

# Транспортное и энергетическое машиностроение



**РУССКИХ**  
**Сергей Владимирович**  
(Московский авиационный  
институт  
(Национальный  
Исследовательский  
Университет))

**RUSKIKH**  
**Sergey Vladimirovich**  
(Moscow, Russian Federation,  
Moscow Aviation Institute  
(State University of Aerospace  
Technologies))

УДК 531.132.1

## Движение твердого тела на двух колесах по плоской кривой

**С.В. Русских**

*Задачи, связанные с движением объектов по плоским кривым, очень распространены в современной технике. В различных отраслях транспортного машиностроения и строительных сооружениях актуальны задачи о движении тел на колесах или роликах. Однако многие из этих задач рассматриваются с существенными упрощениями, не применимыми для расчета сооружений, например, типа «катальная гора». В предлагаемой работе рассмотрено нестационарное движение твердого тела на двух колесах по произвольной плоской кривой. Получены основные кинематические соотношения и уравнения движения тела, а также соотношения для определения нагрузки на кривую со стороны исследуемого объекта. Выполнена проверка численного алгоритма и рассмотрен пример расчета. Исследовано влияние радиуса колес тела на параметры движения. Задача представляет интерес с точки зрения определения реакций тела на траекторию для расчета сооружения на прочность, а также для определения перегрузок тела для биомеханического анализа.*

*Результаты исследований будут полезны в различных отраслях транспортного машиностроения.*

**Ключевые слова:** динамика твердого тела, катальная гора, движение тела по плоской кривой, уравнения движения, перегрузки, биомеханический анализ.

## Motion of a two-wheel rigid body along a plane curve

**S.V. Russkikh**

*The problems of motion of objects having wheels or rollers along planar curvilinear trajectories are very common in various branches of transport engineering and building structures. However, many of these problems are considered with significant simplifications that are not applicable for the calculation of*

vehicles of roller-coaster type. In this paper, the unsteady motion of a two-wheel rigid body along an arbitrary plane curve is investigated. Basic kinematic relationships and equations of motion are formulated, as well as the relationships for determining the load on the ground imposed by the object under study. The numerical algorithm is verified, and an example of calculations is considered. The influence of the radius of the wheels on the motion parameters is analyzed. The body impact on the structure is determined to evaluate the strength of the structure and the body overload needed for biomechanical analysis. The results will be useful in various branches of transport engineering.

**Keywords:** rigid body dynamics, roller coaster, motion of a body along a plane curve, equations of motion, overload, biomechanical analysis.

В различных отраслях транспортного машиностроения и строительных сооружениях актуальны задачи о движении тел на колесах или роликах, например, движение транспортных средств по неровной дороге [1–3], взлет самолетов с палубного трамплина [4, 5], движение тележек по криволинейным поверхностям (направляющим) в сооружениях типа «катальная гора» [6, 7] и др. Многие из этих задач рассматриваются в предположении, что радиусы кривизны траектории движения тела велики по сравнению с колесной базой, т. е. расстояние по кривой между точками контакта колес практически равно колесной базе тела. В случае катальных гор и других подобных аттракционов обычно радиусы кривизны изменяются в широком диапазоне и подобный подход не применим для определения кинематических и силовых параметров движения. В этих случаях задача существенно усложняется и становится кинематически нелинейной. В данной статье рассмотрено нестационарное движение твердого тела на двух колесах (роликах) по плоской кривой.

**Кинематические соотношения.** Задача по определению кинематических и динамических характеристик движения плоской двухколесной тележки по заданной неподвижной криволинейной направляющей произвольной формы решается при следующих предположениях:

1) корпус тележки и колеса являются абсолютно твердыми телами;

2) массой колес можно пренебречь (колеса невесомые);

3) оси вращения колес жестко прикреплены к корпусу (нет подвески);

4) колеса катятся без проскальзывания и сила трения отсутствует;

5) заднее колесо является ведущим, а переднее — ведомым.

