

ВОСЬМИУГОЛЬНЫЙ ОБЪЕМНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛА РЕЙССНЕРА

Канд. техн. наук, ст. препод. Н. А. ГУРЬЕВА

Представлен обзор исследований в области профилирования и технологического сопровождения поршней двигателей внутреннего сгорания. Отмечены основные тенденции развития конструкций. Сделаны выводы, определившие круг задач, подлежащих решению для достижения цели снижения механических потерь путем профилирования и модификации боковой поверхности юбки поршня.

The review of researches in the field of profiling and technological support of pistons of explosion engines is presented. The basic tendencies of development of constructions are noted. The conclusions that define a spectrum of tasks to reaching the purpose of lowering mechanical losses by profiling and modifications in the lateral area of the piston skirt are drawn.

1. Основные соотношения трехмерной теории упругости. Деформации произвольно нагруженного тела в декартовой системе координат определяются зависимостями [1]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},\end{aligned}\quad (1)$$

где ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} — линейные деформации; γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} — угловые деформации; u , v , w — составляющие вектора перемещения в направлении осей x , y , z соответственно.

Если ввести обозначения $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$ — вектор-строка деформации, $\{w\}^T = \{u, v, w\}$ — вектор-строка перемещений, то (1) можно представить в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [L]\{w\}^T, \quad (2)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

где $[L]$ — матрица дифференциальных операций.

С другой стороны, деформации являются функциями напряжений и определяются выражениями [2]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}); \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}); \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}); \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}; G = \frac{E}{2(1+\nu)},\end{aligned}\quad (3)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} — осевые нормальные напряжения; σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{zx} — касательные напряжения; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

С использованием обозначения $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$ — вектор-строка напряжений, зависимости (3) можно представить в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}^T, \quad (4)$$

$\begin{matrix} 1 \times 6 & 6 \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix}$

где $[S]$ — матрица податливости.

Смешанная формулировка метода конечных элементов (при выборе в качестве узловых неизвестных перемещений и напряжений) основывается на функционале Рейсснера, который для отдельного конечного элемента можно представить в виде [2]

$$\begin{aligned} \Pi_R = \int_V \left[\{\sigma\}^T [L] \{w\} - \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \right] dV - \int_{S_\sigma} \{q^*\}^T \{w\} ds - \\ - \int_{S_u} \{\sigma^*\}^T (\{w\} - \{w^*\}) ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где V — объем конечного элемента; $\{q^*\}$ — заданные поверхностные силы; $\{w^*\}$ — заданные перемещения; S_σ и S_u — поверхности деформированного конечного элемента с заданными силами и перемещениями.

2. Матрица деформирования конечного элемента. Конечный элемент в декартовой системе координат x, y, z представляет собой произвольный восьмиугольник с узлами i, j, k, l, m, n, p, h .

