№ 10 *2008*

624.07:534.1

О ХАРАКТЕРЕ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕ С ОПОРАМИ

Канд.техн.наук, доц. А.И.ПОЛУНИН

При использовании гипотезы нерастяжимой средней линии получены зависимости для определения закона прецессионного движения стоячей волны во вращающемся кольце с опорами. Использование этого результата позволяет правильно учесть в динамике кольца наличие стоячих волн.

При вращении упругого кольца в нем возникает прецессия возбужденных стоячих волн. Закон движения их в свободном кольце рассмотрен в [1–3]. Наличие опор у вращающегося кольца существенно влияет на характер прецессии. В [4] получены уравнения, описывающие динамику вращающегося на двух опорах кольца, при использовании высказанной автором гипотезы о характере прецессионного движения стоячей волны. Ниже приводится доказательство правильности этой гипотезы.

Введем неподвижную систему координат OX_H, точка O которой находится в центре недеформированного кольца, и подвижную OX_C, жестко связанную с кольцом. Положение оси OX_C относительно OX_H задаем углом Ωt, где Ω – угловая скорость вращения кольца, – величина постоянная; t – время. Положение точек средней линии деформированного кольца в связанной с ним системе координат определяем координатами U, V в локальной системе координат, задаваемой углом θ относительно оси OX_C. Радиальное перемещение точки средней линии кольца зададим в виде

$$U=\sum_{i=1}^{N}a_i(t)\cos(i(\theta+\phi_i(t)))+\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\sin(i(\theta+\phi_i(t))), \qquad (1)$$

где $a_i(t)$, $b_i(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению; $\varphi_i(t)$ – неизвестная функция, задающая характер прецессии стоячей волны; N – число учитываемых гармоник.

Величину тангенциального перемещения точек средней линии кольца находим из условия нерастяжимости средней линии. В этом случае связь между координатами U и V определяется зависимостью [1]

$$\left(r_0+V'+U\right)^2+\left(V-U'\right)^2=r_0^2, \tag{2}$$

где r_0 – радиус кольца.

Из этого выражения получим известную более простую приближенную формулу

$$V_p'=-U\ , \text{ или } \ V_p=-\int Ud\theta\ , \tag{3}$$

где индекс p означает приближенное значение V.

Оценим погрешность в определении V, получаемую вследствие такой замены, для одной формы колебаний. Будем считать, что перемещение оболочки по координате U описывается формулой

$$U=a\cos\left(k\theta\right).$$

Тогда $U'=-ak\sin\left(k\theta\right)$. Подставив эту зависимость в (2) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV}{d\theta}=\sqrt{r_0^2-\left(V-U'\right)^2}-r_0-U\ .$$

Решение его даст точное значение координаты V. Приближенное значение в этом случае определяем по (3)

$$V_p=-\frac{a}{k}\sin\left(k\theta\right).$$

В таблице представлены результаты расчета относительной погрешности в процентах определения координаты V по приближенной формуле (3) в сравнении с точной (2) в зависимости от угла θ в градусах для разных значений радиуса r_0 и для номера гармоники $k=1$. Величина амплитуды $a=0,1$м.

Таблица

Погрешность определения координаты V

Радиус r_0, м	Погрешность %	θ, градусы				
		0	90	180	270	360
1	$\frac{V-V_p}{V}100$	$3\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-1}$	$4\cdot10^{-2}$	$-3\cdot10^{-1}$	$-5\cdot10^{-2}$
3	$\frac{V-V_p}{V}100$	$1\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-2}$	$-3\cdot10^{-1}$	$-7\cdot10^{-2}$

Из таблицы видно, что погрешность составляет долю процента. Поэтому вместо точной формулы можно использовать приближенную (3). В этом случае получим

$$V=-\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{i}\sin(i(\theta+\phi_i(t)))+\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{i}\cos(i(\theta+\phi_i(t))).$$

Для доказательства утверждения о характере прецессионного движения стоячей волны будем рассматривать функции $\varphi_i(t)$ (i = 1, 2, …, N) как еще одни координаты, определяющие наряду с координатами $a_i(t)$, $b_i(t)$ (i = 1, 2, …, N), динамику кольца.

Для получения уравнений поведения кольца используем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial Q}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{2}\beta_i e_{ij},$$

где T, Q – соответственно кинетическая и потенциальная энергия кольца; β_1, β_2 – неопределенные множители Лагранжа,

q_j – компонента вектора $[a_1 \ldots a_N \;\; b_1 \ldots b_N \;\; \varphi_1 \ldots \varphi_N]$;

e_{ij} – производная i-го уравнения связи по координате q_j.