Плоская кривая, по которой движется твердое тело на двух колесах, в декартовой системе координат описывается уравнением вида  $y = y(x)$  или в параметрическом виде в зависимости от длины дуги  $s$ :

$$x = x(s); \quad y = y(s). \quad (1)$$

Скорость движения контактной точки заднего ведущего колеса вдоль кривой считается известной, а тангенциальная реакция (движущая сила)  $R_{A,\tau}(t)$  — неизвестной (рис. 1). Определив реакцию  $R_{A,\tau}$ , можно рассчитать крутящий момент на ведущем колесе по формуле

$$M = R_{A,\tau} r,$$

где  $r$  — радиус колеса. Тангенциальная реакция ведомого колеса  $R_{B,\tau} = 0$ , так как считается, что трение между колесами и кривой отсутствует.

Найдем все кинематические и геометрические параметры точки  $A$  при условии, что естественная координата  $s_A = s_0$  в момент времени  $t = 0$ :

$$\dot{V}_A = \frac{dV_A}{dt}; \quad s_A = s_0 + \int_0^t V_A(\tau) d\tau;$$

$$x_A = x(s_A); \quad y_A = y(s_A).$$

Здесь  $V_A(t)$  — скорость движения в точке  $A$ .

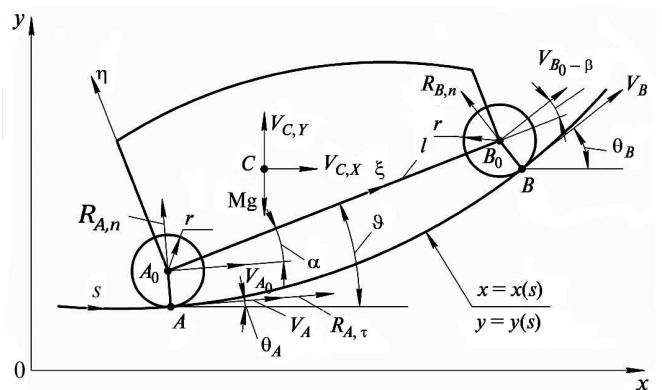


Рис. 1. Геометрические, кинематические и силовые параметры движения тела на двух колесах

При составлении кинематических соотношений для движения точки по плоской кривой необходимо учитывать, что [8–14]

$$\frac{ds}{dt} = V; \quad \frac{d(*)}{dt} = \frac{d(*)}{ds} \frac{ds}{dt} = V \frac{d(*)}{ds}. \quad (2)$$

Угол наклона касательной к кривой в точке  $A$  и его первая производная с учетом соотношений [15–17]

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta; \quad \frac{dx}{ds} = \cos\theta \quad (3)$$

рассчитываются по формулам

$$\theta_A = \arcsin\left(\frac{dy}{ds}\Big|_{s=s_A}\right);$$

$$\dot{\theta}_A = -\frac{1}{\sin\theta_A} V_A \frac{d^2x}{ds^2}\Big|_{s=s_A}. \quad (4)$$

Координаты и скорость центра заднего колеса  $A_0$  (см. рис. 1):

$$x_{A_0} = x_A - r \sin\theta_A; \quad y_{A_0} = y_A + r \cos\theta_A; \quad (5)$$

$$V_{A_0} = V_A - r\dot{\theta}_A.$$

Для нахождения координаты  $s_B$  точки контакта  $B$  переднего колеса используем соотношение, следующее из условия неизменяемости длины «колесной базы» тела  $A_0B_0 = l$ :

$$l^2 = (x_{B_0} - x_{A_0})^2 + (y_{B_0} - y_{A_0})^2, \quad (7)$$

где выражения для неизвестных координат  $x_{B_0}$  и  $y_{B_0}$  аналогичны уравнениям (5) с учетом (1) и (3):

$$x_{B_0} = x(s_B) - r \frac{dy}{ds}\Big|_{s=s_B};$$

$$y_{B_0} = y(s_B) + r \frac{dx}{ds}\Big|_{s=s_B}. \quad (8)$$

Уравнение (7) с учетом (5) и (8) решается в текущий момент времени (при условии  $s_B - s_A \geq l$ ) и по полученному значению  $s_B$  находятся остальные кинематические и геометрические параметры точки  $B$ :

$$x_B = x(s_B); \quad y_B = y(s_B);$$

$$\theta_B = \arcsin\left(\frac{dy}{ds}\Big|_{s=s_B}\right).$$

Угол поворота твердого тела относительно оси  $Ox$  определяется из соотношения

$$\vartheta = \arcsin\left(\frac{y_{B_0} - y_{A_0}}{l}\right).$$

Зная угол  $\vartheta$ , можно найти углы  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рис. 1):

$$\alpha = \vartheta - \theta_A; \quad \beta = \vartheta - \theta_B.$$

Для вычисления скорости точки  $B_0$  учитываются геометрические условия:

$$l \cos\vartheta = x_{B_0} - x_{A_0}; \quad l \sin\vartheta = y_{B_0} - y_{A_0},$$

