



СЕМЕНОВ

Владимир Константинович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

SEMENOV

Vladimir Konstantinovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



БЕЛКИН

Александр Ефимович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

BELKIN

Aleksandr Efimovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

Математическая модель вязкоупругого поведения резины при циклическом нагружении

В.К. Семенов, А.Е. Белкин

Одной из актуальных проблем механики автомобильной шины является расчет рассеяния энергии в катящейся шине при циклическом деформировании, на основе которого определяют показатели сопротивления качению и теплообразование. Точность и достоверность расчетных прогнозов в этой области зависит от адекватности описания физических свойств шинных материалов. В статье представлена математическая модель вязкоупругого поведения протекторной резины при одноосном циклическом сжатии. Модель основана на концепции неупругого реологического поведения эластомеров, разработанной специалистами Массачусетского технологического института Бергстромом и Бойс. Детально описана процедура настройки модели и определения числовых значений ее параметров для двух протекторных резин летних легковых шин. С помощью этой процедуры обработаны результаты испытаний образцов резин на циклическое пульсационное сжатие. Поиск параметров модели осуществлен путем минимизации функции отклонений расчетных величин от результатов эксперимента методом Нелдера—Мида. Показано, что расчетная модель позволяет описать гистерезисные потери в резине с достаточной для практических целей точностью.

Статья адресована специалистам, занимающимся прикладными расчетами конструкций из полимерных материалов.

Ключевые слова: резина, циклическое сжатие, гистерезисные потери, модель вязкоупругости, поиск параметров модели.

Mathematical model of the viscoelastic behavior of rubber under cyclic loading

V.K. Semenov, A.E. Belkin

One of the urgent problems of the mechanics of car tires is the calculation of energy dissipation in a rolling tire under cyclic deformation. It forms the basis for determining the rolling resistance and heat buildup. The accuracy and reliability of the calculated predictions in this area depends on the adequate description of the physical properties of tire materials. This paper presents a mathematical model of the viscoelastic behavior of a tread rubber under uniaxial cyclic compression. The model is based on the concept of the rheological behavior of inelastic elastomers developed by Bergstrom and Boyce, the MIT experts. It is described in detail how to set up the model and determine the numerical values of its parameters for two tread rubbers of summer automobile tires. This procedure is used to process the results of cyclic pulse compression tests of rubber samples.

The model parameters are determined by minimizing the deviation of the calculated values from the experimental ones obtained by the Nelder-Mead method. It is shown that the calculation model makes it possible to describe the hysteresis losses in rubber with sufficient accuracy. The article is intended for professionals dealing with applied calculations of polymeric materials.

Keywords: rubber, cyclic compression, hysteresis losses, viscoelasticity model, searching for model parameters.

В основе современных представлений о механизме внутренних потерь энергии в эластомерах лежит концепция движения макромолекул эластомера в так называемом полимерном расплаве [1, 2]. Исходя из этой концепции, ученые Массачусетского технологического института Бергстрем и Бойс разработали модель неупругого реологического поведения эластомеров [3], которая описывает явление гистерезиса при циклическом нагружении и зависимость диаграмм деформирования материала от скорости деформирования. Модель Бергстрема—Бойс (в дальнейшем модель Б—Б) прошла весьма тщательную экспериментальную проверку [3—6].

Согласно модели Б—Б скорость деформации ползучести зависит от удлинения полимерной цепочки

$$\dot{\lambda}_c = A / (\lambda_c - 1)^n, \quad (1)$$

где λ_c — кратность деформации ползучести (сгээр); A, n — постоянные параметры.

Уравнение (1) определяет скорость ползучести при постоянном напряжении, причем эта скорость, безусловно, зависит от уровня приложенного напряжения. Предполагается, что процесс ползучести является энергетически активным, поэтому его скорость пропорциональна некоторой степени напряжения

$$\dot{\lambda}_c = \frac{B \sigma_c^m}{(\lambda_c - 1)^n}, \quad (2)$$

где B, m — новые характеристики материала.

