№ 2 2007

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.374

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИССПАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Д-р техн. наук, проф. К.И. РОМАНОВ

Показано, что в случае испытания модели Максвелла для характеристики внутреннего трения при колебаниях можно проводить обычные статические испытания на релаксацию напряжений . Тогда верхнюю огибающую затухающих колебаний внутреннего усилия можно интерпретировать как кривую релаксации при растяжении, а нижнюю — как кривую релаксации при сжатии.

It is displayed, that in the example of Maxwell model test for performance of internal abrasion at oscillations it is possible to make usual static trials on stress relaxation. Then the upper envelope of convergent oscillations of internal effort may be expounded as a relaxation curve at stretching, and the lower one - as a relaxation curve at compression.

Внутреннее трение, связанное с динамическими явлениями, приводит к необходимости изучения свойств нелинейных вязко-упругих осцилляторов. В частности, в [1] показано, что уравнение движения при сопротивлении по модели Максвелла, составленное относительно внутренней силы, имеет второй порядок и, следовательно, позволяет привлечь теорию качественного исследования дифференциальных уравнений движения систем с одной степенью свободы. Ниже показано, что при использовании модели Максвелла огибающая затухающих колебаний внутреннего усилия с точностью до множителя совпадает с кривой релаксации того же материала.

1. Линейная вязко-упругая модель. Рассмотрим систему с одной степенью свободы (рис. 1), представляющую собой массу m, соединенную с упругим и вязким элементами. Уравнение состояния вязко-упругого сопротивления примем в виде

$$\dot{x} = \frac{\dot{N}}{c} + kN, \tag{1}$$

где x — перемещение, N — внутренняя сила в системе последовательно соединенных элементов, c и k — коэффициенты, пропорциональные модулю упругости и коэффициенту вязкости материала [2] (точка означает производную по времени t).

Уравнение движения относительно перемещения имеет вид $(N = -m\ddot{x})$

$$m\dddot{x} + kcm\ddot{x} + c\dot{x} = 0. \tag{2}$$

Получим теперь уравнение колебаний массы относительно внутреннего усилия N, для чего продифференцируем (1)

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{N}}{c} + k\dot{N}.$$

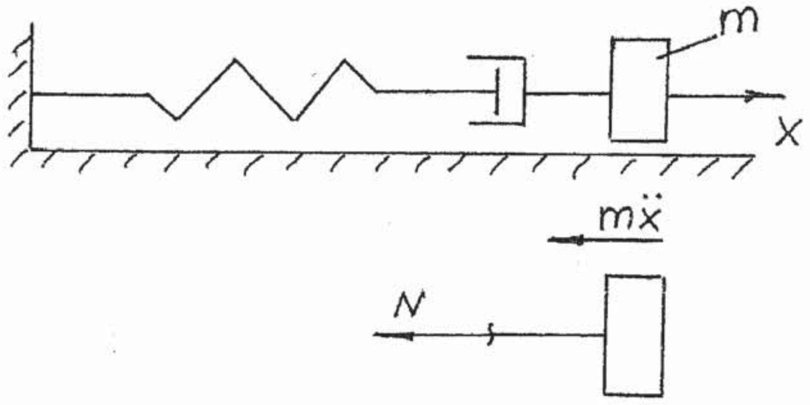

Рис. 1

Подставляя в это уравнение $\ddot{x} = -N/m$, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$m\ddot{N} + mkc\dot{N} + cN = 0. \tag{3}$$

Таким образом, уравнение движения в среде Максвелла имеет меньшую размерность, если движение описывать с помощью переменной N, чем в том случае, когда переменной является x, т. е. в силах движение соответствует системе с одной степенью свободы (3) в отличие от системы с 1,5 степенями свободы в перемещениях (2).

Заметим, что с помощью подстановки $\dot{x} = v$ уравнение в перемещениях сводится к уравнению второго порядка относительно скоростей перемещений. Однако использование уравнения (3) позволяет, как покажем далее, установить аналогию между затухающими колебаниями и статической релаксацией напряжений.

2. Нелинейная вязко-упругая модель. Примем уравнение состояния вязко-упругого сопротивления в форме

$$\dot{x} = \frac{\dot{N}}{c} + kN^n, \tag{4}$$

где $n \rangle 1$ — постоянная материала при данной температуре.

Уравнение движения относительно усилий имеет вид (n — нечетное)

$$m\ddot{N} + mkcnN^{n-1}\dot{N} + cN = 0.$$

Примем приближенно, следуя работе [3], что в течение одного цикла движение описывается зависимостью

$$N = a\cos pt, \tag{5}$$

где $a = a(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, определяющая уравнение верхней огибающей (рис. 2), $p = (c/m)^{1/2}$ — собственная частота колебаний.