продифференцировав которые по времени с учетом выражений (2) и (3) и последовательно исключая неизвестные величины, находят  $V_{B_0}$  и  $\dot{\vartheta}$ :

$$V_{B_0} = V_{A_0} \frac{\cos(\theta_A - \vartheta)}{\cos(\theta_B - \vartheta)} = V_{A_0} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{V_{A_0}}{l} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta_B - \vartheta)} = \frac{V_{A_0}}{l} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta}.$$

Скорость  $V_B$  и значение  $\dot{\theta}_B$  связаны соотношениями, аналогичными (4) и (6):

$$V_B = V_{B_0} + r\dot{\theta}_B; \quad \dot{\theta}_B = -\frac{1}{\sin\theta_B} V_B \frac{d^2x}{ds^2}\Big|_{s=s_B},$$

отсюда

$$V_B = \frac{V_{B_0}}{1 + \frac{r}{\sin\theta_B} \left[\frac{d^2x}{ds^2}\Big|_{s=s_B}\right]};$$

$$\dot{\theta}_B = \frac{V_B - V_{B_0}}{r}.$$

Угловое ускорение тела

$$\ddot{\vartheta} = \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} = \frac{\dot{V}_{A_0}}{l} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta_B - \vartheta)} +$$

$$+ \frac{V_{A_0}}{l} (\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_A) \frac{\cos(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta_B - \vartheta)} +$$

$$+ \dot{\vartheta}(\dot{\theta}_B - \dot{\vartheta}) \operatorname{tg}(\theta_B - \vartheta),$$

где

$$\dot{V}_{A_0} = \dot{V}_A - r\ddot{\theta}_A;$$

$$\ddot{\theta}_A = \frac{d\dot{\theta}_A}{dt} = -\sin^{-2} \theta_A \left[ V_A^2 \left( \frac{d^3 x}{ds^3} \Big|_{s=s_A} \right) \sin \theta_A + \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \Big|_{s=s_A} \right) (\dot{V}_A \sin \theta_A - V_A \dot{\theta}_A \cos \theta_A) \right].$$

Неизвестные координаты центра тяжести тела  $x_C$  и  $y_C$  в неподвижной системе координат (см. рис. 1) вычисляются через их известные значения  $\xi_C$  и  $\eta_C$  в подвижной (связанной с телом) системе координат:

$$\begin{aligned} x_C &= x_{A_0} + \xi_C \cos \vartheta - \eta_C \sin \vartheta; \\ y_C &= y_{A_0} + \xi_C \sin \vartheta + \eta_C \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Проекции скорости центра тяжести тела  $V_{C,X}$  и  $V_{C,Y}$  на оси  $0x$  и  $0y$  определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} V_{C,X} &= V_{A_0,X} - \dot{\vartheta} (y_C - y_{A_0}); \\ V_{C,Y} &= V_{A_0,Y} + \dot{\vartheta} (x_C - x_{A_0}). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_{A_0,X} &= \dot{x}_{A_0} = V_{A_0} \cos \theta_A; \\ V_{A_0,Y} &= \dot{y}_{A_0} = V_{A_0} \sin \theta_A. \end{aligned} \quad (9)$$

Скорость центра тяжести

$$V_C = \sqrt{V_{C,X}^2 + V_{C,Y}^2}.$$

Ускорения центра тяжести тела в проекциях на оси  $0x$  и  $0y$ :

$$\begin{cases} \dot{V}_{C,X} = \dot{V}_{A_0,X} - \ddot{\vartheta} (y_C - y_{A_0}) - \dot{\vartheta} (\dot{y}_C - \dot{y}_{A_0}); \\ \dot{V}_{C,Y} = \dot{V}_{A_0,Y} + \ddot{\vartheta} (x_C - x_{A_0}) + \dot{\vartheta} (\dot{x}_C - \dot{x}_{A_0}), \end{cases}$$

