№ 9 2008

РАЗНОЕ

518.12:539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА ЦИЛИНДРА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Канд.техн.наук,доц.А.Е. Мартьянова

Рассматривается применение МКЭ при исследовании скользящего контакта цилиндра с упругой полуплоскостью с целью изучения точности метода. Процедура решения задачи реализована МКЭ для плоского треугольного элемента при упругом поведении материала. Рассмотрено влияние размеров расчетной схемы, числа узлов и сгущения узлов сетки конечных элементов.

Метод конечных элементов (МКЭ) в настоящее время является самым популярным численным методом для прочностных и других видов расчетов как наиболее удобный для реализации на ЭВМ, благодаря четкой формализации отдельных этапов решения задачи и матричной форме расчета [1]. Использование МКЭ для исследования скользящего контакта цилиндра с упругой полуплоскостью в условиях плоской задачи (плоской деформации) рассмотрено ниже. Ось цилиндра параллельна оси z выбранной системы координат. Таким образом, скольжение цилиндра осуществляется перпендикулярно его оси. Зададим соотношение между касательными усилиями и нормальными давлениями при скользящем контакте. Предполагается, что для каждой элементарной площадки области контакта применим закон трения скольжения Амонтона, согласно которому $\dfrac{q(x,z)}{p(x,z)} = \dfrac{|Q|}{P} = \nu$, где ν – постоянный коэффициент трения скольжения, значение которого определяется свойствами материалов и физическими условиями на поверхности контакта.

Если цилиндр и полуплоскость, по которой он скользит, имеют одинаковые упругие свойства, ширина зоны контакта и распределение нормальных давлений определяется теорией Герца $p(x) = \dfrac{2P}{\pi a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2}$, где a – полуширина площадки контакта, P – нормальная сила на единицу длины оси z, вдавливающая цилиндр в полуплоскость. Тогда, принимая закон трения Амонтона, для касательных усилий имеем

$q(x) = \pm\frac{2\nu P}{\pi a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2}$, где ν – постоянный коэффициент трения скольжения, знак «минус» соответствует положительному направлению скорости **V** (рис. 1).

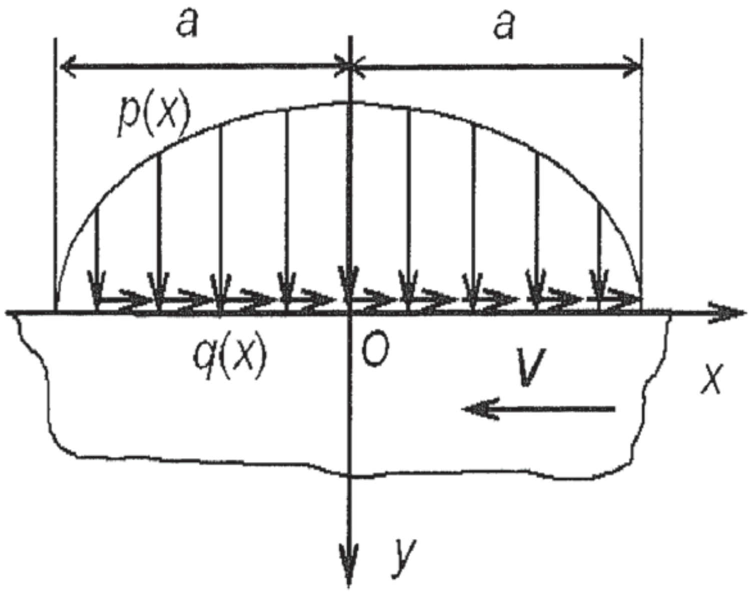

Рис. 1. Упругая полуплоскость, нагруженная усилиями $p(x)$ и $q(x)$

Напряжения в произвольной точке (x, y) через величины m и n, введенные согласно определениям [2],будут

$$m^2 = 1/2\left\{\left[\left(a^2 - x^2 + y^2\right)^2 + 4x^2y^2\right]^{1/2} + \left(a^2 - x^2 + y^2\right)\right\},$$

$$n^2 = 1/2\left\{\left[\left(a^2 - x^2 + y^2\right)^2 + 4x^2y^2\right]^{1/2} - \left(a^2 - x^2 + y^2\right)\right\},$$

