3. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. Для втузов. В 2-х ч. Ч.2 Динамика.-М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.

4. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. - М.: Машиностроение, 1981. - 392 с

5. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М.,- 1959. - Т.3. - 1120 с.

539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С ДЕФЕКТАМИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ*

Канд. техн. наук, доц. Л. А. БОХОЕВА

Рассматривается задача о нелинейном поведении пластины с круглым отслоением из слоистых материалов при потери устойчивости «смешанного» типа. Получены в явном виде характеристические уравнения для определения критической нагрузки пластины с дефектами типа отслоений в элементах конструкций, при одновременно локальной и глобальной потере устойчивости.

In the paper presents an nonlinear analysis of a plate with circular delamination from layered materials. The characteristic equations for definition of critical loading of a plate with defects of type circular delamination in elements of designs are received in an obvious kind, at simultaneously local and global loss of stability.

При проектировании конструкций из слоистых композиционных материалов весьма важно прогнозирование их поведения под нагрузкой. Дефекты типа отслоения – один из распространённых видов дефектов, которые часто считаются определяющим фактором при решении вопроса об использовании композиционных материалов. В зависимости от относительных величин толщины и длины отслоения под действием сжимающих нагрузок наблюдаются три вида потери устойчивости элементов конструкций:

1. общая потеря устойчивости (глобальная);
2. локальная потеря устойчивости в зоне дефекта;
3. одновременно локальная и глобальная («смешанная»).

* Работа выполнена в рамках целевой программы МОиН РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 гг.)» (проект № РНП.2.1.2.5517)

Для длинных отслоений деформирование начинается с локального выпучивания тонкого отслоившегося слоя, но при увеличении нагрузки изгибные деформации возникают и в остальных частях элемента конструкции. Рассмотрим задачу о нелинейном поведении пластины с круглым отслоением при потере устойчивости «смешанного» типа. Из анализа существующих подходов для решения этой задачи следует, что метод математически либо строг и слишком сложен, либо предполагает проведение трудоемких вычислений. Поэтому назрела необходимость получения приближенного, удобного для практического использования расчета закритических деформаций, которые предшествуют распространению дефекта,

Нами рассматривается упрощенная конфигурация круглой пластины с радиусом a, которая имеет дефект в виде круглой платины с радиусом R, причем для нее выполняются следующие предложения:

1. существует единственное приповерхностное отслоение круглой формы;
2. это отслоение отделяет тонкий изотропный слой толщиной h от основной пластины толщиной H;
3. размеры дефекта R малы по сравнению с основной пластиной, но велики по сравнению с толщиной отслоившегося слоя h.

В области дефекта пластина состоит из двух частей: отслоившаяся часть (верхняя) толщиной h с изменением радиуса $0 \le r \le R$ и нижняя часть, расположенная ниже отслоения, толщина которого равна $(H\text{-}h)$ с изменением радиуса $0 \le r \le R$. Пластина разбивается на три участка (рис.1) и вводятся следующие обозначения:

$$\varsigma = \frac{r}{R}; \qquad \overline{h} = \frac{h}{H}; \quad \overline{a} = \frac{R}{a},$$

где $u_i(r)$ - радиальное перемещение, $w_i(r)$ - функция поперечного прогиба, $(i=1,2)$, $w_3(r)$ и $u_3(r)$ - функции перемещений, полученные в [1]. Пусть $P_1(r)$, $P_2(r)$, $P_3(r)$, соответственно нагрузка на *1,2,3* участках. Введем следующие обозначения:

$$Q_i(\xi) = \frac{P_i(r)R^2}{D_i} \ (i = 1,3), \ \lambda^2 = Q_2 = \frac{P_2R^2}{D_2}, \ \psi(\varsigma) = \frac{R^2 w_3'(r)}{hr\sqrt{6(1\mu^2)}} \ (0 \le \varsigma \le 1), \ w_1(r) = w_1(\varsigma),$$

$$w_2(r) = w_2(\varsigma), \ w_2(\varsigma) = w_2(r),$$

где $D_1 = \dfrac{EH^3}{12(1\mu^2)}$; $\quad D_2 = \dfrac{(Hh)^3E}{12(1\mu^2)}$; $\quad D_3 = \dfrac{h^3E}{12(1\mu^2)}$.