где с учетом (9)

$$\begin{cases} \dot{V}_{A_0,X} = \ddot{x}_{A_0} = \dot{V}_{A_0} \cos \theta_A + V_{A_0}^2 \frac{d^2 x}{ds^2} \Big|_{s=s_A}; \\ \dot{V}_{A_0,Y} = \ddot{y}_{A_0} = \dot{V}_{A_0} \sin \theta_A + V_{A_0}^2 \frac{d^2 y}{ds^2} \Big|_{s=s_A}; \\ \dot{x}_C = V_{C,X}, \quad \dot{y}_C = V_{C,Y}. \end{cases}$$

Реакции в точках  $A$  и  $B$  со стороны тела на кривую, по которой оно двигается, определяются из системы уравнений движения с учетом силы тяжести (см. рис. 1):

$$\begin{cases} M \dot{V}_{C,X} = R_{A,\tau} \cos \theta_A - R_{A,n} \sin \theta_A - R_{B,n} \sin \theta_B; \\ M (\dot{V}_{C,Y} - g) = R_{A,\tau} \sin \theta_A + R_{A,n} \cos \theta_A + R_{B,n} \cos \theta_B; \\ J_C \ddot{\vartheta} = R_{A,\tau} (r + \xi_C \sin \alpha + \eta_C \cos \alpha) - R_{A,n} (\xi_C \cos \alpha - \eta_C \sin \alpha) + R_{B,n} [(l - \xi_C) \cos \beta + \eta_C \sin \beta]. \end{cases}$$

Здесь  $M$  и  $J_C$  — масса и момент инерции тела;  $g$  — ускорение свободного падения.

Перегрузки по осям  $0x$  и  $0y$  рассчитываются из соотношений

$$n_x = \frac{\dot{V}_{C,X}}{g}; \quad n_y = \frac{\dot{V}_{C,Y}}{g}.$$

На основе полученных результатов для определения кинематических, геометрических, инерционных и динамических параметров движения твердого тела по плоской кривой был составлен алгоритм расчета для последовательного нахождения необходимых величин по времени движения с заданным шагом [18–20].

**Проверка алгоритма расчета.** В качестве тестовой задачи для проверки численного алгоритма решена задача о движении тела по дуге окружности, для которой можно получить точное аналитическое решение. В качестве кривой выбрана полуокружность радиусом  $R = 50$  м; влияние гравитации не учитывалось ( $g = 0$ ). Рассмотрены два расчетных случая:

1)  $V_A = 2$  м/с,  $l = 1,5$  м,  $\xi_C = 0,3$  м,  $\eta_C = 0,5$  м,  $M = 500$  кг,  $J_C = 250$  кг·м<sup>2</sup>,  $r = 0,2$  м. При этом движение тела по траектории со временем  $t_k = 78,382$  с исследовалось с шагом  $\Delta t = 0,5$  с;

2)  $V_A = 5$  м/с,  $l = 1,5$  м,  $\xi_C = 0,3$  м,  $\eta_C = 0,5$  м,  $M = 500$  кг,  $J_C = 250$  кг·м<sup>2</sup>,  $r = 0$ . При этом движение тела по траектории со временем  $t_k = 31,353$  с исследовалось с шагом  $\Delta t = 0,1$  с.

Для оценки точности численного решения использовалось несколько условий:

- при движении тела по дуге окружности любая его точка движется с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Для первого случая были вычислены угловые скорости движения пяти точек — центров колес  $A_0$  и  $B_0$ , точек контакта  $A$  и  $B$  и центра тяжести  $C$ . Для второго случая уг-

ловая скорость определялась для трех точек — точек контакта  $A$  и  $B$  и центра тяжести  $C$ . Угловые скорости как в первом, так и во втором, случаях получились постоянными с точностью до трех значащих цифр. Для первого случая угловая скорость  $\omega = 0,04$  рад/с, для второго —  $\omega = 0,1$  рад/с;

- полная энергия тела  $E = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\vartheta}^2$

на исследуемых временных интервалах в обоих случаях оставалась постоянной с точностью до трех значащих цифр. Для первого расчетного случая полная энергия тела  $E = 972,2$  Дж, для второго —  $E = 6,126 \cdot 10^3$  Дж;

- при движении тела центр его колеса движется по кривой, весьма близкой к окружности радиуса  $R - r$  (точное решение);

- полученные численные значения контактных реакций колес с точностью до трех значащих цифр совпадают с результатами точного решения.

