РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ МАШИН

539.311

ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТРЕЗКА ЭЛАСТИЧНОЙ НИТИ С НЕПОДВИЖНЫМ КОНЦОМ

Канд.техн.наук,доц. П. Г.РУСАНОВ

Вследствие действия сил тяжести свободно висящая, исходно однородная, гибкая растяжимая нить в состоянии равновесия имеет неравномерное распределение масс и удельной жесткости на растяжение, что усложняет расчет ее спектра собственных частот колебаний в продольном и поперечных направлениях. Численный расчет выполнен на основе дискретной модели метода твердых тел.

Данное исследование дополняет работы [1-3], посвященные анализу собственных колебаний нити с помощью дискретных расчетных моделей сплошной среды, сформированных на основе метода твердых тел (МТТ). В задачах динамики гибких стержней МТТ имеет неоспоримые преимущества перед МКЭ в технологии формирования математической модели и учета физических условий, а также в точности итоговых результатов.

Объектом исследования является свободно висящий отрезок однородной гибкой нити из эластика с одним закрепленным концом в точке O (рис. 1,*а*, ось Oy - вертикальна, g - ускорение однородного поля силы тяжести). Из-за действия сил тяжести статическое напряженно- деформированное состояние нити неравномерно. При этом материал верхнего участка нити испытывает наибольшие продольные и поперечные деформации. Тем самым любые два, исходно недеформированные, участка нити, равной длины, но расположенные в разных частях нити, в статическом состоянии в поле силы тяжести будут иметь различные длины, размеры поперечных сечений и, следовательно, разные жесткости и моменты инерции масс. Несложный опыт с резиновой жилкой, длиной 70 см, диаметром 1,5 мм, подтвердил нелинейность ее статической нагрузочной характеристики $\Delta = \Delta(P)$, т.е. зависимости ее удлинения Δ от величины продольной силой P.

Цель исследования – разработать методику для оценки влияния начального напряженного статического состояния отрезка эластичной нити на низшие частоты плоских собственных колебаний, если заданы: M, L, S_0 – масса, длина, площадь круглого поперечного сечения; E, $\mu = 1/2$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала, который считаем линейно упругим телом.

Следуя идеям В.Л. Бидермана [4] и МТТ, исследуем колебания эластичной нити, заменив ее плоской дискретной моделью (рис. 1,б), состоящей из одинаковых n - инерционных элементов (ИЭ) и n - упругих элементов (УЭ) – отрезков невесомой эластичной нити, условно изображенных пружинами. ИЭ представим в виде двух сочлененных твердых тел равной массы. Моменты инерции массы ИЭ производим как для тонкого однородного стержня с изменяемой длиной. Масса ИЭ - $m = M/n$, собственная длина УЭ - $l = L/n$, номинальный коэффициент жесткости каждого УЭ в свободном состоянии $c^* = nc_0$; $c_0 = \dfrac{ES_0}{L}$ - номинальный коэффициент жесткости нити на растяжение. Пары, составленные из УЭ и ИЭ, соединены идеальными шарнирами между собой и с опорой O.

Индивидуальные значения коэффициентов жесткости нелинейно-упругих УЭ в состоянии равновесия дискретной схемы выберем так, чтобы в поле силы тяжести удлинения УЭ были близки к статическим удлинениям соответствующих участков исследуемой эластичной нити. При этом считаем, что в пределах УЭ постоянны ε_i - величина относительной деформации в продольном направлении и его площадь поперечного сечения. Относительная деформация эластика в продольном направлении нити $\varepsilon > 0$ увеличивает моменты инерции массы ее участков вокруг поперечных осей и вызывает поперечную деформацию $\mu\varepsilon$, что ведет к сокращению площади поперечного сечения $S = S_0(1-\mu\varepsilon)^2$ и снижению ES - удельной жесткости сечений. Отмеченные особенности статического состояния эластичной нити учитываем в формулах для $J_i = m(l+\Delta_i)^2/12$ - момента инерции масс ИЭ вокруг центральной поперечной оси и $c_i = \dfrac{ES_0(1-\mu\varepsilon_i)^2}{l+\Delta_i} = nc_0\dfrac{(1-\mu\varepsilon_i)^2}{1+\varepsilon_i}$ - коэффициента жесткости УЭ ($i = \overline{1,\ n}$).