В целом физическую модель вязкоупругого поведения эластомеров условно представляют в виде системы двух параллельно соединенных

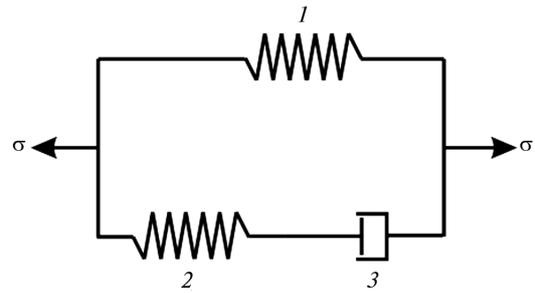


Рис. 1. Условная физическая модель поведения вязкоупругого материала:

1, 2 — упругие звенья; 3 — демпфер

звеньев разной природы (рис. 1). Упругое звено 1 определяет поведение при медленном статическом нагружении, т. е. при $\dot{\lambda} \approx 0$, когда демпфер 3 не воспринимает напряжения и не оказывает сопротивления деформации. В случае конечной скорости деформации работают оба звена системы. Демпфер оказывает сопротивление, зависящее от скорости деформации. В модели Б—Б свойства демпфера характеризуются уравнением (2). При очень быстром динамическом (мгновенном) нагружении демпфер «запирается», в нем не происходит деформации и напряжение распределяется между упругими элементами 1 и 2. В этом случае реакция материала является упругой, однако его жесткость повышается по сравнению с медленным упругим деформированием.

В настоящей статье модель Б—Б применяется для описания поведения резины при одноосном циклическом сжатии. Рассматривая малые деформации, не превосходящие 20%, будем считать, что для упругих элементов модели справедлив закон Гука. В этом случае модель описывается следующими уравнениями:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \sigma_c; \quad (3a)$$

$$\sigma_c = E_2 (\varepsilon - \varepsilon_c); \quad (3б)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{B \sigma_c^m}{(\varepsilon_c + \varepsilon_0)^n}, \quad (3в)$$

где ε — относительное удлинение (укорочение), введенное вместо кратности деформации λ ; ε_0 — малая постоянная деформация, добавляемая для описания скорости ползучести при нулевой деформации ε_c ; E_1, E_2 — модули упругости элементов 1 и 2 соответственно (см. рис. 1).

Следует отметить, что последнее уравнение системы (3) — обычное уравнение теории ползучести (теории упрочнения) [7].

Система (3) может быть приведена к одному дифференциальному уравнению

$$\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{\alpha E_2} - \frac{B}{\alpha} \frac{(\sigma - E_1 \varepsilon)^m}{(\alpha \varepsilon - \frac{\sigma}{E_2} + \varepsilon_0)^n} = 0, \quad (4)$$

где $\alpha = 1 + E_1 / E_2$.

При заданном процессе нагружения $\sigma = \sigma(t)$ интегрированием уравнения (4) по времени можно получить процесс деформирования материала $\varepsilon = \varepsilon(t)$. В случае периодических процессов $\sigma(t + T) = \sigma(t)$, $\varepsilon(t + T) = \varepsilon(t)$ удельная энергия, рассеянная за один цикл нагружения, определяется по формуле

$$q = \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt = \frac{B}{\alpha} \int_0^T \frac{\sigma (\sigma - E_1 \varepsilon)^m}{(\alpha \varepsilon - \sigma / E_2 + \varepsilon_0)^n} dt. \quad (5)$$

Оценим предсказательную способность расчетной модели, сопоставляя получаемые результаты с экспериментальными данными для резин протекторов автомобильных шин.

В работе [8] представлены результаты испытаний на циклическое сжатие образцов протекторных резин при гармоническом и трапецидальном пульсационных воздействиях; исследовано влияние амплитуды, частоты и формы цикла нагружения на удельную рассеянную энергию и относительный гистерезис. Были испытаны резины двух марок для летних легковых шин: резина марки 644, содержащая 65 массовых частей технического углерода, и резина марки 102, содержащая 50 массовых частей белой сажи и 15 массовых частей технического углерода. Используем экспериментальные результаты для определения значений параметров модели $E_1, E_2, B, m, n, \varepsilon_0$, входящих в определяющие соотношения (3).

