, что при значениях параметра неконсервативного нагружения больше -500 при исследовании влияния изменения жесткости первого упругого элемента на частоты колебаний можно будет руководствоваться теоремой Дж.В. Рэлея (рис. 4). Ввиду громоздкости выкладок в данной статье эти доказательства не приводятся.

Несложно показать также что система ведет себя аналогичным образом и при изменении массы первого груза (рис. 5).

Используя результаты анализа форм собственных колебаний, выберем точку $k = -1000$, достаточно удаленную от границ неустойчивости системы, в которой проведем исследование чувствительности частоты первого тона к вариации β жесткости первого упругого элемента и вариации β массы первого груза. Отметим, что значения жесткости будут задаваться в виде $c_1(1 + \alpha)$, а значение массы — в виде $m_1(1 + \beta)$. Значения параметров α и β будут изменяться в диапазоне значений $[-0,5; 0,5]$.

На рис. 6 кривая *A* отражает уменьшение частоты при снижении жесткости первого упругого элемента, а кривая *B* — рост частоты при увеличении массы первого груза.

Анализируя результаты, представленные на рис. 6, можно сделать вывод, что если имеет место смена знака производной собственных значений, то частота первого тона при увеличении массы первого груза растет, а при уменьшении — падает; и наоборот: при увеличении жесткости первого упругого элемента частота падает, а при уменьшении — растет. Данный факт противоречит теореме о влиянии на частоты изменений масс и жесткостей системы. Вследствие этого теорема, сформулированная Дж.В. Рэлеем для консервативных систем,

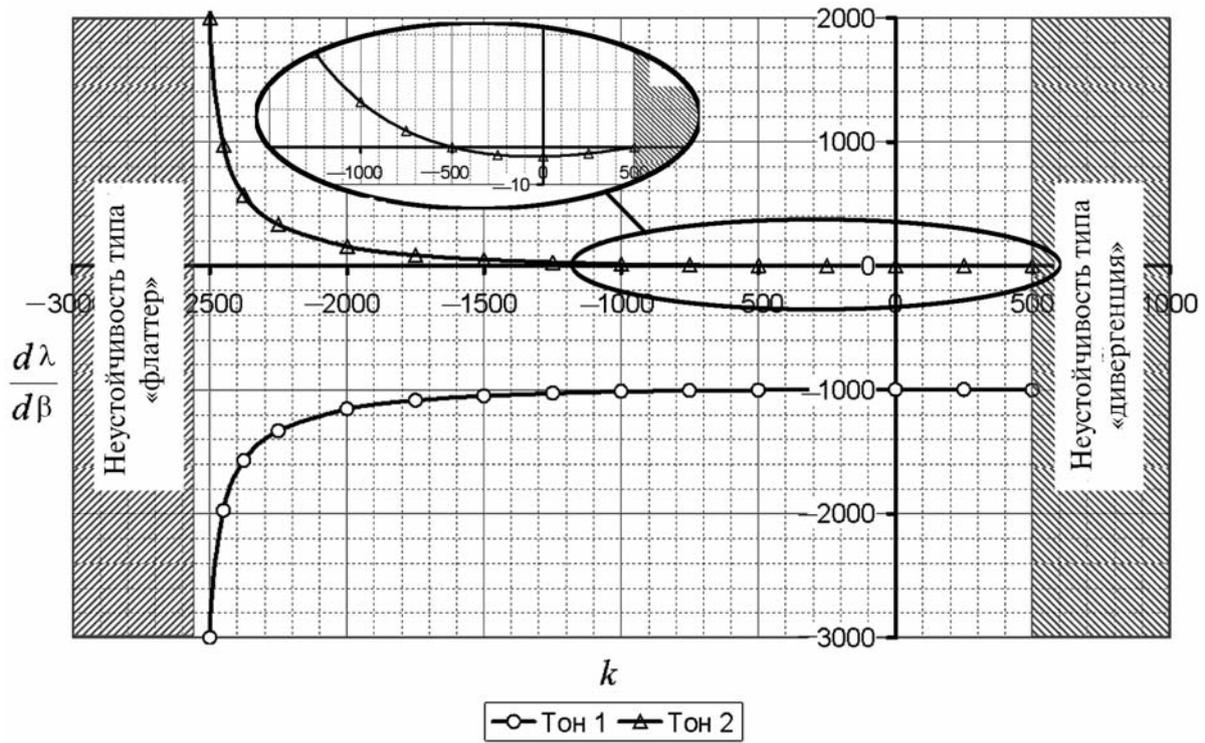


Рис. 5. Зависимость коэффициентов чувствительности собственных значений к изменению массы первого груза от параметра неконсервативного нагружения k