Кинетическую и потенциальную энергию вращающегося кольца вычисляем соответственно по формулам

$$T = \frac{r\rho F}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\dot V + \Omega r + \Omega U\right)^2 + \left(\dot U - \Omega V\right)^2\right]d\theta\ ,$$

$$Q = \frac{EJ}{2r^3}\int_0^{2\pi}\left(-U - \frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)^2 d\theta\ ,$$

где r – радиус средней линии; ρ – плотность материала кольца; F – площадь поперечного сечения кольца; E – модуль Юнга; J – осевой момент инерции сечения кольца. Точка означает дифференцирование по времени.

Производные по обобщенным скоростям и времени имеют вид [4]

$$\frac{\partial T}{\partial \dot a_j} = \pi\chi\left[C_j\dot a_j + \left(K_j\dot\phi_j - \frac{2\Omega}{j}\right)b_j\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot b_j} = \pi\chi\left[\left(\frac{2\Omega}{j} - K_j\dot\phi_j\right)a_j + C_j\dot b_j\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\phi_j} = \pi\chi\left[K_j\dot a_j b_j - K_j\dot b_j a_j + l_j a_j^2\dot\phi_j + l_j b_j^2\dot\phi_j - 2\Omega a_j^2 - 2\Omega b_j^2\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot a_j}\right) = \pi\chi\left[C_j\ddot a_j + K_j\ddot\phi_j b_j + \left(K_j\dot\phi_j - \frac{2\Omega}{j}\right)\dot b_j\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot b_j}\right) = \pi\chi\left[-K_j\ddot\phi_j a_j + \left(\frac{2\Omega}{j} - K_j\dot\phi_j\right)\dot a_j + C_j\ddot b_j\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\phi_j}\right) = \pi\chi\left[K_j\ddot a_j b_j - K_j\ddot b_j a_j + 2l_j a_j\dot a_j\dot\phi_j + \right.$$

$$\left. + l_j a_j^2\ddot\varphi_j + 2l_j b_j\dot b_j\dot\varphi_j + l_j b_j^2\ddot\varphi_j - 4\Omega a_j\dot a_j - 4\Omega b_j\dot b_j\right].$$

где $\chi = r\rho F$, $K_j = j + 1/j$, $C_j = 1 + 1/j^2$, $l_j = 1 + j^2$.

Производные кинетической энергии по обобщенным координатам имеют вид:

$$\frac{\partial T}{\partial a_j} = \pi\chi\left[\left(l_j\dot\phi_j^2 - 4\Omega\dot\phi_j + C_j\Omega^2\right)a_j + \left(\frac{2\Omega}{j} - K_j\dot\phi_j\right)\dot b_j\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial b_j} = \pi\chi\left[\left(K_j\dot{\phi}_j - \frac{2\Omega}{j}\right)\dot{a}_j + \left(l_j\dot{\phi}_j^2 - 4\Omega\dot{\phi}_j + C_j\Omega^2\right)b_j\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_j} = 0\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial a_j} = \pi\mu n_j^2 a_j\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial b_j} = \pi\mu n_j^2 b_j\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial \varphi_j} = 0\ ,$$

где $\mu = EJ\,/\,r^3$, $n_j = j^2 - 1$.

Уравнениями связи является равенство нулю перемещений по координате U в точках опор

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \cos(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_i)) + \sum_{i=1}^{N} b_i \sin(i(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_i)) = 0\ , \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \cos(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_i)) + \sum_{i=1}^{N} b_i \sin(i(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_i)) = 0\ . \qquad (5)$$

Здесь 2α - угол между опорами.

Производные этих условий по координатам дают зависимости

$$e_{1a} = \cos\left(j\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right),\quad e_{2a} = \cos\left(j\left(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right),$$

$$e_{1b} = \sin\left(j\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right),\quad e_{2b} = \sin\left(j\left(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right),$$

$$e_{1\varphi} = -ja_j \sin\left(j\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right) + jb_j \cos\left(j\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right),$$

$$e_{2\varphi} = -ja_j \sin\left(j\left(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right) + jb_j \cos\left(j\left(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right).$$

