



ПОКРОВСКИЙ
Алексей Михайлович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

POKROVSKIY
Aleksey Mikhaylovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



ЧЕРМОШЕНЦЕВА
Анна Сергеевна
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

SHERMOSHENTSEVA
Anna Sergeevna
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

Оценка живучести растянутой пластины с поперечной полуэллиптической трещиной

А.М. Покровский, А.С. Чермошнцева

На основе линейной механики разрушения разработана методика прогнозирования долговечности пластины из низкоуглеродистой стали с поперечной полуэллиптической трещиной при циклическом растяжении. К рассматриваемой расчетной схеме можно свести значительное число реальных объектов. Расчет долговечности производится путем решения задачи живучести в детерминированной постановке. Для определения скорости роста трещины используется уравнение Пэриса. Вывод о разрушении делается на основании силового критерия Ирвина. Для определения размаха коэффициента интенсивности напряжений по фронту трещины использованы аппроксимационные выражения. Представлены результаты численного анализа живучести пластины с различными начальными размерами трещин. Установлены закономерности роста трещин при разных соотношениях глубины и длины. Показано, что увеличение длины трещины при условии одинаковой начальной глубины приводит к снижению долговечности пластины, причем по мере увеличения длины трещины это снижение замедляется.

Ключевые слова: механика разрушения, циклическое растяжение, живучесть, долговечность, полуэллиптическая трещина, коэффициент интенсивности напряжений, уравнение Пэриса, критерий Ирвина, скорость роста трещины.

Estimating the survivability of a stretched plate with a transverse semielliptical crack

A.M. Pokrovskiy, A.S. Chermoshentseva

Most laminate parts are exposed to cyclic loads; therefore, estimating their survivability is of great importance. This paper presents the results of numerical analysis of survivability of a plate with initial cracks of various dimensions. A technique for forecasting the durability of a mild steel plate with a transverse semielliptical crack under cyclic tension is developed under the assumptions of the linear fracture mechanics. This design scheme describes a significant number of real objects. The durability is determined by solving the problem of survivability within a deterministic framework. The crack growth rate is calculated using the Paris equation. The Irwin criterion is used to predict failure. The scope of the stress intensity factor at the crack front is determined by approximate relationships. The results of numerical analysis of survivability of a plate with different crack sizes are presented. The mechanisms of crack growth are established for various depth-to-length ratios. It is shown that the plate durability decreases with an increase in the crack length if the initial crack depth does not change, and the rate of increase is slowing down as the crack length increases. Since this subject has not been adequately elucidated in the scientific literature, the pre-

sented material will be useful for professionals in the field of fracture mechanics and survivability.

Keywords: fracture mechanics, cyclic tension stresses, survivability, durability, semi-elliptical crack, stress intensity factor, Paris equation, Irwin criterion, crack growth rate.

Большинство деталей машин функционируют под действием изменяющихся во времени нагрузок. Причем большой класс деталей и элементов конструкций можно отнести к пластинам, работающим в условиях циклически изменяющейся растягивающей нагрузки. По мере увеличения количества циклов в таких деталях происходит зарождение и рост усталостных трещин, которые могут привести к разрушению. Для оценки живучести деталей необходимо разработать методы, позволяющие посредством компьютерного моделирования прогнозировать их долговечность.

В настоящей работе рассматривается пластина из низкоуглеродистой стали длиной 500 мм, шириной 120 мм и толщиной 20 мм, подверженная растягивающему циклически изменяющемуся напряжению. Максимальное напряжение цикла составляет 400, а минимальное 250 МПа. В пластине существует начальная краевая поперечная трещина полуэллиптической формы. В работе используется принцип автомодельности [1], согласно которому принимается, что форма трещины в процессе ее роста остается эллиптической, а изменяются только размеры полуосей. Известно [2], что в вытянутой вдоль поверхности полуэллиптической трещине максимальный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) возникает в наиболее заглубленной точке фронта (расположенной на меньшей полуоси). Поэтому в начальный период нагружения такая трещина в большей степени растет в глубину, что приводит к уменьшению отношения длины трещины к глубине. При этом максимальный КИН может возникнуть уже в точке, выходящей на поверхность пластины, за счет чего более интенсивный рост трещины начинается в длину. Таким образом, разрушение пластины произойдет тогда, когда значение максимального КИН в точке, лежащей на малой или большой полуоси, достигнет критического значения K_{Ic} . Кроме того, разрушение пластины может произойти, если глубина трещины станет равной