Рассмотрим второй участок. В полярной системе координат основное линеаризованное уравнение для круглой пластины, нагруженной контурными усилиями $P_{2,}$ принимает вид

$$\left[\frac{R}{r}\left\{\frac{r}{R}w_2'(\varsigma)\right\}\right]=\lambda^2 w_2'(\varsigma)\,,\ (0\le\varsigma\le 1).$$

Необращающиеся в бесконечность при $r=0$ решение для сплошной пластины как при осесимметричной, так и при неосесимметричной форме потери устойчивости определяются зависимостью

$$w_2(r)=B_1J_0(\lambda\varsigma)+B_2\,,$$

где $J_0(\lambda\varsigma)$ – функция Бесселя, первого рода $J_0'(\lambda\varsigma)=-\dfrac{\lambda}{R}J_1(\lambda\varsigma)$.

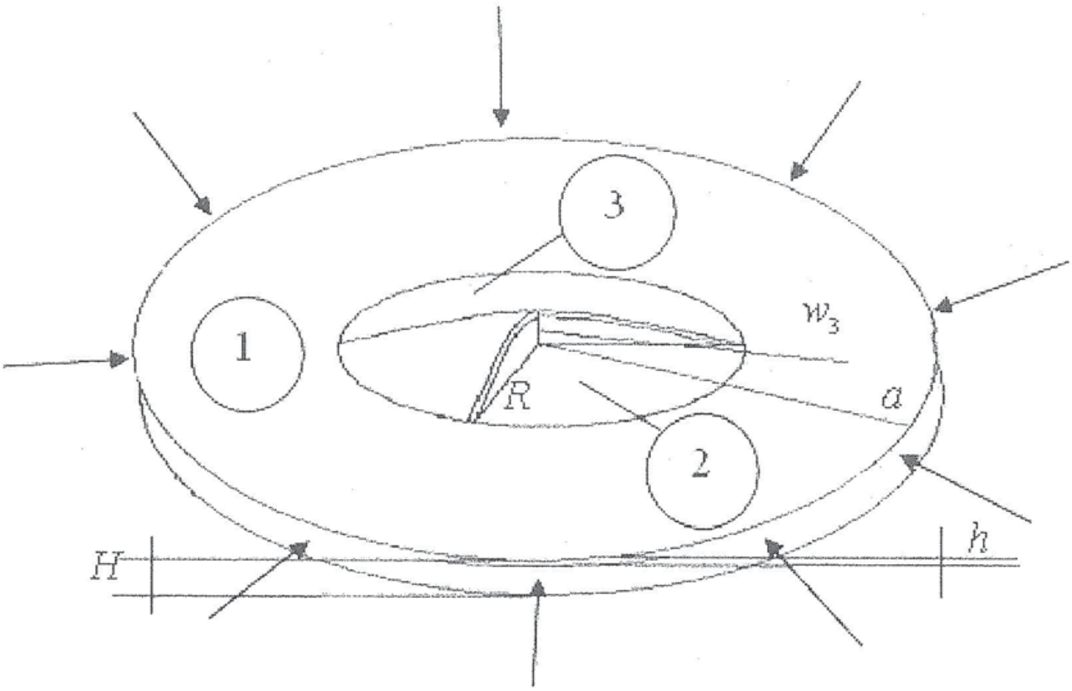

Рис.1

Следовательно,

$$\left.\frac{dw_2}{dr}\right/_{r=R}=\frac{1}{R}w_2'(r)=-(B_1\lambda/R)J_1(\lambda\varsigma)\,.$$