где знаки величин m и n совпадают со знаками y и x соответственно. Тогда выражения для напряжений принимают вид:

$$\sigma_x = -\frac{p_0}{a}\left[m\left(1 + \frac{y^2 + n^2}{m^2 + n^2}\right) - 2y\right] + \frac{q_0}{a}\left[n\left(2 - \frac{y^2 - m^2}{m^2 + n^2}\right) - 2x\right],$$

$$\sigma_y = -\frac{p_0}{a}m\left(1 - \frac{y^2 + n^2}{m^2 + n^2}\right) + \left[-\frac{q_0}{a}n\frac{m^2 - y^2}{m^2 + n^2}\right] \qquad (1)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{p_0}{a}n\frac{m^2 - y^2}{m^2 + n^2} + \left[-\frac{q_0}{a}m\left(1 + \frac{y^2 + n^2}{m^2 + n^2}\right)\right].$$

где p_0 – максимальное нормальное давление, $q_0 = \nu \cdot p_0$ – касательное усилие в точке $x = 0$.

Состояние текучести большинства пластичных материалов обычно описывается критерием энергии сдвиговой деформации Мизеса [2]. В качестве критерия наступления пластической деформации для металлов принят критерий энергии сдвиговой деформации Мизеса $\tau_{max} = k = \sigma_T / \sqrt{3}$, где σ_T – предел текучести металлов, τ_{max} – максимальное касательное напряжение.

Главные напряжения плоского напряженного состояния рассчитываются по формулам $\sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$, максимальных (экстремальных) касательных напряжений – $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

МКЭ реализован в пакете Mathcad для плоского треугольного элемента при упругом поведении материала. Треугольный элемент завоевал популярность благодаря простоте задания постоянного значения деформации внутри элемента, а также ввиду удобства описания геометрических характеристик сложных конструкций [3]. Был выбран вариант сетки конечных элементов, фрагмент которой представлен на рис. 2, *а*, как реализующий качественно лучшее соответствие теоретическому распределению напряжений.

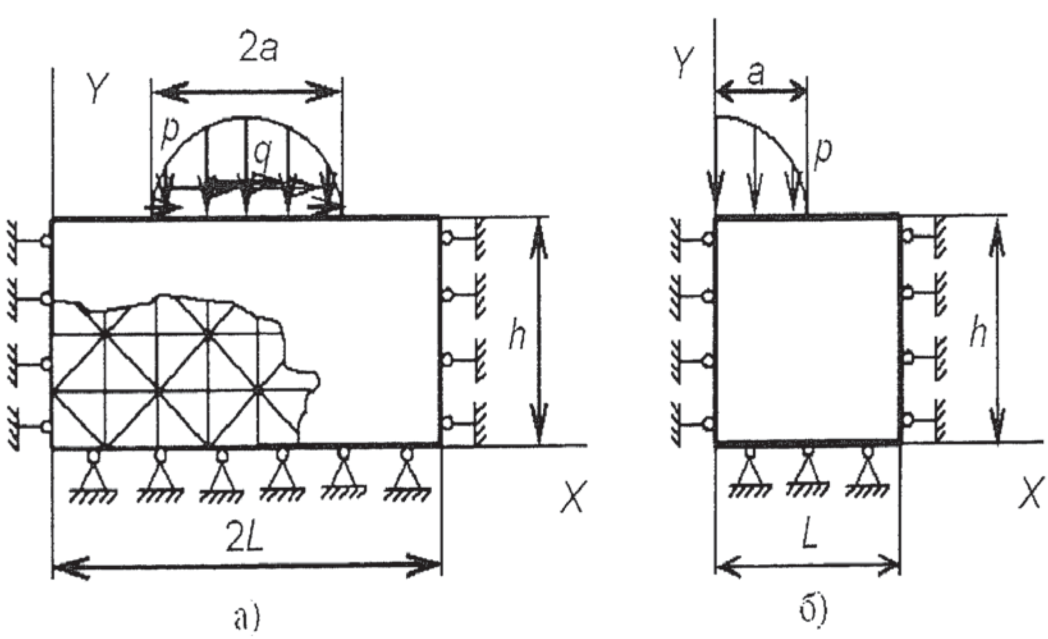

Рис. 2. Расчетная схема задачи:
а- скользящий контакт цилиндра (действуют нормальные давления и касательные усилия);*б*- нормальный контакт цилиндра (действуют только нормальные давления)