толщине пластины. Проанализировать живучесть пластины возможно посредством оценки роста трещины в этой точке от начального до критического значения. Оценка живучести пластины с поперечной полуэллиптической трещиной осуществлялась в детерминированной постановке с использованием уравнения Пэриса, описывающего линейный участок кинетической диаграммы усталостного разрушения [3]:

$$\frac{dl}{dN} = C (\Delta K_I)^m, \quad (1)$$

где l — характерный размер трещины (малая или большая полуоси эллипса); N — число циклов; ΔK_I — размах КИН за цикл, определяемый по размаху напряжений $\Delta \sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$; C , m — эмпирические коэффициенты.

Для определения роста малой и большой полуосей трещины в процессе увеличения числа циклов необходимо проинтегрировать уравнение (1):

$$l = C \int_0^N \Delta K_I^m dN. \quad (2)$$

Численное интегрирование производилось следующим образом. Задавался шаг изменения циклов нагружения и определялось увеличение размеров трещины за каждый шаг в двух точках: наиболее заглубленной и выходящей на поверхность. Причем шаг циклов нагружения определялся численно, исходя из условия неизменности результатов расчета при уменьшении шага.

Поскольку ширина пластины во много раз больше размеров трещины, в расчете можно использовать схему растянутой бесконечной полосы с поперечной полуэллиптической трещиной. Аппроксимационная формула для определения КИН вдоль фронта такой трещины в случае, когда глубина трещины не больше ее полудлины имеет вид [4]

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi b} \left\{ [1,13 - 0,09\varepsilon + (-0,54 + 0,89 / (0,2 + \varepsilon))\lambda^2 + (0,5 - 1 / (0,65 + \varepsilon) + 14(1 - \varepsilon)^{24})\lambda^4] [1 + (0,1 + 0,35\lambda^2)(1 - \sin \Theta)^2] \times (\varepsilon^2 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta)^{0,25} / \sqrt{1 + 1,464\varepsilon^{1,65}} \right\}, \quad (3)$$

где a , b — большая (полудлина трещины) и меньшая (глубина трещины) полуоси эллипса; t — толщина пластины; σ — напряжение, растягивающее пластину; Θ — угол, определяющий точку на фронте трещины ($\Theta=0$ для точки,

выходящей на поверхность, $\Theta = \pi/2$ для наиболее заглубленной точки); $\varepsilon = b/a$; $\lambda = b/t$.

В случае, когда глубина трещины больше ее полудлины аппроксимационная формула имеет следующий вид [4]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi b} \left\{ \left[\sqrt{\varepsilon} (1 + 0,04 \varepsilon) + 0,2 \varepsilon^4 \lambda^2 - 0,1 \varepsilon^4 \lambda^4 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 + (0,1 + 0,35 \varepsilon \lambda^2) (1 - \sin \Theta)^2 \right] \right\} \times \\ \times (\varepsilon^2 \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta)^{0,25} / \sqrt{1 + 1,464 \varepsilon^{1,65}} \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon = a/b$.

Заменяя напряжение σ на размах напряжений $\Delta\sigma$, определяем в зависимости от отношения b/a по формуле (3) или (4) размах КИН по фронту трещины. Подставляя это выражение в формулу (2), получаем окончательное выражение для определения размера трещины

$$l = C (\Delta\sigma \sqrt{\pi})^m \int_0^N (\sqrt{b} F(\varepsilon, \lambda, \Theta))^m dN, \quad (5)$$

где F — аппроксимационное выражение, стоящее в фигурных скобках в формулах (3) или (4).

