

**КОМКИН**  
 Александр Иванович  
 кандидат технических  
 наук,  
 доцент кафедры «Экология  
 и промышленная  
 безопасность»  
 (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

## Особенности снижения шума в канале резонатором Гельмгольца

**А.И. Комкин**

*Исследуются акустические характеристики резонатора Гельмгольца в канале. Анализируется зависимость акустических характеристик этой системы от ее безразмерных геометрических параметров, выраженных через диаметр канала.*

**Ключевые слова:** шум, снижение, канал, резонатор Гельмгольца, акустические характеристики.

*The present paper concerns Helmholtz resonator in duct. It analyses how acoustic characteristics of this system depends on its nondimensional geometrical parameters, expressed in terms of duct diameter.*

**Keywords:** noise, reduction, duct, Helmholtz resonator, acoustic characteristics.

Резонаторные глушители находят широкое применение для снижения газодинамического шума машин. К наиболее распространенному виду таких глушителей относится резонатор Гельмгольца. Расчету систем снижения шума с резонатором Гельмгольца посвящено большое количество публикаций, например [1–4]. Чтобы повысить эффективность использования резонаторов Гельмгольца для снижения шума в каналах важно знать зависимость акустических характеристик такой системы от ее геометрических параметров и уметь подбирать эти параметры. Для изолированного резонатора Гельмгольца и резонатора на безграничной стенке методика выбора их параметров подробно рассмотрена в [1]. В данной работе этот вопрос исследуется применительно к резонатору Гельмгольца, размещенному на стенке канала.

Рассмотрим прямой канал (рис. 1) с абсолютно жесткими стенками и площадью поперечного сечения  $S$ , на боковой поверхности канала размещается резонатор Гельмгольца. Будем рассматривать простейшую модель резонатора Гельмгольца, в которой жесткая замкнутая поверхность резонатора, характеризующаяся только объемом  $V$ , соединяется с каналом через горло с площадью поперечного сечения  $S_0$  и длиной  $l$ . При этом предполагается, что размеры резонатора много меньше рассматриваемых длин волн.

Будем считать канал узким, так что в нем могут распространяться только плоские звуковые волны. Положим, что звуковые колебания в канале, так же как и колебания воздуха в горле резонатора, происходят по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ . Соответствующая этим колебаниям амплитуда колебательной скорости  $V$  связана с амплитудой  $P$  звукового давления, действующего на резонатор со стороны внешнего звукового поля, через акустический импеданс ре-

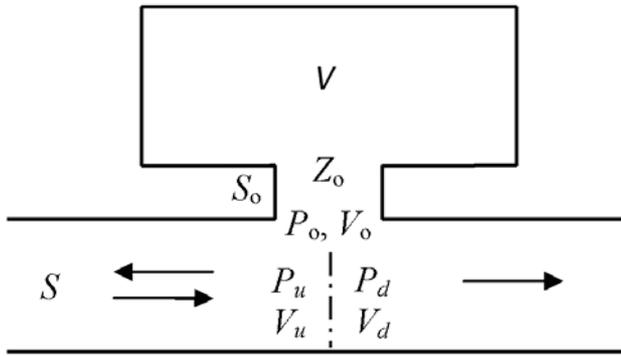


Рис. 1. Расчетная схема резонатора Гельмгольца в канале

резонатора  $Z_0 = P/V$  или его нормированное значение  $Z'_0 = Z_0/(\rho_0 c_0)$ , где  $\rho_0 c_0$  — соответственно плотность воздушной среды и скорость звука в ней.