Равновесный модуль E_1 определяется по диаграмме статического сжатия резины (рис. 2). На рисунке видно, что на начальном участке диаграммы сжатия являются нелинейными. Поэтому в качестве равновесного модуля резины принято значение секущего модуля для диапазона деформаций 0...0,15. Для резины марки 644 это

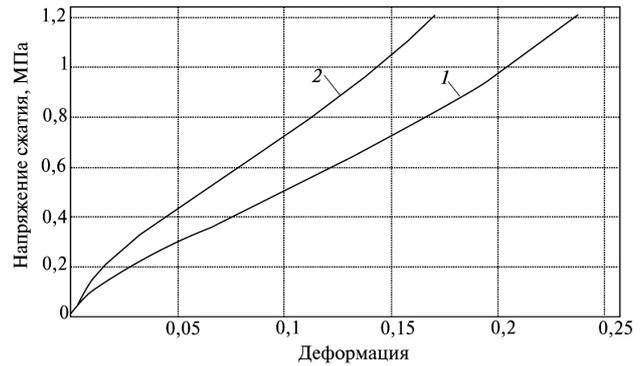


Рис. 2. Диаграмма сжатия при малой скорости нагружения 0,001 МПа/с:

1 — резина марки 644; 2 — резина марки 102 (с белой сажей)

значение составляет $E_1 \approx 5,0$ МПа, а для резины марки 102 — $E_1 \approx 7,0$ МПа.

Для дальнейшего уменьшения числа искомых параметров модели воспользуемся следующим предложением. Примем пульсационный гармонический режим нагружения $\sigma = \sigma_{base} (1 - \cos \omega t)$ с амплитудой напряжения σ_{base} в качестве базового. Рассматривая аналогичные нагружения $\sigma = \sigma_a (1 - \cos \omega t)$ с измененными амплитудами, будем сопоставлять значения удельной рассеянной энергии в базовом и измененных режимах q_a / q_{base} . Исходя из структуры выражения (5) для рассеянной энергии, можно предположить существование приближенной зависимости

$$q_a / q_{base} \approx (\sigma_a / \sigma_{base})^{m+1-n}, \quad (6)$$

или, что то же самое,

$$\ln(q_a / q_{base}) \approx (m + 1 - n) \ln(\sigma_a / \sigma_{base}). \quad (7)$$

Анализ экспериментальных данных, приведенных в статье [8], показывает, что зависимость (6) приближенно справедлива при значении показателя степени $m + 1 - n$ немногим больше, чем 2.

Принимая в первом приближении $m + 1 - n = 2$, в дальнейшем полагаем в законе ползучести (3в) и последующих уравнениях (4), (5) показатель степени $n = m - 1$.

По результатам эксперимента [8] энергия, рассеянная за один цикл гармонического нагружения, практически не зависит от частоты в исследованном диапазоне частот 1...20 Гц.

При расчете удельной рассеянной энергии по формуле (5) имеем

$$q = \frac{B}{\alpha \nu} f(\sigma_a, \varepsilon_a), \quad (8)$$

где $f(\sigma_a, \varepsilon_a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(\sigma - E_1 \varepsilon)^m d(\omega t)}{(\alpha \varepsilon - \sigma / E_2 + \varepsilon_0)^{m-1}}$ —

среднее значение подынтегральной функции на периоде; ν — частота процесса, Гц; σ_a, ε_a — амплитудные значения напряжения и деформации.

Чтобы приблизить математическую модель к результатам экспериментов, будем полагать, что в случае монохроматического гармонического нагружения параметр модели B , входящий в уравнения (3в), (4), (5) и (8), пропорционален частоте:

$$B = \nu \tilde{B},$$

где \tilde{B} — искомая постоянная модели. В этом случае расчетное значение рассеянной энергии остается постоянным при любых изменениях частоты.