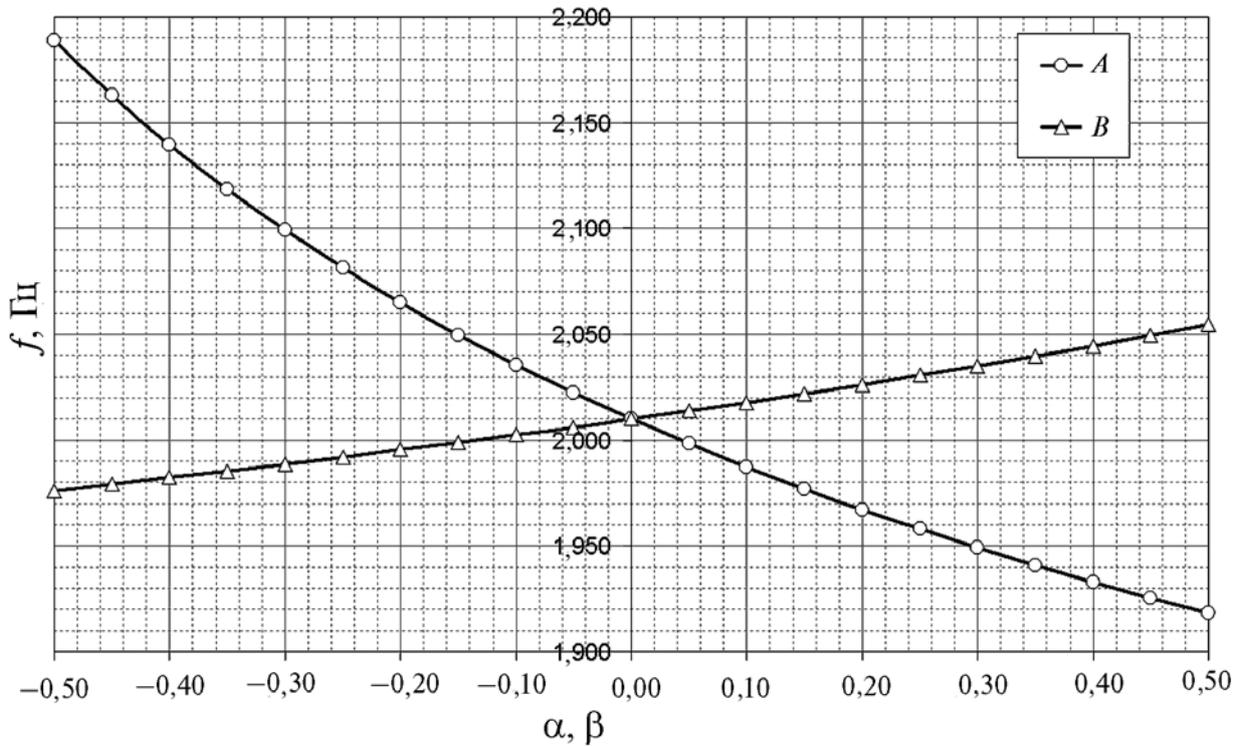


Рис. 6. Зависимость частоты первого тона при значении параметра неконсервативного нагружения $k = -1000$

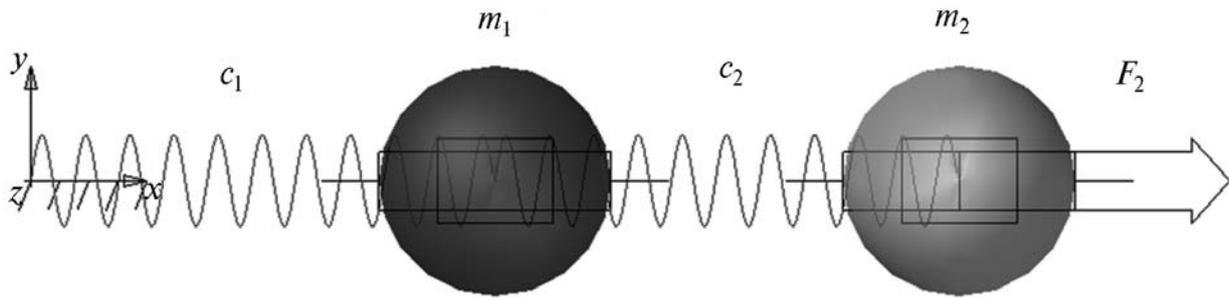


Рис. 7. Расчетная модель Adams

неприменима к неконсервативным системам при исследовании влияния на частоты вариации масс и жесткостей.