Таким образом подтверждается достоверность формул и численных результатов решения рассматриваемой задачи.

**Пример расчета.** Рассмотрим задачу о движении твердого тела по траектории, в качестве которой выбрана кривая, состоящая из горизонтального участка  $1$  длиной  $5$  м и четырех гладко сопряженных окружностей  $2-5$ , координаты центров и радиусов которых в метрах, соответственно равны:  $x_2 = 5, y_2 = 5, R_2 = 15, x_3 = 26,9, y_3 = 14, R_3 = 10, x_4 = 43,1, y_4 = 6,2, R_4 = 10, x_5 = 65,8, y_5 = 16,7, R_5 = 15$  (рис. 2). Исходные данные:  $V_A = 2,5$  м/с,  $l = 1,5$  м,  $\xi_C = 0,3$  м,  $\eta_C = 0,5$  м,  $M = 500$  кг,  $J_C = 250$  кг·м<sup>2</sup>. Полное время движения тела с постоянной скоростью  $V_A$  по этой кривой  $t_k = 34,040$  с. Расчеты выполнялись с шагом  $\Delta t = \frac{1}{3}$  с.

Сравним и проанализируем как влияет радиус колеса на параметры движения тела. Для этого рассмотрим два варианта задачи: 1)  $r = 0,2$  м; 2)  $r = 0$ . В первом варианте была проведена дополнительная геометрическая проверка решения по точности определения траектории движения центров колес  $A_0$  и  $B_0$  и сравнение ее с эквидистантой к исходной кривой, которые практически совпали.

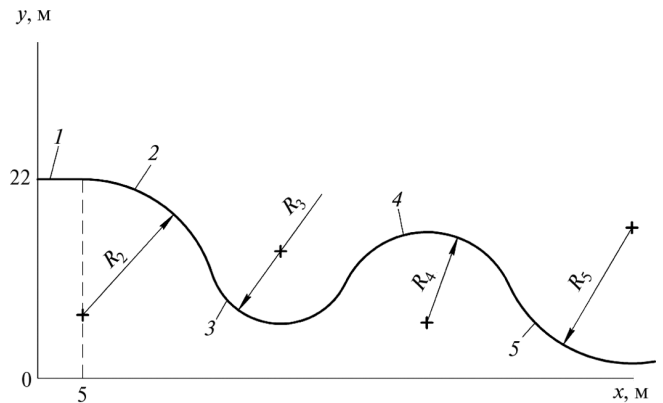


Рис. 2. Траектория движения тела для примера расчета

Сравнение решений задач для вариантов 1 и 2 по углу поворота  $\vartheta$  приведено на рис. 3. Полученные значения на всем интервале времени отличаются только в третьем знаке после запятой. Следует отметить, что отличия в значениях величины  $\ddot{\vartheta}$  более существенно — они составляют 2 %.

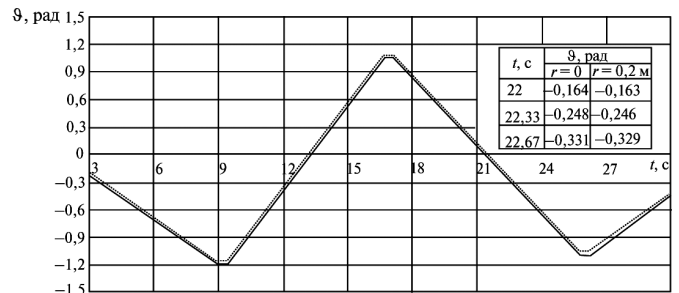


Рис. 3. Зависимость угла поворота тела от времени: — —  $r = 0$ ; . . . —  $r = 0,2$  м

Сравнение решений по проекции скорости центра тяжести тела  $C$  на ось  $0x$  представлено на рис. 4. Значения  $V_{C,x}$  отличаются во втором знаке после запятой, т. е. примерно на 1...2 %. Тот же самый вывод следует из сравнения проекций скорости центра тяжести на ось  $0y$  (рис. 5).