Приращение потенциальной энергии за один колебательный цикл

$$\Delta\Pi = \frac{1}{c} aT \frac{da}{dt}, \tag{6}$$

где T — длительность колебательного цикла.

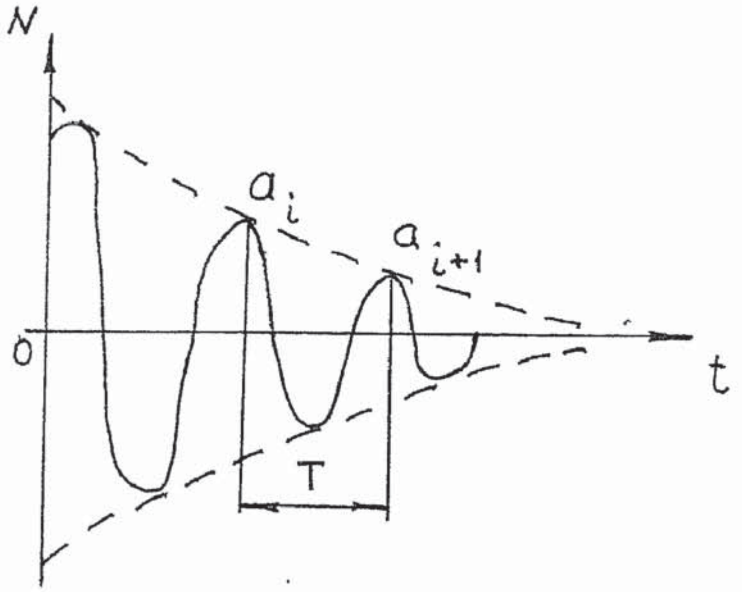

Рис. 2

В соответствии с (5) $\dot{N} = -ap\sin pt$, поэтому рассеяние энергии вследствие ползучести материала за время T можно найти по формуле

$$\psi = -k\int_0^T N^{n+1}dt = -ka^{n+1}\frac{1}{p}S, \tag{7}$$

$$S = \int_0^{2\pi}\cos^{n+1}dx.$$

Характерно то, что по модели Максвелла рассеяние энергии оказывается обратно пропорциональным частоте.

По методу энергетического баланса $\Delta\Pi = \psi$, поэтому, приравнивая правые части равенств (6) и (7), получаем уравнение для верхней огибающей

$$\frac{da}{dt} = -kca^n S/(2\pi). \tag{8}$$

Сравним полученное решение с уравнением кривой релаксации $(\dot{x} = 0)$, соответствующим (4),

$$\frac{dN}{dt} = -kcN^n. \tag{9}$$

Подобие уравнений (8) и (9) означает, что по модели Максвелла для характеристики внутреннего трения при колебаниях можно проводить обычные статические испытания на релаксацию напряжений [4]. В этом случае верхнюю огибающую (рис. 2) можно интерпретировать как кривую релаксации при растяжении, а нижнюю — как кривую релаксации при сжатии.

3. Энергетический баланс в процессе релаксации. Умножим обе части уравнения (9) на N. Тогда получим

$$\frac{\dot{N}N}{c} = -kN^{n+1}. \tag{10}$$

Физический смысл этого равенства может быть выяснен с помощью энергетического рассмотрения. Именно, потенциальная энергия, запасаемая в упругом элементе (рис. 1), определяется по формуле

$$\Pi = \frac{1}{2c}N^2,$$

откуда следует

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{c}N\dot{N}.$$

Мощность, рассеиваемая в вязком элементе

$$W = -\dot{x}^c N = -kN^{n+1},$$

где $\dot{x}^c$ — вязкая составляющая в уравнении состояния (4).

Таким образом, равенство (10) показывает, что релаксация — это процесс, при котором так же, как и при колебаниях,

$$\frac{d\Pi}{dt} = W.$$

Различие в уравнениях (8) и (9) появляется из-за вычисления $\Delta\Pi$ и ψ за цикл свободных колебаний. Например, при $n = 3$ оказывается $S/(2\pi) = 3/8$.

Модель Максвелла может быть использована в механике деформируемых оснований [5-7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hoff N. J. Damping of the vibrations of a coiled spring due to creep. Creep in structures. Berlin: Springer — Verlag, 1962. — P. 335—373.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 399 с.
3. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.
4. Лазаренко Э. С., Малинин Н. Н., Романов К. И. Метод оценки релаксации напряжений в условиях горячего формоизменения металлов и его использование для межотраслевой стандартизации / Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности. — Под ред. С.А. Шестерикова. — М.: Изд-во стандартов, 1986. — Вып. 7. — С. 16—21.
5. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 560 с.
6. Иванов А.П. Динамика системы с механическими соударениями. М.: Международная программа образования. 1997. — 336 с.
7. Buzdugan G.H. Dinamica fundatiilor de masin. Bucuresti: Editura Academiei Republicii socialiste Romagia. 1968. — 368 p.