Подтверждение достоверности полученных результатов

Для проверки полученных результатов проведен ряд расчетов (порядка 200) во временной области с использованием системы Adams.

Расчетная модель Adams (рис. 7) отражает ранее исследованную модель неконсервативной динамической системы, изображенной на рис. 1.

Сила $F_2 = kx_1$ — неконсервативная нагрузка, где k — параметр неконсервативного нагруже-

ния, а x_1 — перемещение первого груза, имеющего массу m_1 .

Частота колебаний грузиков анализировалась по спектру, полученному на основании быстрого преобразования Фурье, из истории перемещений первого и второго груза.

Сначала проводились исследования зависимости частоты колебаний системы от вариации массы первого груза, а затем — от вариации жесткости первого упругого элемента. Значения варьируемых параметров изменялись в диапазоне $[-50\%; 50\%]$ с шагом 10% от величины номинального значения.

Пояснения к рис. 8. Кривыми представлены результаты, полученные в Adams, маркерами —

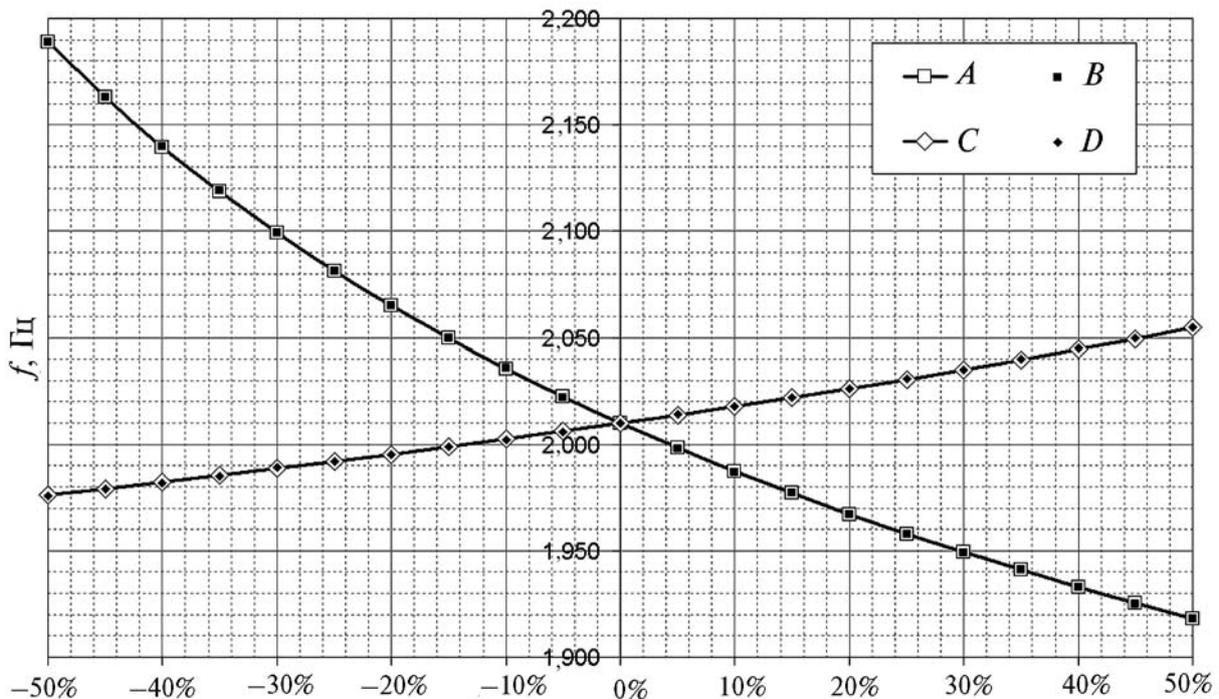


Рис. 8. Зависимость частоты колебаний первого груза от жесткости c_1 первого упругого элемента и от значения массы m_1 первого груза