Численные эксперименты по интегрированию уравнения (4) показывают, что малый параметр ε_0 практически не влияет на деформационные и гистерезисные характеристики процесса, если его значение удовлетворяет условию $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_a$. Исключая этот параметр из числа искомого, принимаем $\varepsilon_0 = 0,0001$.

Оставшиеся неизвестные постоянные модели определяем из условия минимума относительных отклонений теоретически подсчитанных размахов деформации $\varepsilon_{R \text{ theory}}$ и рассеянной энергии q_{theory} от результатов эксперимента $\varepsilon_{R \text{ exp}}$ и q_{exp} . Введем вектор искомого постоянных $\mathbf{X} = \{E_2, \tilde{B}, m\}$ и составим функцию отклонений

$$F(\mathbf{X}, \sigma_a, \nu) = \left(\frac{\varepsilon_{R \text{ theory}} - \varepsilon_{R \text{ exp}}}{\varepsilon_{R \text{ exp}}} \right)^2 + \left(\frac{q_{\text{theory}} - q_{\text{exp}}}{q_{\text{exp}}} \right)^2. \quad (9)$$

Для поиска вектора \mathbf{X} , обеспечивающего минимум функции отклонений (9), используем метод Нелдера — Мида. Поиск будем осуществлять среди допустимых значений вектора \mathbf{X} из области:

$$D = \{ \mathbf{X} \in R^3 : X_{i \min} \leq X_i \leq X_{i \max} \},$$

где X_i — i -я компонента вектора \mathbf{X} . Для этого к функции отклонений (9) добавим штрафную

функцию $\Phi(\mathbf{X})$, не позволяющую параметрам поиска выходить за границу области D . Штрафная функция может быть сформирована различными способами. В работе использовалась следующая ее формулировка.

Сначала определялись степени выхода каждой компоненты за допустимую область

$$g_{x_i}^1 = \frac{X_{i \min} - X_i}{X_{i \max} - X_{i \min}}; \quad g_{x_i}^2 = \frac{X_i - X_{i \max}}{X_{i \max} - X_{i \min}}.$$

Если компонента X_i находится в допустимой области, то $g_{x_i}^1 \leq 0, g_{x_i}^2 \leq 0$; в противном случае или $g_{x_i}^1 > 0$, или $g_{x_i}^2 > 0$. Далее штрафная функция вычислялась по формуле

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^3 [H(g_{x_i}^1) \exp(g_{x_i}^1) + H(g_{x_i}^2) \exp(g_{x_i}^2)], \quad (10)$$

где $H(g_{x_i}^1), H(g_{x_i}^2)$ — функции Хевисайда.

Модифицированная функция цели имела вид

$$F_{\text{mod}}(\mathbf{X}, \sigma_a, \nu) = F(\mathbf{X}, \sigma_a, \nu) + \Phi(\mathbf{X}). \quad (11)$$

При фиксированной амплитуде σ_a цикла напряжений функция $F_{\text{mod}}(\mathbf{X}, \sigma_a, \nu)$ зависит от частоты воздействия ν и достигает минимума при различных векторах $\mathbf{X}(\nu)$. Чтобы получить единый вектор \mathbf{X} , компоненты которого обеспечивают аппроксимацию закона вязкоупругости резины в диапазоне частот 1...20 Гц, еще раз изменим функцию цели. Новую функцию образуем путем суммирования функций отклонений (9) для всех экспериментально исследованных циклических нагружений с различными частотами из указанного диапазона:

$$F_{\text{mod}}(\mathbf{X}, \sigma_a) = \sum_{\nu} F(\mathbf{X}, \sigma_a, \nu) + \Phi(\mathbf{X}). \quad (12)$$

В настоящей работе вектор постоянных \mathbf{X} определялся на основе результатов испытаний резин марок 644 и 102 при пульсационном гармоническом сжатии с размахом напряжений $\sigma_R = 1,119$ МПа [8]. Область поиска параметров задавалась неравенствами

$$D = \{ \mathbf{X} \in R^3 : 2 \leq E_2 \leq 10; \\ 0,001 \leq \tilde{B} \leq 2; 1 \leq m \leq 5 \}.$$

В результате минимизации функции (12) получены следующие значения параметров модели:

- для резины марки 644 $E_2 = 6,0$ МПа, $\tilde{B} = 0,29$ МПа^{-m};

- для резины марки 102 (с белой сажой) $E_2 = 7,6$ МПа, $\tilde{B} = 0,27$ МПа^{-m}.