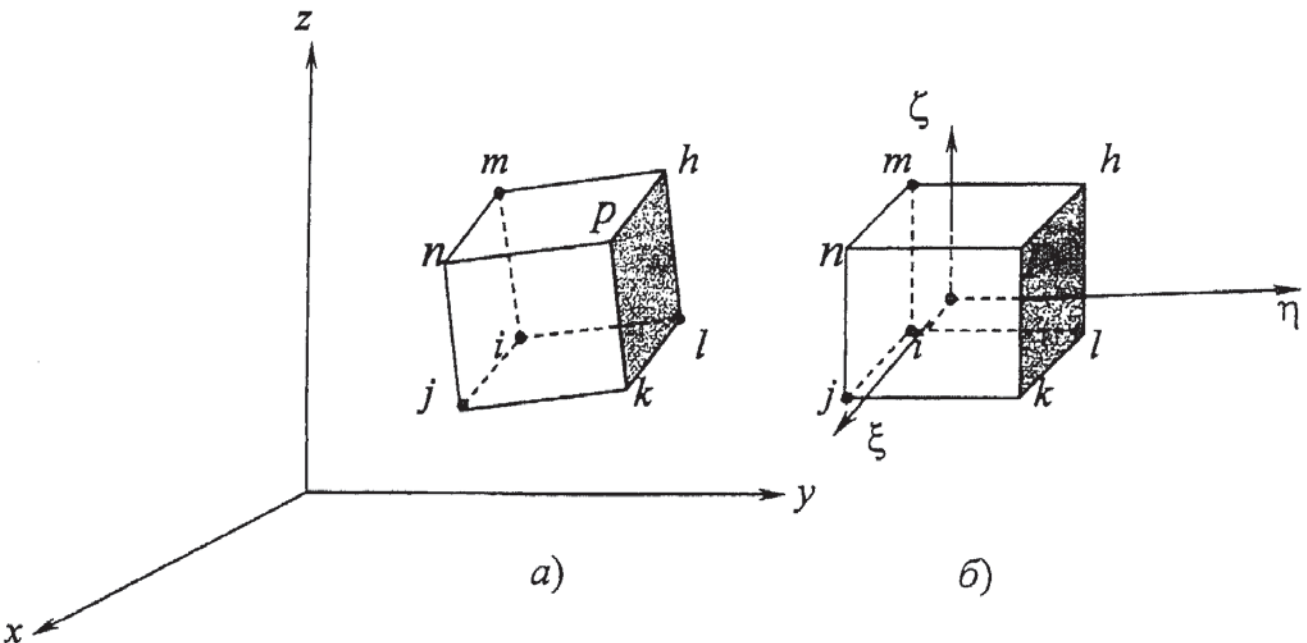


Рис. 1

Для выполнения численного интегрирования произвольный восьмиугольник отображается на куб с локальными координатами ξ, η, ζ (рис. 1, б), изменяющимися в пределах $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$, трилинейными соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^i + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^j + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^k + \\ & + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^l + \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^m + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^n + \\ & + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^p + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^h = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\lambda_y\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{\lambda_y\}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h\}$ — вектор-строка узловых значений величины λ . Под символом λ понимаются глобальные координаты x, y, z .

Производные глобальных координат x, y, z в локальной системе координат ξ, η, ζ определяются дифференцированием (6)

$$\lambda_{,p} = \{f_{,p}\}^T \{\lambda_y\}, \quad (\lambda = x, y, z, p = \xi, \eta, \zeta). \quad (7)$$

Производные локальных координат ξ, η, ζ в глобальной системе x, y, z определяются после дифференцирования соотношений (6) по глобальным координатам x, y, z выражениями

$$\begin{aligned} \xi_{,x} &= \frac{y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}}{\Delta}; \quad \eta_{,x} = \frac{-(y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta})}{\Delta}; \\ \zeta_{,x} &= \frac{(y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta})}{\Delta}; \\ \xi_{,y} &= \frac{-(x_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} x_{,\zeta})}{\Delta}; \quad \eta_{,y} = \frac{(x_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} x_{,\zeta})}{\Delta}; \\ \zeta_{,y} &= \frac{-(x_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} x_{,\eta})}{\Delta}; \\ \xi_{,z} &= \frac{(x_{,\eta} y_{,\zeta} - y_{,\eta} x_{,\zeta})}{\Delta}; \quad \eta_{,z} = \frac{-(x_{,\xi} y_{,\zeta} - y_{,\xi} x_{,\zeta})}{\Delta}; \\ \zeta_{,z} &= \frac{(x_{,\xi} y_{,\eta} - y_{,\xi} x_{,\eta})}{\Delta}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta = x_{,\xi} (y_{,\eta} z_{,\zeta} - z_{,\eta} y_{,\zeta}) - x_{,\eta} (y_{,\xi} z_{,\zeta} - z_{,\xi} y_{,\zeta}) + x_{,\zeta} (y_{,\xi} z_{,\eta} - z_{,\xi} y_{,\eta})$.

Компоненты вектора перемещения u, v, w и компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{yz}$ аппроксимируются также трilinearными соотношениями через их узловые значения

$$\mu = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\mu_y\}; \quad q = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{q_y\}, \quad (9)$$

где $\{\mu_y\}^T = \{\mu^i \mu^j \mu^k \mu^l \mu^m \mu^n \mu^p \mu^h\}$ — вектор-строка узловых значений величины μ ;

$\{q_y\}^T = \{q^i q^j q^k q^l q^m q^n q^p q^h\}$ — вектор-строка узловых значений величины q .

Под символом μ понимаются компоненты вектора перемещений u, v, w , а под символом q — компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{yz}$.

Введем для внутренней точки конечного элемента обозначения неизвестных величин

$$\{\sigma_y\}_{1 \times 6}^T = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}\};$$

$$\{w\}_{1 \times 3}^T = \{uvw\}. \tag{10}$$

С использованием аппроксимации (9) напряжения и перемещения внутренней точки конечного элемента выразим через узловые неизвестные в матричном виде

$$\{\sigma\}_{6 \times 1}^T = [G] \{\sigma_y\}_{6 \times 48 \times 1}; \quad \{w\}_{3 \times 1} = [A] \{\gamma_y\}_{3 \times 24 \times 24 \times 1}, \tag{11}$$