Самые существенные различия проявляются при вычислении реакций  $R_{A,\tau}, R_{A,n}, R_{B,n}$  (рис. 6—8). Нормальные составляющие реакций в вариантах 1 и 2 могут отличаться на 20...70 %, что указывает на то, что при определении нагрузок на сооружение следует учитывать радиус колес тележек. Тангенциальные составляющие реакции отличаются во втором знаке.

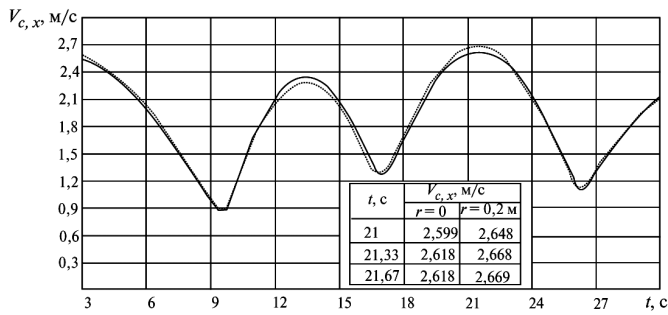


Рис. 4. Зависимость проекции скорости центра тяжести тела на ось 0x от времени:

— — r = 0; . . . . — r = 0,2 м

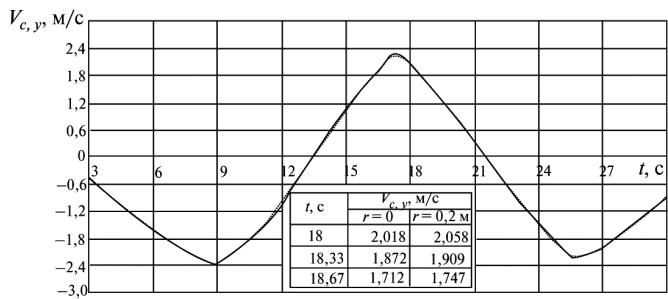


Рис. 5. Зависимость проекции скорости центра тяжести тела на ось 0y от времени:

— — r = 0; . . . . — r = 0,2 м

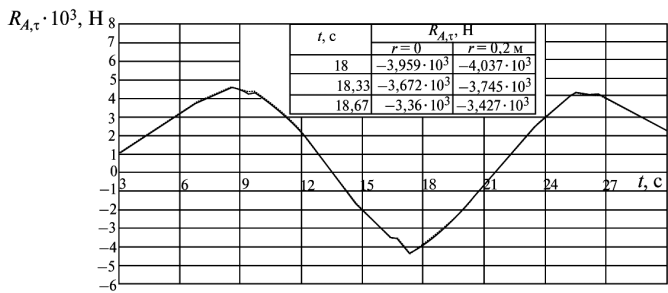


Рис. 6. Зависимость тангенциальной составляющей реакции в точке А от времени:

— — r = 0; . . . . — r = 0,2 м

Следует отметить, что значения перегрузок по осям 0x и 0y при r = 0,2 м и r = 0 отличаются не более чем на 2%.

Таким образом, при определении кинематических и геометрических параметров движения тела малыми радиусами колес (роликами) можно пренебрегать в пределах погрешности 5%, но при расчете нагрузок их размеры следует учитывать.