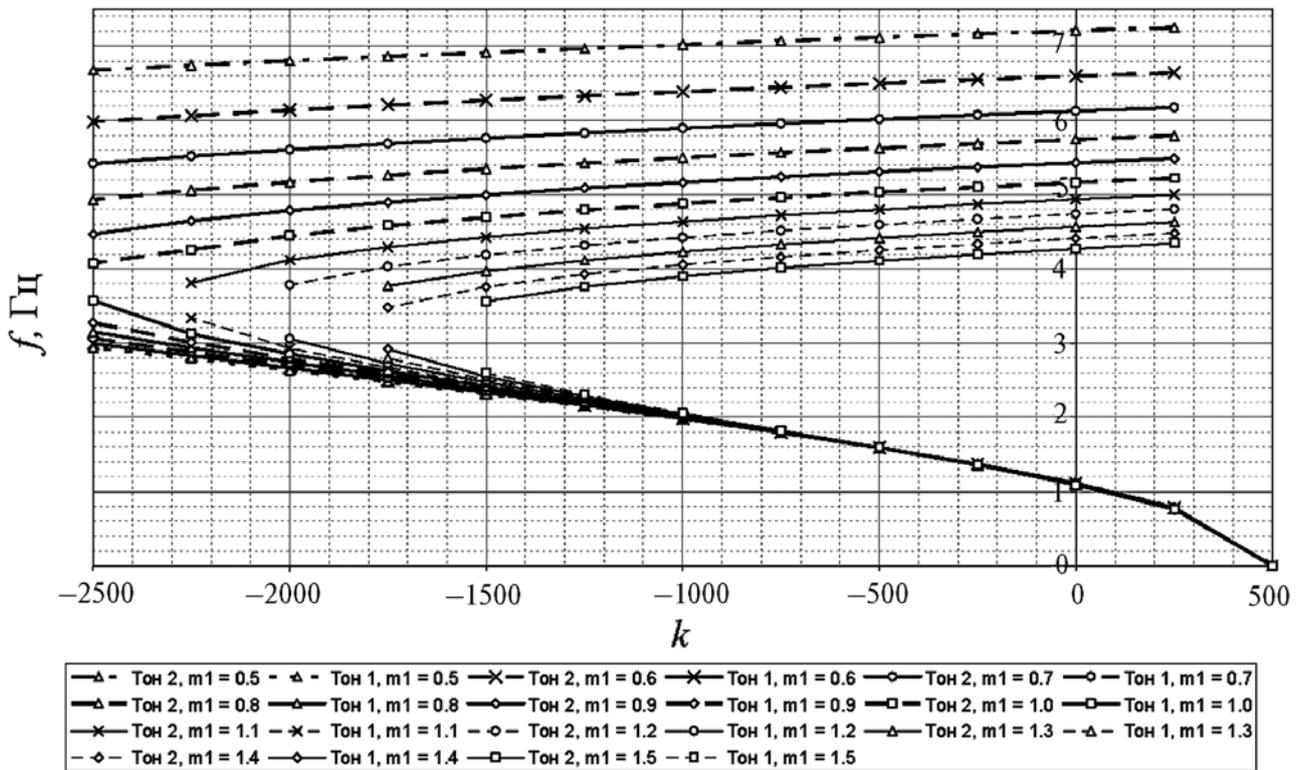


Рис. 9. Изменение частоты первого и второго тона в зависимости от изменения параметра неконсервативного нагружения k и массы первого груза m_1

результаты, полученные при решении задачи на собственные значения. Зависимость частоты колебаний первого груза от значения жесткости первого элемента c_1 : кривая A и маркеры B . Зависимость частоты колебаний первого груза от значения его массы m_1 : кривая C и маркеры D .

Анализируя полученные результаты при решении во временной области и сравнивая их с ранее полученными результатами в частотной области (рис. 8), делаем вывод, что с ростом жесткости первого элемента частота колебаний падает, а с ростом массы первого груза частота колебаний растет, что подтверждает ранее полученные результаты.

Также во временной области были определены частоты колебаний грузов с шагом $\Delta k = 250$ для диапазона значений $[-2500; 500]$ параметра неконсервативного нагружения и значений жесткости первого упругого элемента в диапазоне $[250; 750]$ Н/м, варьируемых с ша-

гом $\Delta c_1 = 50$ Н/м. Аналогичным образом проведены расчеты для значений массы первого груза в диапазоне $[0,5; 1,5]$ кг, варьируемых с шагом $\Delta m_1 = 0,1$ кг. Результаты вычислений представлены в виде семейства кривых на рис. 9 и рис. 10.

На представленных здесь графиках семейства кривых первого тона в правой части графиков устремляются к нулю в связи с тем, что наступает неустойчивость типа «дивергенция» (см. рис. 2). В левой части графиков кривые первого и второго тона устремляются к некоторым кратным значениям частот, такое поведение характерно для неустойчивости типа «флаттер» (см. рис. 2).

Приведенные результаты (см. рис. 9 и рис. 10) подтверждают полученные ранее результаты при значениях параметра неконсервативного нагружения $k < -500$ для различных значений масс и жесткостей простейшей неконсервативной модели.