Эмпирические коэффициенты C и m в общем случае зависят не только от свойств материала, но и от коэффициента асимметрии цикла, однако изменение R в пределах $0,4-0,8$ практически не сказывается на скорости роста усталостной трещины на линейном участке кинетической диаграммы усталостного разрушения [5]. В нашем случае коэффициент асимметрии

$$r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 250 / 400 = 0,625, \quad (6)$$

поэтому для определения m воспользуемся корреляционной формулой, не зависящей от коэффициента асимметрии, рекомендованной для низколегированных сталей [6]

$$m = 4,52 - 0,0026 \sigma_T, \quad (7)$$

где σ_T — предел текучести, МПа.

Подстановка предела текучести, равного для малоуглеродистой стали 500 МПа, приводит согласно (7) к значению $m = 3,32$. Значение коэффициента C для низколегированной стали было принято, согласно усредненным справочным данным, равным $7,45 \cdot 10^{-9}$ мм (МПа·м^{1/2})^{3,32}.

По разработанной методике в среде Fortran Visual 6.5 была создана компьютерная программа для расчета на живучесть растянутой пластины с поперечной полуэллиптической тре-

щиной. При численном определении интеграла (5) на каждом шаге интегрирования по формуле (3) или (4) вычислялся максимальный КИН по фронту трещины и проверялось выполнение критерия Ирвина [1]

$$K_{I \max} \leq K_{Ic}, \quad (8)$$

где K_{Ic} — вязкость разрушения (трещиностойкость). В расчете было принято $K_{Ic} = 65$ МПа·м^{1/2} [7].

Численное прогнозирование долговечности пластины проводилось для различных начальных размеров трещин. Рассматривалась трещина с одинаковой глубиной и полудлиной, равной 2 мм (полукруговая трещина); трещина глубиной 2 мм, вытянутая вдоль поверхности на 6, 8, 10, 12 и 20 мм; трещина полудлиной 2 мм, вытянутая в глубину на 3 и 4 мм. Результаты расчетов сведены в таблицу.

Анализ полученных данных, приведенных в таблице, показывает, что увеличение начальной длины трещины при условии одинаковой начальной глубины приводит к следующему: 1) к уменьшению долговечности пластины. Причем зависимость эта нелинейная. По мере увеличения длины трещины снижение долговечности замедляется; 2) наблюдается снижение начального КИН в точке, выходящей на поверхность, и повышение КИН в наиболее заглубленной точке. Следует отметить, что для рассматриваемой начальной глубины и уровня напряжений разрушение происходит во всех случаях за счет достижения КИН в точке, выходящей на поверхность, критического значения. Окончательно значение КИН в наиболее заглубленной точке при этом незначительно увеличивается; 3) увеличение вытянутости трещины в длину приводит к снижению роста трещины в этом направлении. Например, для полукруговой трещины длина увеличивается почти в 7 раз, а для трещины, имеющей 10-кратную длину по отношению к глубине, всего в 1,5 раза. Причем окончательная глубина и длина трещин изменяются незначительно.

Кроме вытянутых в длину трещин рассматривались полуэллиптические трещины, имеющие отношение глубины к полудлине больше единицы (1,5 и 2). Сравнение результатов проведенных расчетов показало, что долговечность пластин с начальными трещинами полудлиной a_0 и глубиной b_0 и полудлиной b_0 и глубиной a_0 практически не отличаются. Окончательные

Результаты численного анализа живучести пластины

a_0/b_0	1	1,5	2	2,5	3	5	0,667	0,5
b_0 , мм	2	2	2	2	2	2	3	4
a_0 , мм	2	3	4	5	6	10	2	2
$K_I^{(1)}_{нач}$, МПа·м ^{1/2}	23,3	23,2	22,3	21,2	20,2	16,8	27,2	29,6
$K_I^{(2)}_{нач}$, МПа·м ^{1/2}	21,0	25,8	28,6	30,4	31,6	34,0	20,1	18,9
$K_I^{(1)}_{кон}$, МПа·м ^{1/2}	65,0	65,0	65,0	65,0	65,0	65,0	65,0	65,0
$K_I^{(2)}_{кон}$, МПа·м ^{1/2}	58,9	59,1	59,4	59,7	60,3	63,8	58,7	58,4
b , мм	11,2	11,1	11,1	11,1	11,1	10,9	11,1	11,2
b/b_0	5,60	5,55	5,55	5,55	5,55	5,45	3,70	2,80
a , мм	13,4	13,4	13,5	13,7	13,9	15,2	13,3	13,2
a/a_0	6,70	4,67	3,38	2,74	2,32	1,52	6,65	6,60
$N \cdot 10^5$	2,97	2,39	2,01	1,74	1,53	1,06	2,40	2,02