где $\{\sigma_y\}_{1 \times 48}^T = \left\{ \{\sigma_{xy}\}_{1 \times 8}^T \dots \{\sigma_{yz}\}_{1 \times 8}^T \right\}$ — матрица-строка узловых напряжений конечного элемента;

$\{\gamma_y\}_{1 \times 8}^T = \left\{ \{u_y\}_{1 \times 8}^T \{v_y\}_{1 \times 8}^T \{w_y\}_{1 \times 8}^T \right\}$ — матрица-строка узловых перемещений конечного элемента; матрицы $[G]$ и $[A]$ имеют структуру

$$[G]_{6 \times 48} = \begin{matrix} \begin{matrix} \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \times 8 & 1 \times 8 & 1 \times 8 & 1 \times 8 & 1 \times 8 & 1 \times 8 \end{matrix} \end{matrix} \tag{12}$$

$$[A]_{6 \times 48} = \begin{matrix} \begin{matrix} \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \times 8 & 1 \times 8 & 1 \times 8 \end{matrix} \end{matrix} \tag{13}$$

С учетом аппроксимирующих выражений (9) деформации (2) можно представить в виде

$$\{\varepsilon\}_{1 \times 6} = [L]_{6 \times 3} \{w\}_{3 \times 1}^T = [L]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 24} \{\gamma_y\}_{24 \times 1} = [B]_{6 \times 24} \{\gamma_y\}_{24 \times 1}, \tag{14}$$

где матрица $[B]$ имеет вид

$$[B]_{6 \times 24} = \begin{matrix} \begin{matrix} \{f_{,x}\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{f_{,y}\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{f_{,z}\}^T \\ \{f_{,x}\}^T & \{f_{,y}\}^T & \{0\}^T \\ \{f_{,x}\}^T & \{0\}^T & \{f_{,z}\}^T \\ \{0\}^T & \{f_{,y}\}^T & \{f_{,z}\}^T \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \times 8 & 1 \times 8 & 1 \times 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

Входящие в матрицу (15) производные определяются выражениями

$$\{f(\xi, \eta, \zeta)_{,x}\}^T = \{f_{, \xi}\}^T \xi_{,x} + \{f_{, \eta}\}^T \eta_{,x} + \{f_{, \zeta}\}^T \zeta_{,x};$$

$$\begin{aligned} \{f(\xi, \eta, \zeta),_y\}^T &= \{f_{,\xi}\}^T \xi_{,y} + \{f_{,\eta}\}^T \eta_{,y} + \{f_{,\zeta}\}^T \zeta_{,y}; \\ \{f(\xi, \eta, \zeta),_z\}^T &= \{f_{,\xi}\}^T \xi_{,z} + \{f_{,\eta}\}^T \eta_{,z} + \{f_{,\zeta}\}^T \zeta_{,z}. \end{aligned}$$

С учетом зависимостей (11) и (14) функционал Рейсснера (5) можно представить в матричном виде

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \{\sigma_y\}_{1 \times 48}^T \int_V [G]_{\substack{48 \times 6 \\ 6 \times 24}}^T [B]_{6 \times 24} dV \{\gamma_y\}_{24 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{\sigma_y\}_{1 \times 48}^T \int_V [G]_{\substack{48 \times 6 \\ 6 \times 6}}^T [S]_{6 \times 6} [G]_{6 \times 48} dV \{\sigma_y\}_{48 \times 1} - \\ & - \{\gamma_y\}_{1 \times 24}^T \int_s [A]_{24 \times 3}^T \{q\}_{3 \times 1} ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Минимизируя функционал (16) по узловым неизвестным $\{\sigma_y\}^T$ и $\{\gamma_y\}^T$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_R}{\partial \{\sigma_y\}^T} &\equiv [Q]_{48 \times 24} \{\gamma_y\}_{24 \times 1} - [H]_{48 \times 48} \{\sigma_y\}_{48 \times 1} = 0; \\ \frac{\partial \Pi_R}{\partial \{\gamma_y\}^T} &\equiv [Q]^T_{24 \times 48} \{\sigma_y\}_{48 \times 1} - \{f_s\}_{48 \times 1} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

где $[Q] = \int_V \{G\}^T [B] dV$; $[H] = \int_V \{G\}^T [S] [G] dV$; $\{f_s\}^T = \int_s [A]^T \{q\}^T ds$.