Здесь $\Delta_i = \varepsilon_i l > 0$ - статическое удлинение УЭ.

Величину ε_i рассчитаем на основании нелинейной связи между продольной силой и удлинением Δ_i,

$$\int_0^{\Delta_i} c_i(\Delta)\,d\Delta = mg(n-i+1/2). \qquad (1)$$

Преобразуя к явному виду, получим $\displaystyle\int_0^{\varepsilon_i} \frac{(1-\mu\varepsilon)^2}{1+\varepsilon}\,d\varepsilon = \varepsilon_0(n-i+1/2)/n$,3

где $\gamma = mg/l = Mg/L$ - погонный удельный вес эластика в свободном состоянии, $\varepsilon_0 = \gamma/c_0 = \Delta_0/L$ - номинальная осевая деформация и $\Delta_0 = Mg/c_0$ – номинальное статическое удлинение нити при неизменном коэффициенте жесткости от сосредоточенной продольной силы, равной Mg - весу нити.

Последующие расчеты параметров статического состояния, а также аналитическое формирование матриц *A*, *C* и расчеты частот колебаний выполнены с помощью программы *Maple* при $n = 20$. Исследованиями [1, 2] установлено, что уже при $n > 5$ точность результатов МТТ для нити в сходных физических условиях приемлема для инженерной практики. В связи с этим опускаем вопросы сходимости результатов в зависимости от числа элементов.

Значения ε_i в состоянии равновесия, предваряющие анализ частот продольных и поперечных колебаний, рассчитываем для случая $\varepsilon_0 = 0{,}4$, что соответствует коэффициенту жесткости нити $c_0 = 2{,}5\ Mg/L$. Отметим, что при $\varepsilon_0 > 0.483$ численные решения (1) для ε_i перестают удовлетворять условию неотрицательности величин поперечных размеров сечения: $1 - \mu\varepsilon_i > 0$.

Влияние ε_0 – номинальной осевой деформации нити на ε_1- деформацию и c_1 -коэффициент жесткости верхнего УЭ при $n = 20$ отражено в табл. 1

Таблица1

	Номинальная осевая деформация нити ε_0											
	0,4	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,481	0,482	0,483
ε_1	0.741	0.786	0.836	0.893	0.958	1.03	1.13	1.26	1.50	1,55	1.60	1.68
c_1/c^* [%]	22,7	20,6	18,4	16,2	13,9	11,4	8,85	5,99	2,46	2,01	1,51	0,93

С ростом номера УЭ монотонно изменяются ε_i – осевые деформации и отношения c_i/c^* [%] - коэффициентов жесткости в состоянии равновесия. Закон их распределения виден из табл. 2 на примере нечетных номеров УЭ.

Таблица 2

i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
ε_i[-]	0,741	0,592	0,478	0,385	0,306	0,238	0,178	0,124	0,075	0,031
c_i/c^* [%]	22,7	31,1	39,2	47,1	54,9	62,7	70,5	78,3	86,1	94,0

В статике величины продольных сил у самого верхнего и самого нижнего УЭ отличаются в $2n\text{-}1=39$ раз, но при этом, из-за значительного снижения коэффициента жесткости c_1 верхнего УЭ, его ε_1- осевая деформация в 74 раза больше, чем $\varepsilon_{20} = 0{,}0101$ у нижнего УЭ.

Найденные значения ε_i позволяют рассчитать Δ_i, c_i, J_i – индивидуальные механические характеристики УЭ и ИЭ в состоянии равновесия. Таким образом, исходно однородная сплошная среда - эластик в задаче расчета малых колебаний в однородном поле силы тяжести предстает в образах МТТ как неоднородная дискретная система с конечным числом степеней свободы $r=2n$.