Матрицу передачи рассматриваемой системы, характеризуемую коэффициентами  $T_A, T_B, T_C, T_D$  и связывающую амплитуды звукового давления  $P_u$  и колебательной скорости  $V_u$  в канале перед резонатором с соответствующими величинами  $P_d$  и  $V_d$  в канале после резонатора, получают в предположении, что в месте размещения резонатора Гельмгольца на стенке канала должны выполняться условия непрерывности звукового давления и объемной скорости [5, 6]. Это приводит к следующему матричному уравнению:

$$\begin{bmatrix} P_u \\ \rho_0 c_0 V_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/(S' Z'_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_d \\ \rho_0 c_0 V_d \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Потери передачи  $TL$  для рассматриваемой системы, определяемые логарифмом отношения звуковой мощности падающей волны в канале перед резонатором к мощности звуковой волны за резонатором при согласованной нагрузке на выходе канала, с учетом (1) имеют вид

$$\begin{aligned} TL &= 10 \lg \left[ |T_A + T_B + T_C + T|^2 / 2 \right] = \\ &= 20 \lg \left[ 1 + 1/(2S' Z'_0) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где безразмерный параметр  $S' = S/S_0$ .

Входящий в приведенные выражения нормированный акустический импеданс описывается, как показывает рассмотрение уравнения

движения воздуха в горле резонатора [5], формулой

$$Z'_0 = R'_v + j \left( \frac{\omega l_e}{c_0} - \frac{S_0 c_0}{\omega V} \right), \quad (3)$$

где  $l_e$  — приведенная или эквивалентная длина горла резонатора, определяемая с учетом так называемой присоединенной длины горла, которая, в свою очередь, связана с перераспределением энергии звуковой волны в горле резонатора;  $R'_v$  — нормированное сопротивление трения в горле резонатора.

Введя в рассмотрение резонансную частоту  $\omega_0$ , определяемую условием  $\text{Im} Z'_0 = 0$  и в соответствии с формулой (3) равную

$$\omega_0 = c_0 \sqrt{S_0 / (l_e V)} = c_0 / (l_e \sqrt{V'}), \quad (4)$$

а также относительную частоту  $\Omega = \omega / \omega_0$ , преобразуем формулу (3) к виду

$$\begin{aligned} Z'_0 &= R'_v + j \sqrt{\frac{l_e S_0}{V}} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right) = \\ &= R'_v + j \frac{1}{\sqrt{V'}} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом величина  $V' = V / (l_e S_0)$  представляет собой отношение объема резонатора к приведенному объему его горла.

Подставляя (5) в (2), получим

$$\begin{aligned} TL &= 20 \lg \left| 1 + \left[ R_s + j \frac{2S'}{\sqrt{V'}} \left( \Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right]^{-1} \right| = \\ &= 10 \lg \left[ 1 + \frac{1 + 2R_s}{R_s^2 + [2S'(\Omega - 1/\Omega)]^2 / V'} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $R_s = 2S'R'_v$ .

Параметр  $R_s$  определяет влияние трения на потери передачи рассматриваемой системы. Заметим, что помимо сопротивления трения в этот параметр входит величина  $S'$ , обратно пропорциональная площади горла резонатора, поэтому ее рост косвенно также будет связан и с увеличением трения в горле резонатора.

Когда трение отсутствует,  $R_s = 0$  и формула (6) может быть представлена в виде

$$TL = 10 \lg \left[ 1 + \frac{1}{Q^2 (\Omega - 1/\Omega)^2} \right], \quad (7)$$

где  $Q = 2S'/\sqrt{V'}$ .

При этом согласно (7) потери передачи системы  $TL$ , как функция относительной частоты  $\Omega$ , определяются величиной  $Q$ , так что с ее ростом кривая потерь передачи сужается (рис. 2, а). Так как  $Q$  пропорциональна отношению  $S'$  к  $\sqrt{V'}$ , то изменения величины  $S'$  оказывают большее влияние на потери передачи, чем соответствующие изменения  $V'$ .

Трение в резонаторе оказывает заметное влияние только в резонансной области, а за ее пределами влияние трения становится весьма незначительным (рис. 2, б).