Примечание. N — долговечность; $K_I^{(1)}_{нач}$ — начальный КИН в точке, выходящей на поверхность; $K_I^{(2)}_{кон}$ — конечный КИН в наиболее заглубленной точке; b_0, b — соответственно начальная и конечная глубина трещины; a_0, a — соответственно начальная и конечная полудлина.

размеры трещин и КИН у них также отличаются незначительно.

Для иллюстрации работы программы на рис. 1 представлены зависимости КИН, а на рис. 2 — глубины и полудлины от количества циклов нагружения для трещины с отношением начальной полудлины к глубине равным 2. На рисунке 1 видно, что КИН в наиболее заглубленной точке в начале нагружения больше. Приблизительно при 120 тыс. циклов КИН в точке, выходящей на поверхность, увеличивается. Это свидетельствует о том, что до этого момента более интенсивный рост трещины идет вглубь, а после — в длину. Данный факт отражен на рис. 2, на котором видно, что до 120 тыс. циклов нагружения зависимость роста полудлины идет более полого, а после более круто, чем зависимость роста глубины трещины.

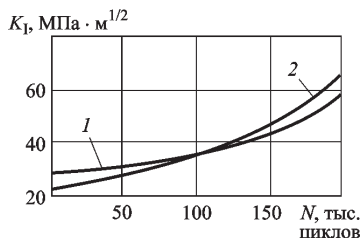


Рис. 1. Изменение КИН в наиболее заглубленной точке (1) и в точке, выходящей на поверхность (2), для трещины с начальными размерами $b_0 = 2$ мм, $a_0 = 4$ мм

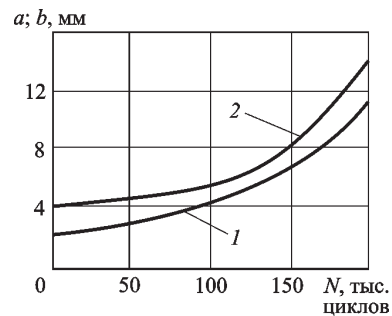


Рис. 2. Изменение глубины (1) и полудлины (2) для трещины с начальными размерами $b_0 = 2$ мм, $a_0 = 4$ мм

Зависимости КИН представлены на рис. 3, а на рис. 4 изображены зависимости глубины и полудлины для трещины с отношением на-

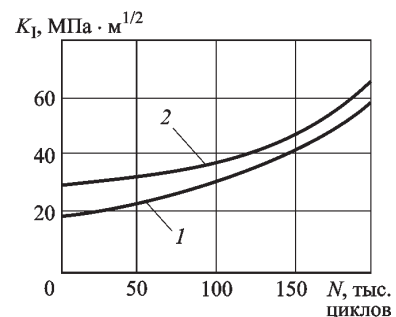


Рис. 3. Изменение КИН в наиболее заглубленной точке (1) и в точке, выходящей на поверхность (2), для трещины с начальными размерами $b_0 = 4$ мм, $a_0 = 2$ мм

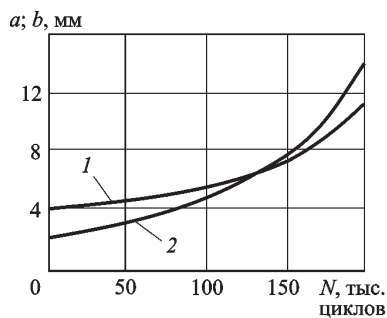


Рис. 4. Изменение глубины (1) и полудлины (2) для трещины с начальными размерами $b_0 = 4$ мм, $a_0 = 2$ мм

начальной полудлины к глубине равным 0,5. На рисунке 3 видно, что КИН в точке, выходящей на поверхность, на всем протяжении роста трещины больше, чем в наиболее заглубленной точке. Поэтому увеличение трещины в процессе всего нагружения более интенсивно идет в длину, что приводит к пересечению кривых роста трещины в длину и глубину (см. рис. 4).