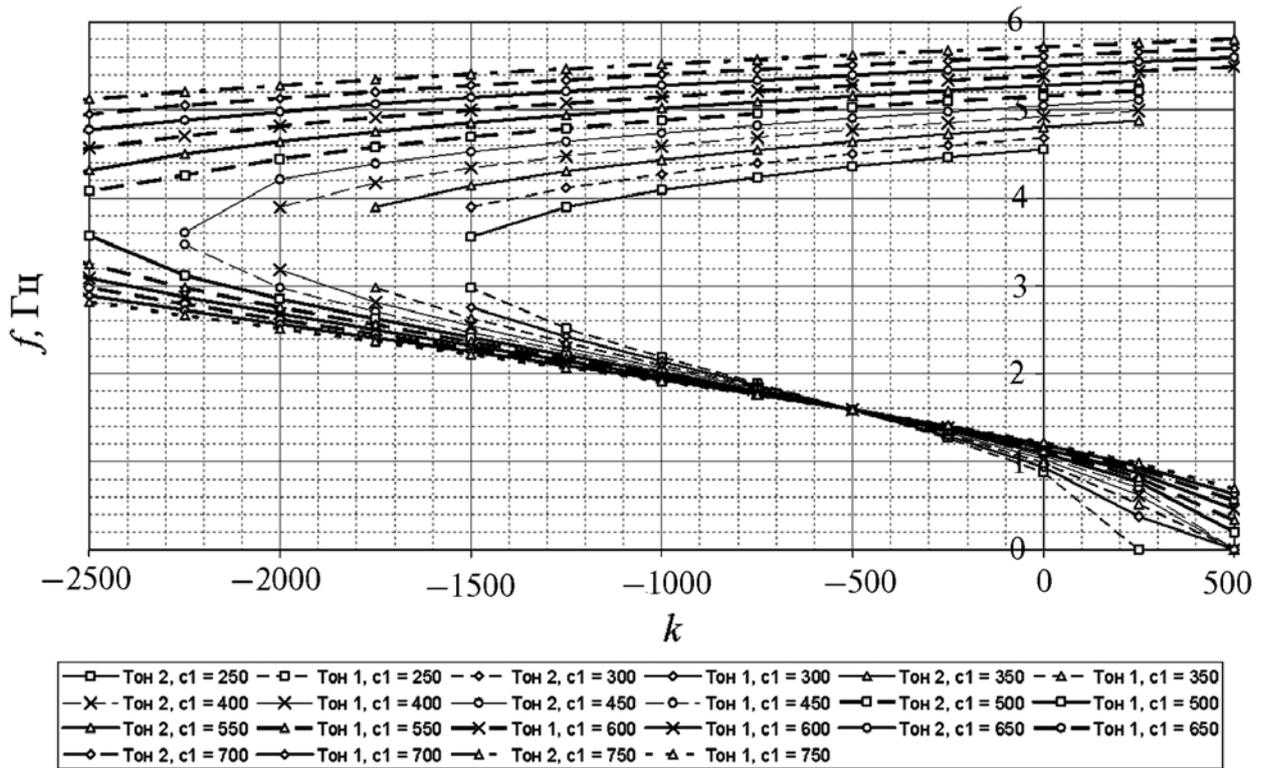


Рис. 10. Изменение частоты первого и второго тона в зависимости от изменения параметра неконсервативного нагружения k и жесткости первого упругого элемента c_1

Выводы

Известные теоремы об узлах форм колебаний и о влиянии на частоты колебаний масс и жесткостей системы неприменимы для неконсервативных систем с парным взаимодействием степеней свободы внутри области их устойчивости. Данный эффект необходимо учитывать на штатных режимах работы изделий при решении задач аэроупругости летательных аппаратов, продольных колебаний жидкостных ракет, колебаний управляемых упругих конструкций и т. п.

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.: Гостехтеоретиздат, 1950. 360 с.
2. Аринчев С.В. Теория колебаний неконсервативных систем. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 464 с.
3. Рэлей Дж.В. Теория звука. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. Т. 1. 504 с.
4. Буньков В.Г. Расчет оптимальных флаттерных характеристик градиентным методом // Труды ЦАГИ. 1959. Вып. 730. 79 с.
5. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. 1. М.: Мир, 1971. 318 с.
6. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний: Учеб. для университетов и вузов. 2-е изд. М.: Наука, 1964. 437 с.

Статья поступила в редакцию 27.12.2010 г.