На резонансной частоте при  $\Omega = 1$ , как следует из (6), потери передачи

$$TL_0 = 20 \lg(1 + 1/R_s) \quad (8)$$

и, таким образом, зависят только от параметра  $R_s$ . Когда трение незначительно и  $R_s \rightarrow 0$ , то, как и следовало ожидать, потери передачи  $TL_0 \rightarrow \infty$ .

Оценим относительную ширину резонансной кривой потерь передачи  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ , где  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — относительные граничные частоты резонансной кривой.

Обычно в теории колебательных систем граничные частоты определяются из условия, что на этих частотах потери передачи  $TL_{гр} = 3$  дБ. Обозначим соответствующую этому условию относительную ширину полосы как  $\Delta\Omega$ . Для оценки величины  $\Delta\Omega$  возможно использование упрощенной формулы (7), не учитывающей трение в горле резонатора. Это позволяет упростить проведение анализа и в то же время не должно повышать погрешности в оценках, так как, согласно приведенным выше данным, на граничных частотах сами эти значения незначительно зависят от величины трения.

В соответствии с определением ширины резонансной кривой на граничных частотах  $\Omega_{1,2}$  выражение под логарифмом в (7) должно быть равно 2. Это позволяет получить следующую формулу для граничных частот:

$$\Omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}, \quad (9)$$

из которой следует, что относительная ширина резонансной кривой  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 1/Q$ . При этом параметр  $Q$  по определению будет являться добротностью системы.

Наряду с этим ширину полосы резонансной кривой можно определить из условия, что на граничных частотах потери передачи  $TL_{гр}$  принимают значение, отличное от 3 дБ. Так, если принять это значение  $TL_{гр} = 6$  дБ, то соответ-

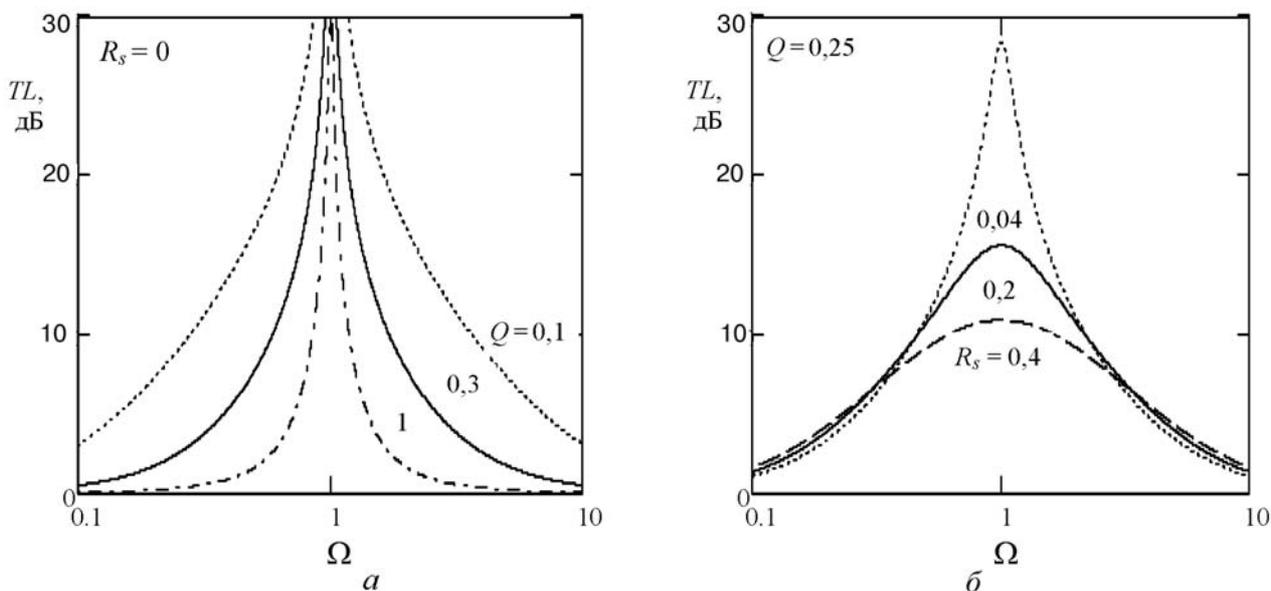


Рис. 2. Потери передачи для резонатора Гельмгольца в канале без учета (а) и с учетом (б) трения