При $r=R$ зависимость между перемещениями на 2 и 3 участках имеет вид

$$B_1=-\frac{h\psi(1)}{\sqrt{6(1-\mu^2)}\lambda Y_1(\lambda)}\,.$$

Так как при осесимметричной форме потери устойчивости напряжения и деформации на 2-ом участке равны $\sigma_r=\sigma_0=-\dfrac{P_2}{(H-h)}$, $\varepsilon_r=\varepsilon_0=-\dfrac{P_2(1-\mu)}{E(H-h)}$, то

величина радикального перемещения при $r=R$

$$\left.u_2(r)\right/_{r=R}=-\frac{(1-\mu)RP_2}{E(H-h)}\,.$$

При $r=R$ прогиб дефекта (3-ий участок) и дефектного участка (2-ой участок) должны быть геометрически совместимы, т.е. следует выполнить необходимое условие совместимости

$$u_3(R) = u_2(R) + \frac{H}{2} w_3'(R).$$

Используя зависимости (1) и (2) имеем

$$\frac{(1\mu)R\lambda^2 E(Hh)^3}{E(Hh)12R^2(1\mu^2)} = u_3(R) + \frac{Hh\psi(1)}{2R\sqrt{6(1\mu^2)}}.$$

Отсюда следует выражение для l^2

$$\lambda^2 = \frac{12R(1+\mu)}{(Hh)^2} u_3(R) + \frac{Hh}{(Hh)^2}\sqrt{\frac{6(1+\mu)}{1\mu}}\psi(1).$$

На первом участке дифференциальное уравнения будет иметь вид

$$\left[\frac{R}{r}\left\{\frac{r}{R} w_1'(\varsigma)\right\}\right] = Q_1(\varsigma) w_1'(\varsigma), \qquad 1 \le \varsigma \le \frac{a}{R}.$$

Введем обозначение функции $f(\varsigma)$

$$f(\varsigma) = \frac{w_1'(\varsigma)\sqrt{6(1\mu^2)}R}{h},$$

тогда дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$\left[\frac{R}{r}\left\{\frac{r}{R} f(\varsigma)\right\}\right] = Q_1(\varsigma) f(\varsigma), \quad 1 \le \varsigma \le \frac{a}{R},$$

при $r=R$ $f(1) = \psi(1)$.

Первый участок можно представить в виде толстостенной трубы, находящейся под действием внешнего давления, тогда напряжения и перемещения равны

$$\sigma_r(r) = ABr^2,$$

$$\sigma_\theta(r) = A + Br^2,$$

$$u_1(r) = \frac{1}{E}\left[A(1\mu)r + B(1+\mu)\frac{1}{r}\right].$$

Уравнение совместимости второго и первого участков при $r=R$, полученное из условия укорочения под действием сжимающей нагрузки и дополнительного сближения, вызванного изгибом дефекта, можно записать в виде

$$u_1(R) = u_2(R) + \frac{h}{2} w_3'(R).$$

С учетом (1) - (3), уравнение (4) преобразуем следующим образом

$$A(1\mu)R^2 + B(1+\mu) = \frac{(1\mu)\lambda^2 D_2}{(Hh)} + \frac{h^2 E\psi(1)}{2\sqrt{6(1\mu^2)}},$$

где $P_2 R^2 = \lambda^2 D_2$.

Так как функцию $y\ (1)$ можно представить в виде

$$\psi(1) = \sqrt{\frac{1\mu}{6(1+\mu)}}\frac{(Hh)^2}{Hh}\lambda^2 + \frac{12R(1+\mu)}{Hh}\sqrt{\frac{1\mu}{6(1+\mu)}} u_3(R),$$