Упругая полуплоскость расчетной схемы задачи смоделирована прямоугольной пластиной размерами $2L$ и h, находящейся в условиях плоской деформации (рис. 2, *а*). Нижняя граница пластины имеет условия закрепления u_x, $u_y = 0$ (запрещены перемещения вдоль осей X и Y). На боковых сторонах пластины реализованы условия закрепления $u_x = 0$ (запрещены перемещения вдоль оси X). Пластина нагружена распределенными нормальными давлениями $p(x) = \frac{2P}{\pi a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2}$ и касательными усилиями $q(x) = -\frac{2\nu P}{\pi a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2}$, действующими на $(-a \le x \le a)$, где $a = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м, $P = 1 \cdot 10^4$ Н/м. Модуль упругости материала пластины $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Соотношения длин сторон и сами длины сторон пластины изменялись. Коэффициент трения скольжения ν принимался равным: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Для случая контакта цилиндра с упругой полуплоскостью в условиях плоской задачи расчетная схема представлена на рис 2, б). Пластина нагружена распределенными нормальными давлениями $p(x) = \frac{2P}{\pi a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{1/2}$, действующими на $(-a \le x \le a)$, где $a = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м, $P = 1 \cdot 10^4$ Н/м. По условиям симметрии смоделирована только половина пластины, в плоскости симметрии вводятся соответствующие закрепления $u_x = 0$ (запрещены перемещения вдоль оси X).

Кроме того, при разбиении контура пластины на конечные элементы была учтена возможность задания сгущения узлов по осям X и Y к указанному узлу. В этом случае распределение узлов по осям X и Y осуществлялось в соответствии с законом геометрической прогрессии.

По (1) рассчитаны значения напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{max}, возникающих при контакте цилиндра с упругой полуплоскостью. Расчеты проводились при задании разного числа узлов элементов по осям X и Y при различных вариантах длин границ пластины и их соотношений расчетной схемы. Основные результаты расчетов максимальных значений напряжений τ_{max} представлены в табл. 1 и 2. Результаты расчетов, выполненных по схеме рис. 2, *б*, приведены в табл. 1, по схеме рис. 2, *а* – в табл. 2. Коэффициент трения скольжения ν в табл. 2 везде равен 0,2. Сетка равномерная.

Таблица 1

Погрешность ε расчета напряжений τ_{max}, %,(рис. 2, *б*)

Число узлов по X / Y	ε, %
Размеры пластины $L = 3*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 1$, $L/a = 2$)	
11*11	14,4
11*21	14,4
11*41	14,0
21*11	13,5
21*21	14,3
21*41	14,8
41*21	14,2
Размеры пластины $L = 3*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($L/h = 0{,}5$, $L/a = 2$)	
11*21	10,3
21*41	10,1
Размеры пластины $L = 3*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м ($L/h = 0{,}25$, $L/a = 2$)	
11*81	10,2
Размеры пластины $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 2$, $L/a = 4$)	
21*11	19,3
21*21	19,2
Размеры пластины $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($L/h = 1$, $L/a = 4$)	
11*11	25,8
21*21	13,1
21*41	13,1
Размеры пластины $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м ($L/h = 0{,}5$, $L/a = 4$)	
21*41	10,8
Размеры пластины $L = 9*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 3$, $L/a = 6$)	
31*11	19,7
Размеры пластины $L = 9*10^{-4}$ м и $h = 9*10^{-4}$ м ($L/h = 1$, $L/a = 6$)	
31*31	10,7
Размеры пластины $L = 12*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 4$, $L/a = 8$)	
41*11	19,8
Размеры пластины $L = 12*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($L/h = 2$, $L/a = 8$)	
41*21	15,0
Размеры пластины $L = 12*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м ($L/h = 1$, $L/a = 8$)	
21*21	22,9
41*41	8,9
Размеры пластины $L = 24*10^{-4}$ м и $h = 24*10^{-4}$ м ($L/h = 1$, $L/a = 16$)	
41*41	20,5

Таблица 2

Погрешность ε расчета напряжений τ_{max}, %, (рис. 2, *а*)