вующая этому условию относительная ширина полосы (обозначим ее  $\Delta\Omega_6$ ) также не будет практически зависеть от трения в горле резонатора. В этом случае выражение под логарифмом в (7) следует приравнять 4, что дает  $\Delta\Omega_6 = \Delta\Omega / \sqrt{3}$ , т. е. получили сужение ширины полосы резонансной кривой в  $\sqrt{3}$  раз. Когда  $TL_{тр} = 10$  дБ, то соответствующая этому условию относительная ширина полосы  $\Delta\Omega_{10} = \Delta\Omega / 3$ , т. е. оказывается в три раза уже ширины полосы по уровню 3 дБ.

Согласно принятым обозначениям, относительная ширина резонансной кривой определится выражением

$$\Delta\Omega = \frac{1}{Q} = \frac{1}{2S} \sqrt{\frac{VS_0}{l_e}}, \quad (10)$$

которое с учетом (4) преобразуется к виду

$$\Delta\Omega = \frac{V\omega_0}{2Sc}. \quad (11)$$

Если теперь, следуя [7], ввести в рассмотрение вместо частоты ее безразмерный аналог  $\mu_0 = d/\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — соответствующая резонансной частоте длина волны, то после преобразования формулы (11) она приводится к виду

$$\Delta\Omega = \mu_0 \bar{V}, \quad (12)$$

где  $\bar{V}$  — относительный объем резонатора;  $\bar{V} = V / (d^3 / 4)$  — показатель, дающий наглядное представление о соотношении между размерами резонатора и канала.

Следовательно, относительная ширина резонансной кривой и безразмерная резонансная частота однозначно связаны с относительным объемом резонатора Гельмгольца. Когда собственная частота резонатора задана и имеются ограничения на максимально возможный объем резонатора, формула (12) позволяет определить соответствующую этому ограничению максимально возможную ширину резонансной кривой.

Найдем теперь соотношения, определяющие необходимые длину и диаметр горла резонатора. С этой целью перемножим уравнения (4) и (10), что позволяет получить выражение

для абсолютной ширины резонансной кривой  $\Delta\omega$ :

$$\omega_0 \Delta\Omega = \Delta\omega = \frac{c_0}{2S} \frac{S_0}{l_e}. \quad (13)$$

Таким образом, величина  $\Delta\omega$  не зависит от объема резонатора, а определяется только площадью поперечного сечения канала и параметрами горла резонатора. Следовательно, если собственная частота и относительный объем резонатора однозначно определяют относительную ширину резонансной кривой  $\Delta\Omega$ , то ее абсолютная ширина  $\Delta\omega$  зависит только от конфигурации горла резонатора.

Как следует из (13), для того чтобы увеличить ширину резонансной кривой  $\Delta\omega$ , необходимо увеличивать отношение площадей  $S_0/S$  и, наоборот, уменьшать эквивалентную длину горла  $l_e$ . При этом входящая в формулу (14) эквивалентная длина горла

$$l_e = l + \alpha d_0, \quad (14)$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная, определяющая присоединенную длину горла и зависящая, вообще говоря, от конфигураций объема резонатора и поперечного сечения канала;  $d_0$  — диаметр горла резонатора или эквивалентный по площади диаметр, если сечение горла отличается от круглого.

Тогда, очевидно, приведенное выше утверждение, что объем резонатора не влияет на абсолютную ширину резонансной кривой, справедливо лишь до тех пор, пока изменения этого объема не будут приводить к значимым изменениям присоединенной длины горла.