Систему уравнений (17) можно представить в традиционной конечно-элементной формулировке

$$[k]_{72 \times 72} \{Z_y^R\}_{72 \times 1} = \{f^R\}_{72 \times 1}, \tag{18}$$

где $[k]_{72 \times 72} = \begin{bmatrix} -[H]_{48 \times 48} & [Q]_{48 \times 24} \\ [Q]^T_{24 \times 48} & [0]_{24 \times 24} \end{bmatrix}$ — матрица деформирования восьмиугольного конечного элемента;

$\{Z_y^R\}_{72 \times 1}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma_y\}_{1 \times 48}^T & \{\gamma_y\}_{1 \times 24}^T \end{matrix} \right\}$ — вектор-строка узловых неизвестных конечного элемента;

$\{f^R\}_{72 \times 1}^T = \left\{ \begin{matrix} \{0\}_{1 \times 48}^T & \{f_s\}_{1 \times 24}^T \end{matrix} \right\}$ — вектор-строка узловых усилий конечного элемента.

Матрица деформирования рассматриваемой конструкции формируется в соответствии с традиционной процедурой МКЭ [3].

Пример расчета. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние пластинки (рис. 2), заземленной на правом конце, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , при следующих исходных данных: $h = 0,04$ м; $b = 0,1$ м; $L = 0,5$ м; $\nu = 0,3$; $E = 210$ ГН/м²; $q = 10$ даН/см².

Численные значения напряжений в точках A, B, C и D и прогиб в начале координат w_0 приведены в таблице. Численное значение $w_0 = 0,28$ см, подсчитанное по формулам сопротивления материалов совпадает с результатом, полученным на основе разработан-

ного элемента. Напряжения в заделке, найденные по формулам сопротивления материалов, равны $\sigma_{yy} = 187,4 \text{ МН/м}^2$. Как видим, в среднем совпадение численных результатов достаточно удовлетворительное.

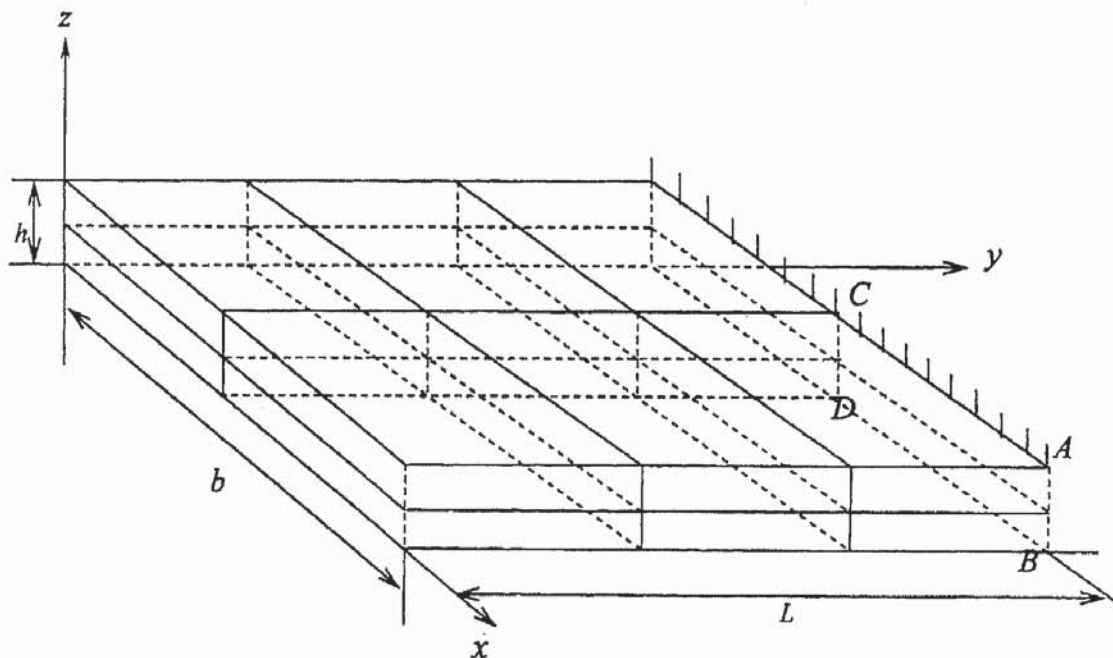


Рис. 2

Кол-во эл-тов	w_0 , см при $y = 0$	σ_{yy} , МН/м ² т. А	σ_{yy} , МН/м ² т. В	σ_{yy} , МН/м ² т. С	σ_{yy} , МН/м ² т. D
12	0,26	-176,763	176,769	-175,863	175,899
40	0,27	-193,460	193,492	-189,301	189,366
80	0,28	-198,573	198,646	-184,901	185,059
160	0,28	-201,240	201,351	-180,076	180,303

Анализ результатов показывает, что разработанный элемент вполне приемлем для определения напряженно-деформированного состояния трехмерных тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1970. — 288 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1974. — 344 с.