Число узлов по X / Y	ε, %
Размеры пластины $2L = 6*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($2L/h = 2$, $L/a = 2$)	
21*11	14,0
41*21	15,2
Размеры пластины $2L = 6*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($2L/h = 1$, $L/a = 2$)	
21*21	9,4
Размеры пластины $2L = 6*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м ($2L/h = 0,5$, $L/a = 2$)	
21*41	9,3
Размеры пластины $2L = 6*10^{-4}$ м и $h = 24*10^{-4}$ м ($2L/h = 0,25$, $L/a = 2$)	
21*81	9,2
Размеры пластины $2L = 12*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($2L/h = 2$, $L/a = 4$)	
41*21	12,5
Размеры пластины $2L = 12*10^{-4}$ м и $h = 9*10^{-4}$ м ($2L/h = 1,25$, $L/a = 4$)	
41*31	10,4
Размеры пластины $2L = 12*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м ($2L/h = 1$, $L/a = 4$)	
41*41	10,1
Размеры пластины $2L = 24*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($2L/h = 6$, $L/a = 8$)	
81*11	19,7
Размеры пластины $2L = 24*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($2L/h = 4$, $L/a = 8$)	
81*21	14,5

Установлено, что между результатами, полученными МКЭ, и теоретическими результатами, рассчитанными по (1), нет полного соответствия.

Из табл. 1 видно, что с увеличением числа узлов конечных элементов по X/Y при одних и тех же размерах пластины точность расчета практически не меняется, например, для $L = 3*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 1$) и чисел узлов по X/Y: 11*11, 11*21, 11*41 – погрешности составляют от 14,4 до 14,0%, для тех же размеров и чисел узлов по X/Y: 21*11, 21*21, 21*41 – погрешность возрастает от 13,5 до 14,8%; для размеров пластины $L = 3*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($L/h = 0,5$) и чисел узлов по X/Y: 11*21, 21*41– погрешности составляют 10,3% и 10,1% соответственно; для размеров пластины $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 2$) и чисел узлов по X/Y: 21*11, 21*21– погрешности составляют 19,3% и 19,2 соответственно; для размеров пластины $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($L/h = 1$) и чисел узлов по X/Y: 21*21, 21*41 погрешности составляют 13,1% и т.д.

Сравнение результатов расчетов для $L = 12*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м ($L/h = 1$) при числах узлов 21*21 и 41*41 по X/Y показывает, что здесь погрешности – соответственно

22,9 и 8,9%. Это объясняется тем, что площадка контакта при числе узлов 21*21 по *X*/*Y* моделируется малым числом узлов в контакте, явно недостаточным для обеспечения точности расчетов – четыре узла для полуширины площадки контакта, в то время как для остальных вариантов расчетов число узлов для полуширины площадки составляло либо шесть, либо одиннадцать, либо двадцать один узел. Для сравнения рассмотрим вариант с числом узлов в контакте, равным четырем при $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м ($L/h = 1$) и числе узлов по *X*/*Y* 11*11, здесь погрешность составляет 25,8%, поскольку площадка контакта и здесь моделируется четырьмя узлами для полуширины площадки контакта.

В то же время рассмотрение пластины с размерами $L = 3*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 1$) с числом узлов по *X*/*Y* 11*11 (шесть узлов в контакте) и 21*21 (одиннадцать узлов в контакте) показывает, что при увеличении числа узлов в два раза значительного увеличения точности расчета не произошло, погрешности соответственно составляют 14,4 и 14,3%. Уменьшение погрешности заметно при рассмотрении вариантов с соотношением сторон $L/h = 1$ при увеличении длин сторон ($L = 3*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м, $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 6*10^{-4}$ м, $L = 9*10^{-4}$ м и $h = 9*10^{-4}$ м, $L = 12*10^{-4}$ м и $h = 12*10^{-4}$ м) и числами узлов по *X*/*Y*: 11*11, 21*21, 31*31 и 41*41 соответственно (число узлов в контакте везде равно шести, шаг узлов по *X*/*Y* везде остается одинаковым), когда погрешности составляют соответственно 14,4; 13,1; 10,7 и 8,9%. С ростом длин сторон и одновременным увеличением числа узлов по *X*/*Y* эта тенденция сохраняется. Очевидно, что здесь на точность расчета влияет фактор абсолютного увеличения длин сторон пластины и, следовательно, снижение влияния условий закрепления на нижней и боковых границах пластины расчетной схемы.