Используя полученные зависимости, запишем дифференциальные уравнения поведения кольца с опорами

$$C_j\ddot{a}_j + \left(2K_j\dot{\varphi}_j - \frac{4\Omega}{j}\right)\dot{b}_j + \left(\gamma n_j^2 - l_j\dot{\varphi}_j^2 + 4\Omega\dot{\varphi}_j - C_j\Omega^2\right)a_j + K_j\ddot{\varphi}_j b_j =$$

$$= \lambda_1 \cos\left(j\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right) + \lambda_2 \cos\left(j\left(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right), \qquad (6)$$

$$C_j\ddot{b}_j + \left(\frac{4\Omega}{j} - 2K_j\dot{\varphi}_j\right)\dot{a}_j - K_j\ddot{\varphi}_j a_j + \left(\gamma n_j^2 - l_j\dot{\varphi}_j^2 + 4\Omega\dot{\varphi}_j - C_j\Omega^2\right)b_j =$$

$$= \lambda_1 \sin\left(j\left(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right) + \lambda_2 \sin\left(j\left(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_j\right)\right), \qquad (7)$$

$$\left[C_j\ddot{a}_j + \left(2K_j\dot{\varphi}_j - \frac{4\Omega}{j}\right)\dot{b}_j + K_j\ddot{\varphi}_j b_j\right]b_j -$$

$$-\left[C_j\ddot{b}_j+\left(\frac{4\Omega}{j}-2K_j\dot{\varphi}_j\right)\dot{a}_j-K_j\ddot{\varphi}_j a_j\right]a_j=$$

$$=\lambda_1\left[-a_j\sin\left(j\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)+b_j\cos\left(j\left(\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)\right]+$$

$$+\lambda_2\left[-a_j\sin\left(j\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)+b_j\cos\left(j\left(\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j\right)\right)\right], \qquad (8)$$

$$(j=1,2,\dots,N),$$

где $\gamma=\mu/\chi$, $\lambda_1=\beta_1/\pi\chi$, $\lambda_2=\beta_2/\pi\chi$.

Анализ данной системы уравнений показывает, что уравнение (8) для φ_j может быть получено из (6) и (7) для a_j, b_j (j = 1, 2, ..., N) путем умножения уравнений (6) на b_j, уравнений (7) на a_j, вычитания из первого произведения второго и умножения результата на j . Отсюда следует, что решению системы (6), (7) для a_j, b_j (j = 1, 2, ..., N) удовлетворяет любая функция φ, задающая прецессию стоячей волны во вращающемся кольце с опорами. Для уточнения характера этой функции рассмотрим систему дифференциальных уравнений (6), (7) для коэффициентов $a_j(t)$, $b_j(t)$, которая решается совместно с условиями связи в точках опор (3), (4). Данная система будет задавать периодическое решение, соответствующее установившемуся колебанию кольца, только в том случае, если коэффициенты ее будут константами. Коэффициенты перед $\dot{a}_j$, $\dot{b}_j$ будут константами в том случае, если $\dot{\varphi}_j$ является константой. Тогда коэффициент $K_j\ddot{\varphi}_j=0$, а $\gamma n_j^2-l_j\dot{\varphi}_j^2+4\Omega\dot{\varphi}_j-C_j\Omega^2$ будет константой для любого j. Другим условием для определения φ_j является условие прецессионного движения стоячей волны внутри диапазона углов, заданных положением опор. Это будет при $\dot{\varphi}_j=\text{const}$ в том только случае, если $\dot{\varphi}_j=\Omega$ (j=1,2,...,N).

Тогда

$$\varphi_j=\Omega t,\quad \pi+\alpha-\Omega t+\varphi_j=\pi+\alpha,\quad \pi-\alpha-\Omega t+\varphi_j=\pi-\alpha$$

и система уравнений (6), (7) является линейной с постоянными коэффициентами.

Таким образом, доказано, что при возникновении во вращающемся кольце с опорами установившихся периодических колебаний прецессия стоячей волны может происходить с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения кольца.

Аналогичные результаты автор получил и для вращающейся на двух опорах оболочки с нерастяжимой и растяжимой средней линией.

Также было получено доказательство, что кроме рассмотренного выше установившегося прецессионного движения возбужденной стоячей волны во вращающемся кольце с опорами может существовать периодическое прецессионное движение с частотой, равной первой собственной частоте колебаний кольца, обусловленной наличием опор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. – М.: Наука, 1985. -125 с.
2. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний.– М.: Наука, 1988. -326 с.
3. Басараб М. А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. Математическое моделирование физических процессов в гироскопии.– М.: Радиотехника, 2005. -312с.
4. Полунин А. И. Математическое моделирование динамики упругого вращающегося кольца при наличии двух опор.// Известия РАН. МТТ. 1999.– №6.–С. 153 – 158.

620,9:662.92

ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЕ МАШИН И МАШИННЫХ АГРЕГАТОВ

Канд.техн.наук, доц. П. М. БЫКОВ, д-р.техн.наук, проф. Г. И.ШАРОВ

Проанализированы существующие методы защиты деталей от износа, направленные на энергосбережение машин и машинных агрегатов. Проведён анализ традиционных методов. Предложен наиболее оптимальный вариант повышения энергосбережения, позволяющий при введении в зону контакта серпентино-магниевого со-