Исследование ее собственных частот колебаний в вертикальной плоскости Oxy сводим к формированию $A=(a_{ij})$, $C=(c_{ij})$ - матриц инерции и жесткости линейной системы ДУ возмущенного движения 1-го приближения

$$A\ddot{\overline{q}} + C\overline{q} = 0 , \tag{2}$$

где $\vec{q}$ - вектор обобщенных координат q_i, $dimA=dimC=r\times r$, $dim\,\vec{q}=r$,

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j},\ c_{ij}=\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\partial q_j},\ T=\sum_{k=1}^{n}T_k = T(\overline{q},\dot{\overline{q}})\Big|_{\overline{q}=0}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j/2,$$

$\Pi=\sum_{k=1}^{n}\Pi_k=\Pi(\overline{q})=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}c_{ij}q_iq_j/2$ - кинетическая и потенциальная энергии дискретной системы тел при малых колебаниях.

Положительные корни уравнения

$$det(-p^2A+C)=0 \tag{3}$$

доставляют значения первым r собственным, размерным частотам p_i.

В качестве обобщенных координат, задающих положение тел дискретной системы относительно положения статического равновесия, применим (рис. 1,*б*) x_k – абсциссы подвижных шарнирных узлов, включая точку B ($x_n=x_B$), и λ_k – дополнительные удлинения УЭ. Скорости изменения обобщенных координат из этих двух групп инициируют в положении равновесия, соответственно, взаимно перпендикулярные компоненты скоростей точек. Кроме того квадратичная форма П не содержит произведений типа $x_k\lambda_k$.

Тем самым приходим к выводу, что в данных обобщенных координатах система (2) распадается на две несвязанные подсистемы, описывающие, соответственно, продольные или поперечные колебания, т. е. частоты двух этих типов колебаний дискретной системы тел можно рассчитывать раздельно.

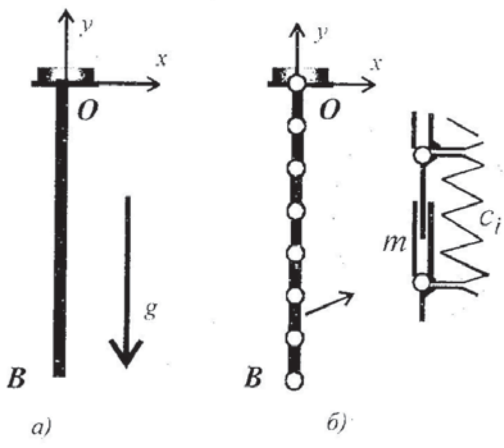

Рис. 1

Случай продольных колебаний ($r=n$). Элементы матрицы инерции a_{ij} формируем на основании явного выражения для квадратичной функции T в равновесном положении дискретной схемы, когда все $x_k=0$, $\lambda_k=0$, а скорости $\dot{x}_k=0$, $\dot{\lambda}_k\neq 0$.

В этом случае кинетическая энергия смежных масс, примыкающих к шарниру с номером k ($k=\overline{2,\ n}$), $T_k = mv_k^{\ 2}/2$; $k=\overline{1,\ n}$ $v_k = v_{k-1}+\dot{\lambda}_k$; $v_1=0$. Для нижней дискретной массы $T_B = m(v_n+\dot{\lambda}_n)^2/4$. Поэтому элементы симметричной матрицы инерции A: $a_{ij}=m(n-j+1/2)$, $j\geq i$, $a_{ji}=a_{ij}$, $i=\overline{1,\ n}$.

При смещении дискретной системы тел из положения равновесия изменение ее потенциальной энергии $\Delta\Pi$ определяется лишь дополнительными удлинениями УЭ: $\Delta\Pi=0.5\sum_{k=1}^{n}c_k\lambda_k^2$, т.е. матрица C - диагональна: $c_{ii}=c_i$, $i=\overline{1,\ n}$.