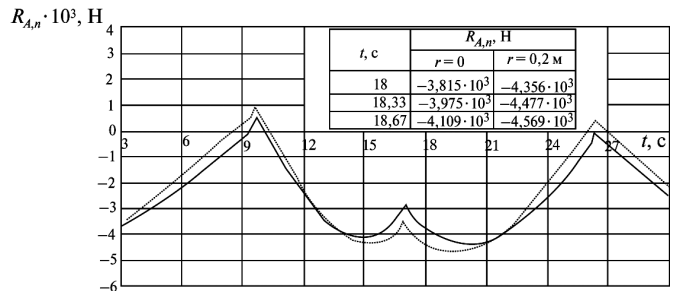


Рис. 7. Зависимость нормальной составляющей реакции в точке А от времени:

— — r = 0; . . . . — r = 0,2 м

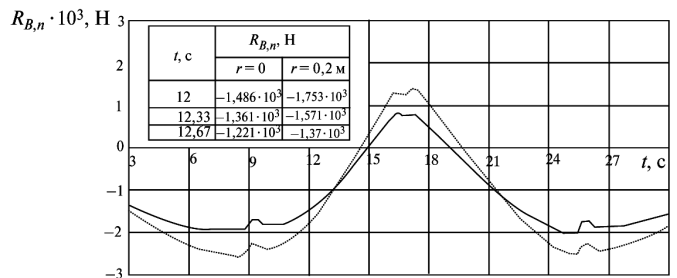


Рис. 8. Зависимость нормальной составляющей реакции в точке В от времени:

— — r = 0; . . . . — r = 0,2 м

### Выводы

1. Составленный алгоритм позволяет определять все необходимые параметры плоского движения тела (тележки на роликах) по криволинейной траектории сооружения, например, типа аттракционов с катальными горками.

2. Дальнейшее усложнение данной задачи заключается в учете амортизации подвески тела, податливостей колес, а также в учете относительного движения присоединенных к телу деформируемых масс. При таких обобщениях задачи результаты ее решения могут быть использованы в других различных приложениях (движение автомобиля или мотоцикла на неровной дороге, взлет самолета с палубного трамплина и пр.).

### Литература

[1] Бромберг Е.М., Вериго М.Ф., Данилов В.Н., Фришман М.А. *Взаимодействие пути и подвижного состава*. Москва, Трансжелдориздат, 1956. 280 с.  
 [2] Вериго М.Ф. *Динамика вагонов*. Конспект лекций. Москва, ВЗИИТ, 1971. 175 с.  
 [3] Кулаков Н.А. *Воздействие динамической нагрузки на наземные транспортные средства. Избранные проблемы проч-*

ности современного машиностроения. Москва, Физматлит, 2008. 204 с.

[4] Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. *Аэрогидроупругость конструкций*. Москва, Физматлит, 2000. 592 с.

[5] Павленко В.Ф. *Корабельные самолеты*. Москва, Воениздат, 1990. 320 с.

[6] Гнездилов В.А. Проектирование и изготовление металлоконструкций для сложных механизированных аттракционов. *Монтажные и специальные работы в строительстве*, 2000, № 6, с. 20–24.

[7] Wayne T. *Roller Coaster Physics*, Wayne, 1998. 154 p. Available at: <http://vip.vast.org/BOOK/HOME.HTM> (Accessed 7 October 2013).

[8] Амелькин Н.И. *Кинематика и динамика твердого тела*. Москва, Изд-во МФТИ, 2000. 64 с.

[9] Виттенбург Й. *Динамика систем твердых тел*. Москва, Мир, 1980. 292 с.

[10] Колесников К.С., Дубинин В.В. ред. *Курс теоретической механики*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 736 с.

[11] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, Физматгиз, 1961. 824 с.

[12] Фролов К.В. Теория машин и механизмов. Москва, Высшая школа, 1987. 496 с.

[13] Fitzpatrick R. *Classical Mechanics*. Lulu Enterprises Inc. 2006. 310 p.

[14] Reiner M. Dreizler, Cora S. Lüdde. *Theoretical Mechanics*. Springer, 2010. 410 p.

[15] Бюшгенс С.С. *Дифференциальная геометрия*. Москва, Комкнига, 2006. 302 с.

[16] Рашевский П.К. *Курс дифференциальной геометрии*. Москва, Изд-во ЛКИ, 2013. 432 с.

[17] Banchoff T., Lovett S.T. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. AK Peters, Taylor & Francis, 2010. 352 p.

[18] Светлицкий В.А. *Механика стержней*. В 2 ч. Ч. 1. *Статика*. Москва, Высшая школа, 1987. 320 с.