Если перейти к относительным размерам  $\bar{d} = d_0 / d$  и  $\bar{l} = l / d$ , а также к безразмерной частоте  $\mu$ , то формула (13) с учетом (14) приводится к виду

$$\Delta\mu = \frac{\bar{d}}{4\pi(\bar{l} / \bar{d} + \alpha)}, \quad (15)$$

где  $\Delta\mu = \Delta\omega d / (2\pi c)$  — безразмерная ширина полосы резонансной кривой.

Заметим, что, когда длина горла принимается равной толщине стенки канала, горло резонатора можно выполнить в виде одиночного

отверстия на стенке канала или в виде совокупности из  $n$  отверстий меньшего диаметра. Если площади одиночного отверстия и совокупности отверстий равны, то, как следует из (15), это не приведет к увеличению ширины полосы  $\Delta\mu$ , а будет уменьшать ее, так как при таком переходе числитель в правой части (15) остается неизменным, а соотношение  $n\bar{l} / \bar{d}$  в знаменателе увеличивается. Поэтому такой подход целесообразен лишь в том случае, когда требуемая площадь горла резонатора так велика, что для данной конфигурации канала ее невозможно обеспечить одним отверстием по конструктивным соображениям и переход к совокупности отверстий меньшего диаметра является необходимостью.

Решение уравнения (15) дает следующее выражение для  $\bar{d}$ :

$$\bar{d} = 2\pi\alpha\Delta\mu(1 + \sqrt{1 + \bar{l} / (\pi\alpha^2\Delta\mu)}). \quad (16)$$

Когда ширина полосы  $\Delta\mu$  достаточно большая, вторым слагаемым под корнем в формуле (16) можно пренебречь, что дает

$$\bar{d} \approx 4\pi\alpha\Delta\mu, \quad (17)$$

т. е. в этом случае относительный диаметр  $\bar{d}$  не зависит от длины горла резонатора.

Наоборот, при маленькой ширине полосы  $\Delta\mu$  под корнем в формуле (16) становится преобладающим второе слагаемое, так что в первом приближении получим

$$\bar{d} \approx 2\sqrt{\bar{l}\pi\Delta\mu}. \quad (18)$$

Подставляя в приведенные формулы значения  $\Delta\mu$  и  $\bar{l}$ , полученные, например, из (12), и условия равенства длины горла толщине стенки канала, определяем относительный диаметр горла  $\bar{d}$ . Отсюда по заданному значению диаметра канала  $d$  можно найти диаметр горла резонатора  $d_0$  и длину горла  $l$ . Таким образом, конфигурация резонатора Гельмгольца оказывается полностью определенной.

Заметим, что значение параметра  $\bar{l}$  в формулах (16), (18) должно выбираться таким, чтобы вычисляемые значения диаметра горла резонатора  $d_0$  были бы больше некоторого минимального значения, определяемого, например, исходя из конструктивных или технологических соображений.

#### Список литературы

1. *Ingard U.* On the theory and design of acoustic resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
2. *Davis D.D., Stokes G.M., Moor D., Stevens G.L.* Theoretical and experimental investigation of mufflers with comments on engine exhaust muffler design // *NASA. Rep.* № 1192. 1954. 48 p.
3. *Лапин А.Д.* Звукоизоляция в волноводах // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 3. С. 337–350.
4. *Selamet A., Dickey N.S., Novak J.M.* Theoretical, computational and experimental investigation of Helmholtz resonators with fixed volume: lumped versus distributed analysis // *J. Sound Vib.* 1995. V. 187. № 2. P. 358–367.
5. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во МГУ, 1960. 336 с.
6. *Kinsler L.E., Frey A.R.* Fundamentals of acoustics. New York: Wiley, 1962. 524 p.
7. *Комкин А.И.* Оптимизация реактивных глушителей шума // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 3. С. 373–379.

Статья поступила в редакцию 30.11.2010 г.