Согласно (3), значения квадратов размерных частот p_k^2 продольных колебаний пропорциональны отношению $c_0/M=g/(\varepsilon_0 L)$. Поэтому, чтобы иметь возможность сравнивать частоты продольных и поперечных колебаний, вместо размерных p_k рассчитываем безразмерные $s_k = p_k\sqrt{L/g}$ при заданном $\varepsilon_0=0,4$.

Расчетный спектр частот продольных колебаний s_k: 1,54; 5,34; 8,95; 12,5; 15,9; 19,2; 22,4; 25,4; 28,1; 30,7; 33,2; 35,5; 38,0; 40,4; 43,0; 45,8; 48,7; 51,9; 55,6; 60,8. При гипотетически одинаковых коэффициентах жесткости всех УЭ и равных c* частоты спектра составили бы ряд: 2,48; 7,43; 12,3; 17,2; 21,9; 26,5; 30,9; 35,1; 39,2; 42,9; 46,4; 49,7; 52,6; 55,2; 57,4; 59,3; 60,9; 62,0; 62,8; 63,2. Тем самым приходим к выводу, что учет изменения жесткости участков нити снижает первую частоту на 37,8%, а последующие частоты, вплоть до 15-того тона, в среднем, более чем на 25 %.

Случай *поперечных* колебаний ($r=n$). Элементы матрицы инерции a_{ij} формируем по квадратичной функции T в равновесном положении дискретной схемы, когда $x_k=0$, $\lambda_k=0$, скорости $v_k=\dot{x}_k\neq 0$, $\dot{\lambda}_k=0$. Так как $\dot{\lambda}_k=0$, то T_k ($k=\overline{1,\ n}$) каждого ИЭ оцениваем, полагая его *однородным* стержнем массой m, длиной $l+\Delta_k$ [1]: $T_k = m(v_{k-1}^{\ 2}+v_{k-1}v_k+v_k^{\ 2})/6$, где $v_0=0$. Тогда матрица A имеет ленточную структуру: $a_{ii}=2m/3$, $a_{ij}=m/6$, $j=i\pm1$; $a_{ij}=a_{ji}=0$, $j>i+1$.

Потенциальная энергия тел в данном случае обусловлена только силами однородного поля силы тяжести. Поэтому сформируем функцию $\Pi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заменив исходную систему распределенных сил тяжести эквивалентной, в виде $n-1$ вертикальных сил mg, приложенных в шарнирных узлах с номерами 1, 2, 3,.. $n-1$ и двух сил, равных $mg/2$, в точках O, B. Тогда, с точностью до величин второго порядка малости относительно $x_i/(l+\Delta_1)$, $\Pi = \dfrac{mg}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1/2)\dfrac{(x_i - x_{i-1})^2}{l+\Delta_i}$, т.е. C - симметричная матрица жесткости имеет ленточную структуру: $c_{ii} = 2(n-i+1/2)\dfrac{mg}{l+\Delta_i}$, $c_{i,i+1} = -(n-i-1/2)\dfrac{mg}{l+\Delta_i}$, $c_{ij}=0, j > i+1$, $c_{ij} = c_{ji}$.

Все элементы матриц A и C имеют общий множитель m, который можно исключить в (3). Однако из этого факта еще не следует независимость частот любых форм собственных поперечных колебаний дискретной системы тел от ее дискретных масс, как это имело место в [1–3], поскольку в c_{ij} входит Δ_i -статическое удлинение УЭ, которое, в свою очередь, зависит от уровня сил тяжести, т.е. масс ИЭ, и от текущей жесткости УЭ.