то (5) приметет вид

$$\frac{\mu)\lambda^2 D_2}{Hh}+\frac{h^2E}{2\sqrt{6(1\mu^2)}}\sqrt{\frac{1\mu}{6(1+\mu)}}\frac{(Hh)^2}{Hh}\lambda^2+$$

$$+\frac{h^2E}{2\sqrt{6(1\mu^2)}}\frac{12R(1\mu)}{Hh}\sqrt{\frac{1\mu}{6(1+\mu)}}u_3(R)=\frac{(1\mu)\lambda^2 D_2}{Hh}+\frac{hE(Hh)^3}{26(Hh)H}$$

$$=\sqrt{\frac{1\mu}{(1\mu)(1+\mu)(1+\mu)}}\lambda^2+\frac{12REh}{12H}\sqrt{\frac{(1+\mu)(1+\mu)(1\mu)}{(1+\mu)(1\mu)(1+\mu)}}u_3(R)=$$

$$\frac{(1\mu)\lambda^2 D_2\left(1\bar{h}\right)}{(Hh)}+RE\bar{h}u_3(R)=(1\mu)\lambda^2 D_2\frac{1}{H}+RE\bar{h}u_3(R)$$

Сделав преобразования, получаем

$$A(1\mu)R^2+B(1+\mu)=\frac{1\mu}{H}\lambda^2 D_2+RE\bar{h}u_3(R).$$

В сечении на границе дефекта должно выполняться уравнение равновесия сил (при $z=R$):

$$P_1=P_2+P_3,$$

где $P_1=\dfrac{Q_1(1)D_2}{R^2}$; $P_2=\dfrac{\lambda^2 D_2}{R^2}$; $P_3=\dfrac{Q_3(1)D_3}{R^2}$ или

$$\frac{Q_1(1)D_1}{R^2}=\frac{Q_3(1)D_3}{R^2}+\frac{\lambda^2 D_2}{R^2}.$$

Так как при $r=R$ имеет место следующая зависимость

$\sigma_r/_{r=R}=A-B/R^2=-\dfrac{P_1(1)}{H^2}$, то $AB/R^2=(Q_3(1)D_3+\lambda^2 D_2)/HR^2$.

Решая совместно систему уравнений (4), (6) при $r=R$ можно найти коэффициенты A и B,

$$B=\frac{1}{2}\left\{\frac{Q_3(1)D_3}{H}+RE\bar{h}u_3(R)\right\},$$

$$A=\frac{1}{2HR^2}\left[Q_3(1)D_3 2\lambda^2 D_2+REhu_3(R)\right]$$

Так как $\sigma_r=\dfrac{q_1(r)}{H}=\dfrac{Q_1(\varsigma)D_1}{HR^2}=AB\dfrac{1}{r^2}$,

тогда

$$Q_1(\varsigma)=\frac{AHR^2}{D_1}+\frac{BHR^2}{D_1r^2}=\frac{HR^2}{2HR^2D_1}\left[Q_3(1)D_3 2\lambda^2 D_2+REhu_3(R)\right]+$$

$$+\frac{HR^2}{H2D_1r^2}\left[Q_3(1)D_3+REhu_3(R)\right]==\frac{1}{2}\bar{h}^3Q_3(1)\left(1+\frac{1}{\varsigma^2}\right)+\left(1\bar{h}\right)^3\lambda^2+REhu_3(R)\frac{1}{2D_1}\left(\frac{1}{\varsigma^2}1\right).$$

При $r=R$ величина $Q_1(V)$ равна

$$Q_1\left(a/R\right)=\frac{1}{2}\bar{h}^{-3}Q_3(1)\left(1\frac{R^2}{a^2}\right)+\left(1\bar{h}\right)^3\lambda^2+REhu_3(R)\frac{1}{2D_1}\left(\frac{R^2}{a^2}1\right).$$

Радиальное перемещение при $r=R$ будет

$$u_1(R)=\frac{1}{E}\left[A(1\mu)a+B(1+\mu)\frac{1}{a}\right]=\frac{(1\mu)a}{2EHR^2}\left[Q_3(1)D_3 2\lambda^2 D_2+REhu_3(R)\right]+$$

$$+\frac{1+\mu}{2aH}\left[Q_3(1)D_3+REhu_3(R)\right]$$

При заданных геометрических параметрах и характеристиках материала по (7) и (8) можно определить критическую нагрузку и перемещения круглой пластины с дефектом.