Таким образом, разработанная программа позволяет прогнозировать рост полуэллиптической трещины в пластине в зависимости от числа циклов для любых исходных размеров и параметров циклов нагружения. Программа также позволяет определять долговечность пластины с трещиной.

Выводы

1. Увеличение начальной длины трещины при условии одинаковой начальной глубины приводит к уменьшению долговечности пластины. Причем по мере роста длины трещины снижение долговечности замедляется.

2. Пластины с начальными полуэллиптическими трещинами с одинаковыми значениями полуосей имеют практически неизменную долговечность, независимо от того выходит на поверхность малая или большая полуоси эллипса.

Литература

- [1] Партон В.З., Морозов Е.М. *Механика упругопластического разрушения: Основы механики разрушения*. Москва, ЛКИ, 2008. 352 с.
- [2] Пестриков В.М., Морозов Е.М. *Механика разрушения твердых тел: курс лекций*. Санкт Петербург, Профессия, 2002. 320 с.
- [3] Черепанов Г.П. *Механика разрушения*. Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2012. 872 с.
- [4] Панасюк В.В., ред. *Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие*. В 4 т. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений для тел с трещинами. Киев, Наукова думка, 1988. 620 с.
- [5] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 224 с.
- [6] Покровский А.М., Волоховская О.А., Лешковцев В.Г., Пановко Г.Я. Оценка живучести магистральных трубопроводов с учетом остаточных сварочных напряжений. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2007, № 3, с. 110–117.
- [7] Шокин Ю.И., ред. *Трещиностойкость и механические свойства конструкционных материалов*. Новосибирск, Наука, 2002. 334 с.

References

- [1] Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniia: Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Elastoplastic fracture mechanics: Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, LKI publ., 2008. 352 p.
- [2] Pestrikov V.M., Morozov E.M. *Mekhanika razrusheniia tverdykh tel* [Fracture mechanics of solids]. St. Petersburg, Professia publ., 2002. 320 p.
- [3] Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniia* [Fracture mechanics]. Izhevsk, Institut komp'uternykh issledovaniy publ., 2012. 872 p.
- [4] *Mekhanika razrusheniia i prochnost' materialov: spravochnoe posobie* [Fracture Mechanics and Strength of Materials: A Reference Guide]. In 4 vol., vol. 2. *Koeffitsienty intensivnosti napriazhenii dlia tel s treshchinami* [The stress intensity factors for bodies with cracks]. Ed. Panasiuk V.V. Kiev, Naukova dumka publ., 1988. 620 p.
- [5] Gusev A.S. *Veroiatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktсии* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and structures]. Moscow, Bauman Press, 2009. 224 p.
- [6] Pokrovskii A.M., Volokhovskaia O.A., Leshkovtsev V.G., Panovko G.Ia. *Otsenka zhivuchesti magistral'nykh truboprovodov s uchetom ostatochnykh svarochnykh napriazhenii* [Survivability assessment of trunk pipelines with residual welding stresses]. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2007, no. 3, pp. 110–117.
- [7] *Treshchinostoikost' i mekhanicheskie svoistva konstruktsionnykh materialov* [Fracture toughness and mechanical properties of structural materials]. Ed. Shokin Yu.I. Novosibirsk, Nauka publ., 2002. 334 p.

Статья поступила в редакцию 25.11.2013

Информация об авторах

ПОКРОВСКИЙ Алексей Михайлович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: ampokr@mail.ru).

ЧЕРМОШЕНЦЕВА Анна Сергеевна (Москва) — аспирант кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Information about the authors

POKROVSKIY Aleksey Mikhaylovich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: ampokr@mail.ru).

CHERMOSHENTSEVA Anna Sergeevna (Moscow) — Post-Graduate of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).