В расчетный спектр s_k - безразмерных собственных частот поперечных колебаний дискретной схемы входят: 1,04; 2,51; 3,99; 5,52; 7,11; 8,77; 10,5; 12,4; 14,3; 16,5; 18,7; 21,1; 23,7; 26,5; 29,4; 32,6; 36,0; 39,7; 43,8; 48,2. Значения частот этого спектра соответственно на 10 - 15% меньше, чем частоты поперечных колебаний нерастяжимой нити [1], и на 2,5 - 7% меньше, чем собственные частоты условной дискретной схемы с одинаковыми коэффициентами жесткости всех УЭ в состоянии равновесия, равными c^*. Наибольшие отличия (в %) имеют первые низшие частоты сравниваемых спектров.

На основании проведенного анализа для нити из линейно-упругого эластика с номинальным коэффициентом жесткости c_0=2,5 Mg/L приходим к выводам.

1. Нелинейность нагрузочной характеристики $\Delta = \Delta(P)$ обусловлена прогрессивным снижением ES – удельных жесткостей участков нити при росте силы. В поле силы тяжести Δ_1 - статическое удлинение верхнего участка нити более 70% от его начальной длины. Существует ограничение на минимальную величину c_0, при которой еще возможно состояние равновесия.

2. Спектры собственных частот поперечных и продольных колебаний перекрывают друг друга. В обоих спектрах частоты распределены достаточно равномерно. Отличия между соседними частотами s_k находятся в пределах 1,5 - 3 и 4 - 5 единиц, соответственно для спектров поперечных и продольных колебаний, при этом могут «почти» совпадать частоты из разных спектров. Собственные частоты поперечных колебаний нити из эластика на 10 – 15% ниже, чем у нерастяжимой нити той же длины и массы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний в вертикальной плоскости отрезка тяжелой нити.//Известия вузов. Машиностроение. –2008. –№1. –С. 3 - 10.**

2. **Русанов П.Г. Расчет собственных колебаний отрезка тяжелой нити с закрепленными концами «из вертикальной плоскости» //Известия вузов. Машиностроение. –2008. –№2. –С. 3 - 9.**

3. Русанов П.Г. Влияние упругого звена на частоты собственных колебаний вертикально расположенного отрезка тяжелой нити//Известия вузов. Машиностроение. –2008. –№6. –С. 3 - 7.

4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний.- М.: Высшая школа , 1980,- 408 с.

621.01

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ КАК УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМ КОНТАКТОМ ЗВЕНЬЕВ

Канд.техн..наук,доц.И.Е.ЛЮМИНАРСКИЙ,Канд.техн..наук,доц С.Е.ЛЮМИНАРСКИЙ

Предложен метод расчета кинематической погрешности волновых зубчатых передач, основанный на расчете силового взаимодействия звеньев передачи как упругой системы с односторонними связями. Получена зависимость наибольшей кинематической погрешности ВЗП-80 от смешения кулачка. Показано влияние формы кулачка на кинематическую погрешность волновой передачи.

Кинематическая погрешность (КП) волновой зубчатой передачи (ВЗП) является результатом взаимодействия погрешностей изготовления и установки зубчатых колес. Формальное суммирование результирующих погрешностей дает существенно завышенное значение кинематической погрешности передачи. Это объясняется тем, что в реальной передаче за счет податливостей составляющих передачу звеньев происходит изменение сил в зонах зацепления. Под действием неравных сил в двух зонах зацепления происходят упругие деформации звеньев, в результате чего действующий суммарный вектор погрешности окажется меньше алгебраической суммы результирующих векторов погрешностей узлов. Методики определения кинематической погрешности изложены в [1.2] и других работах. Эти методики учитывают упругие деформации звеньев передачи. Однако в этих работах многопарность и многозонность зацепления учитывается приближенно.

В предлагаемой работе рассматривается методика определения кинематической погрешности ВЗП, основанная на расчете силового взаимодействия элементов ВЗП как упругой системе с односторонними связями [3].

Применяемая методика учитывает: деформацию гибкого колеса как оболочки вращения; возможность контакта каждой пары зубьев в двух зонах зацепления; возможность двухкромочного контакта зубьев; изменение положения точек контакта зубьев по их высоте; эволь-