Подобные закономерности прослеживаются также и при исследовании скользящего контакта цилиндра с упругой полуплоскостью в условиях действия нормальных давлений и касательных усилий (табл. 2). Расчет проводился для коэффициента трения скольжения $\nu = 0{,}2$. С увеличением числа узлов конечных элементов по осям *X*/*Y* при одних и тех же размерах пластины точность расчета максимальных значений напряжений τ_{max} изменяется мало. Например, для $L = 6*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м ($L/h = 2$) и чисел узлов по *X*/*Y*: 21*11 и 41*21 погрешность расчета возрастает с 14,0 до 15,2% соответственно. С ростом длин сторон при сохранении соотношения сторон $2L/h$ и одновременным пропорциональным увеличением числа узлов по *X*/*Y* существует тенденция уменьшения погрешности расчета напряжений τ_{max}. Например, для соотношения сторон $L/h = 2$ при увеличении длин сторон ($L = 6*10^{-4}$ м и $h = 3*10^{-4}$ м, $L = 12*10^{-4}$ м и $h =$

$6*10^{-4}$ м) и чисел узлов по *X/Y*: 21*11, 41*21 соответственно (число узлов в контакте равно одиннадцати, шаг узлов по *X/Y* одинаковый) погрешности составляют соответственно 14,0 и 12,5%. Здесь на точность расчета влияет фактор абсолютного увеличения длин сторон пластины и, следовательно, снижения влияния условий закрепления на нижней и боковых границах пластины расчетной схемы.

С целью определения влияния длин сторон пластины на точность расчета рассматривался вариант $L/h = 1$ при увеличивающихся длинах сторон на расчетной схеме, представленной на рис. 2, *б*. Для экономии вычислительных ресурсов компьютера осуществлялось сгущение узлов при числе узлов по *X/Y* равным 41*41. Сгущение узлов производилось в одинаковой степени по осям *X* и *Y* одновременно с увеличением длин сторон пластины таким образом, что число узлов в полуконтакте всегда оставалось равным шести. Результаты этих вычислений показаны на графике рис. 3.

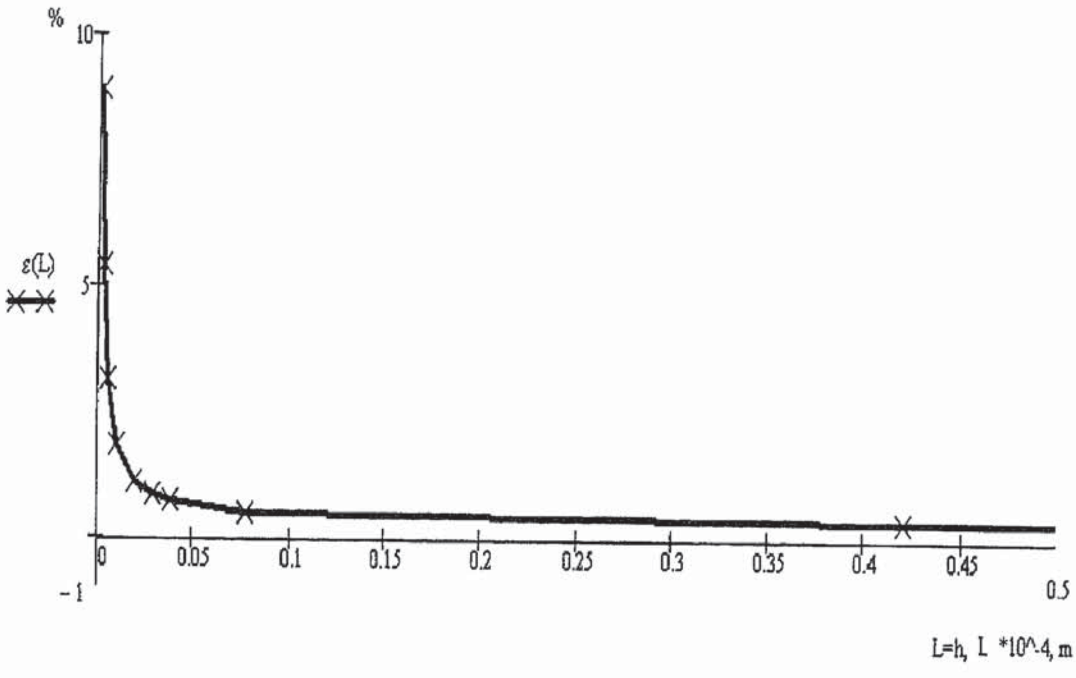

Рис. 3 Зависимость погрешности ε расчета напряжений τ_{max} от длины *L*

По рис. 3 видно, что при достижении определенной длины стороны пластины (L/a = 128), погрешность расчета ε составляет величину чуть более одного процента. Начиная с соотношения $L/a = 20$ и более можно говорить о малом влиянии граничных условий расчетной схемы на точность расчета, так как погрешность расчета τ_{max} составляет менее пяти процентов.