Уравнение равновесия моментов имеет вид

$$M_1(R)=M_2(R)+M_3(R)+\frac{P_2 h}{2}-\frac{P_3(H-h)}{2}.$$

При $r=R$ на первом участке

$$M_1(R)=\frac{D_1 h}{R\sqrt{6(1\mu^2)}}\left[\frac{1}{R}f'(1)\right]+\frac{\mu D_1}{R}\frac{\psi(1)h}{R\sqrt{(1\mu^2)}}=\frac{D_1 h}{R^2\sqrt{6\begin{pmatrix}1\\ \mu^2\end{pmatrix}}}\left[f'(1)+\mu\psi(1)\right]$$

На 2-ом участке при $r=R$

$$M_2(R)=D_2\left[\frac{h\psi(1)}{R^2\sqrt{6(1\mu^2)}}\frac{h\psi(1)}{R^2\sqrt{6(1\mu^2)}}-\lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}+\frac{M}{R}\frac{h\psi(1)}{R\sqrt{6(1\mu^2)}}\right]=$$

$$=\frac{D_2 h\psi(1)}{R^2\sqrt{6(1\mu^2)}}\left[1+\mu\lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}\right].$$

На третьем участке:

$$M_3(R)=\frac{D_3 h}{R^2\sqrt{6(1\mu^2)}}\left[\psi'(1)+(\mu+1)\psi(1)\right].$$

Из уравнения равновесия моментов получаем выражение для вычисления *f'(1)* при $\varsigma=1$, т.е. при $r=R$

$$\frac{D_1\cdot h}{R^2\cdot\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}\left[f'(1)+\mu\cdot\psi(1)\right]=\frac{D_2\cdot h\cdot\psi(1)}{R^2\cdot\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}\left[1+\mu-\lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}\right]+$$

$$+\frac{D_3\cdot h}{R^2\cdot\sqrt{6\cdot(1-\mu^2)}}\left[\psi'(1)+(1+\mu)\cdot\psi(1)\right]+\frac{P_2\cdot h}{2}-\frac{P_3\cdot(H-h)}{2},$$

где $P_2=\dfrac{\lambda^2 D_2}{R^2}$, $\quad P_3=\dfrac{Q_3(\varsigma)D_3}{R^2}=\dfrac{Q_3(1)D_3}{R^2}$, После преобразований окончательно получаем

$$f'(1) = -\mu\psi(1) + \left(1-\bar{h}\right)^3 \psi(1)\left[1+\mu-\lambda\frac{J_2(\lambda)}{J_1(\lambda)}\right] + \bar{h}^{-3}\left[\psi'(1)+(1+\mu)\psi(1)\right] +$$
$$+\frac{\sqrt{6(1\mu^2)}}{2}\left[\lambda^2\left(1\bar{h}\right)^3\bar{h}^{-2}\left(1\bar{h}\right)Q_3(1)\right].$$

Таким образом, нами получены в явном виде характеристические уравнения для определения критической нагрузки и закритического поведения пластины с дефектами типа круглых отслоений в элементах конструкций из слоистых материалов, при одновременно локальной и глобальной потере устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бохоева Л.А. Устойчивость круглых отслоений в слоистых элементах конструкций с учетом поперечного сдвига// Межвуз сборник науч. трудов, Чита.- 1994.- С.21-25.

539.3

СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ БАЛКИ-ПЛАСТИНКИ ИЗ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Д-р физ-мат. наук, проф. С.М. ШЛЯХОВ, асп. А.В. ЕФРЕМОВ, канд. техн. наук Э.Ф. КРИВУЛИНА

В работе получено решение конструкционно-связанной задачи теплопроводности и термоупругости для тел пористой структуры. Учтено влияние зависимости коэффициента теплопроводности от напряжений. В основу решения положены вариационные принципы, реализация которых осуществлена методом конечных элементов.

In article the solution of the constructional-connected problem of thermal conductivity and thermo elasticity for bodies of porous structure is receive. Influence of dependence of coefficient of thermal conductivity from voltages is considered. In a basis of a solution, the variation principles which implementation is realized by a finite element method are supposed.