[19] Светлицкий В.А. *Механика стержней*. В 2 ч. Ч. 2. *Динамика*. Москва, Высшая школа, 1987. 304 с.

[20] Спицына Д.Н. *Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций*. Москва, Высшая школа, 1977. 248 с.

## References

[1] Bromberg E.M., Verigo M.F., Danilov V.N., Frishman M.A. *Vzaimodeistvie puti i podvizhnogo sostava* [The reaction path and rolling]. Moscow, Transzheldorizdat publ., 1956. 280 p.

[2] Verigo M.F. *Dinamika vagonov* [Dynamics of cars]. Moscow, Russian Open Transport Academy Moscow State University Railway publ., 1971. 175 p.

[3] Kulakov N.A. *Vozdeistvie dinamicheskoi nagruzki na nazemnye transportnye sredstva. Izbrannye problemy prochnosti sovremennogo mashinostroeniia* [The impact of the dynamic loads on ground vehicles. Selected problems of modern engineering strength]. Moscow, Fizmatlit publ., 2008. 204 p.

[4] Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyar-chuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruktsii* [Aerohydroelasticity designs]. Moscow, Fizmatlit publ., 2000. 592 p.

[5] Pavlenko V.F. *Korabel'nye samolety* [Shipboard aircraft]. Moscow, Voenizdat publ., 1990. 320 p.

[6] Gnezdilov V.A. *Proektirovanie i izgotovlenie metallo-konstruktsii dlia slozhnykh mekhanizirovannykh attraktsionov* [Design and fabrication of steel structures for complex mechanized rides]. *Montazhnye i spetsial'nye raboty v stroitel'stve* [Erecting and special works in construction]. 2000, no. 6, pp. 20–24.

[7] Wayne T. *Roller Coaster Physics*, Wayne, 1998. 154 p. Available at: <http://vip.vast.org/BOOK/HOME.HTM> (Accessed 7 October 2013).

[8] Amel'kin N.I. *Kinematika i dinamika tverdogo tela* [The kinematics and dynamics of a rigid body]. Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology publ., 2000. 64 p.

[9] Vittenburg I. *Dinamika sistem tverdykh tel* [Dynamics of systems of rigid bodies]. Moscow, Mir publ., 1980. 292 p.

[10] *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. Ed. Kolesnikov K.S., Dubinin V.V. Moscow, Bauman Press, 2005. 736 p.

[11] Lur'e A.I. *Analiticheskaiia mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1961. 824 p.

[12] Frolov K.V. *Teoriia mashin i mekhanizmov* [Theory of machines and mechanisms]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1987. 496 p.

[13] Fitzpatrick R. *Classical Mechanics*. Lulu Enterprises Inc., 2006. 310 p.

[14] Reiner M. Dreizler, Cora S. Lüdde. *Theoretical Mechanics*. Springer, 2010. 410 p.

[15] Biushgens S.S. *Differentsial'naia geometriia* [Differential geometry]. Moscow, Komkniga publ., 2006. 302 p.

[16] Rashevskii P.K. *Kurs differentsial'noi geometrii* [A course of differential geometry]. Moscow, LKI publ., 2013. 432 p.

[17] Banchoff T., Lovett S.T. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. AK Peters, Taylor & Francis, 2010. 352 p.

[18] Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei* [Mechanics rods]. In 2 pt. Pt. 1. *Statika* [Statics]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1987. 320 p.

[19] Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei* [Mechanics rods]. In 2 pt. Pt. 2. *Dinamika* [Dynamics]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1987. 304 p.

[20] Spitsyna D.N. *Stroitel'naia mekhanika sterzhnevyykh mashinostroitel'nykh konstruktsii* [Structural Mechanics core engineering designs]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1977. 248 p.

Статья поступила в редакцию 23.10.2013

## Информация об авторе

**РУССКИХ Сергей Владимирович** (Москва) — аспирант кафедры «603». Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет) (125993, Москва, Российская Федерация, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru)

## Information about the author

**RUSSKIKH Sergey Vladimirovich** (Moscow) — Post-Graduate of «603» Department. Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies) (MAI (SUAT) Volokolamskoe highway, 4, A-80, GSP-3, 125993, Moscow, Russian Federation, e-mail: sergey.russkih@rambler.ru)