В табл. 3 приведены погрешности ε расчета τ_{max} МКЭ для размеров пластины $2L = 72*10^{-4}$ м и $h = 36*10^{-4}$ м ($2L/h = 2$, $L/a = 24$) на сетке со сгущением при числе узлов по

X/Y 61*31 при изменяющихся коэффициентах трения скольжения ν: 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Напряжения τ_{max} определялись на: 1) глубине $y/a = 0,77$ ($y = 1,144*10^{-4}$), на которой напряжения τ_{max} достигают максимального из рассчитанных на рассматриваемой сетке значений; 2) поверхности упругой полуплоскости; 3) глубине $y = 2.491*10^{-5}$ под поверхностью. Число узлов в контакте везде равно одиннадцати.

Таблица 3

Погрешность ε расчета напряжений τ_{max}, %, (рис. 2, *а*)

Размеры пластины $2L = 72*10^{-4}$ м и $h = 36*10^{-4}$ м ($2L/h = 2$, $2L/a = 24$), число узлов по X/Y 61*31			
коэффициент трения ν	Максимальное значение	на поверхности	на глубине $2.491*10^{-5}$
0,1	3,4	-17,6	2,5
0,2	3,4	-18,4	1,4
0,3	3,4	-18,6	0,6
0,4	3,4	-18,6	0,2
0,5	3,4	-18,7	-0,1

Погрешности на глубине $y/a = 0,78$ составляют около 3,4%, что сопоставимо с расчетами на схеме (рис. 2, *б*) при действии только распределенных нормальных усилий (расчет на сетке с тем же сгущением при числе узлов по X/Y 31*31 дает значение 3,9%). Еще меньше погрешность на глубине $2.491*10^{-5}$. Большие погрешности на поверхности упругой полуплоскости объясняются тем, что в контакте всего одиннадцать узлов. Тем не менее максимальное значение погрешности на поверхности составляет всего 18,7% (для $\nu = 0,5$) по абсолютному значению.

Таким образом, нами рассмотрено применение МКЭ к исследованию скользящего контакта цилиндра с упругой полуплоскостью в условиях плоской задачи. Процедура решения задачи МКЭ для плоского треугольного элемента при упругом поведении материала реализована в пакете Mathcad. Расчеты производились для различных чисел узлов элементов по осям X и Y при различных вариантах длин границ пластины и их соотношений.

На точность решения задачи МКЭ оказывают влияние условия закрепления на границах пластины расчетной схемы. С увеличением числа узлов конечных элементов по осям X и Y при одних тех же размерах пластины и полуширины контакта после достижения определенного числа узлов в контакте точность расчета напряжений τ_{max} не увеличивается. На точность решения МКЭ оказывают влияние степень сгущения сетки конечных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Джонсон К., Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 506 с.
3. Галлагер Р., Метод конечных элементов: Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

ВНИМАНИЕ. В № 12 журнала «Известия вузов. Машиностроение» за 2007г. по вине авторов допущена опечатка.

В статье [1] формулу определения площади очищенного участка поверхности древесины следует записать в следующем виде:

$$S_{П} = 2tv_{TP}\sqrt{\frac{2{,}88v_0\rho d_0^2}{\rho_{жк}ht(\omega^2_{угл\max} - \omega^2_{угл})}}$$

где $\rho_{жк}$ – плотность воды и содержащейся в ней коры древесины,

h – толщина коры древесины,

t – время обработки древесины струей воды.

[1]. Егошин Е.В. Способ окорки поверхностных пороков древесины вращающимися гидравлическими струями /Е.В.Егошин, А.Я.Полянин/ Известия ВУЗов. Сер. "Машиностроение".- 2008.- № 12.- С. 54-57.