Значение показателя степени m в законе ползучести (Зв) близко к 3 для резин обеих марок.

Найденные значения параметров модели использованы при расчете циклического деформирования резин. Расчетные установившиеся гистерезисные петли как результат интегрирования уравнения (4) при напряжении $\sigma = 0,5 \sigma_R (1 - \cos \omega t)$ показаны на рис. 3. На этом же рисунке представлены экспериментальные кривые, полученные при частоте 10 Гц [8]. Несмотря на небольшое отличие в формах расчетной и экспериментальной гистерезисных петель, их площади, т. е. удельные механические потери q , практически совпадают.

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений величин размахов деформаций ϵ_R и удельных механических потерь q при размахе напряжения гармонического пульсационного цикла нагружения $\sigma_R = 1,119$ МПа

Марка резины	Расчет		Эксперимент при $\nu = 10$ Гц	
	ϵ_R	q , Дж/см ³	ϵ_R	q , Дж/см ³
644	0,145	0,044	0,144	0,043
102	0,125	0,034	0,122	0,036

Наблюдаемое расхождение между результатами теории и эксперимента заключается в том, что согласно принятой модели расчетные деформации и, следовательно, гистерезисные петли не меняются при изменении частоты, в эксперименте же обнаруживается слабая зависимость размаха деформаций от частоты при практически неизменной рассеянной энергии.

Для дальнейшей проверки математической модели исследована зависимость между удельными механическими потерями и размахами деформации при гармоническом пульсационном сжатии с фиксированной частотой возбуждения (рис. 4). На рисунке видно, что при деформациях до 15% наблюдается весьма хорошее соответствие между результатами расчета и эксперимента. Несколько меньшая точность обнаруживается в зависимости между размахами напряжения и деформации (рис. 5). Расчет здесь приводит к линейной связи, экспериментальные кривые слабо нелинейные.

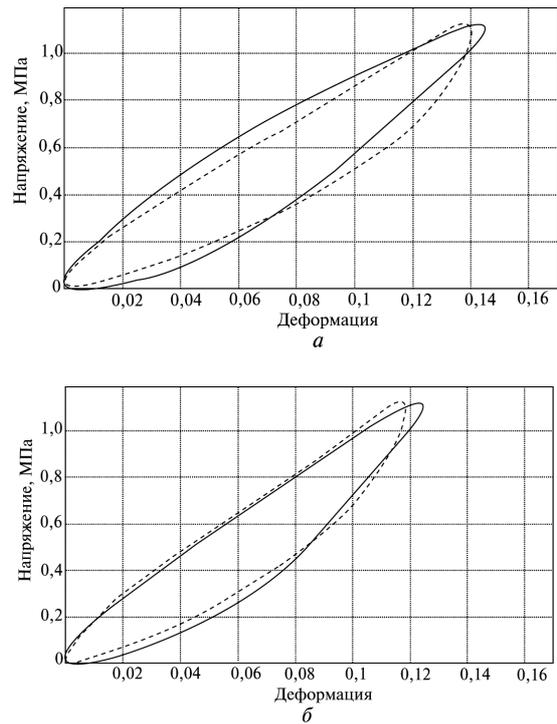


Рис. 3. Расчетные (—) и экспериментальные (- - -) гистерезисные петли для резины при пульсационном гармоническом сжатии с размахом напряжения $\sigma_R = 1,119$ МПа:

a — резина марки 644; b — резина марки 102 (с белой сажой)

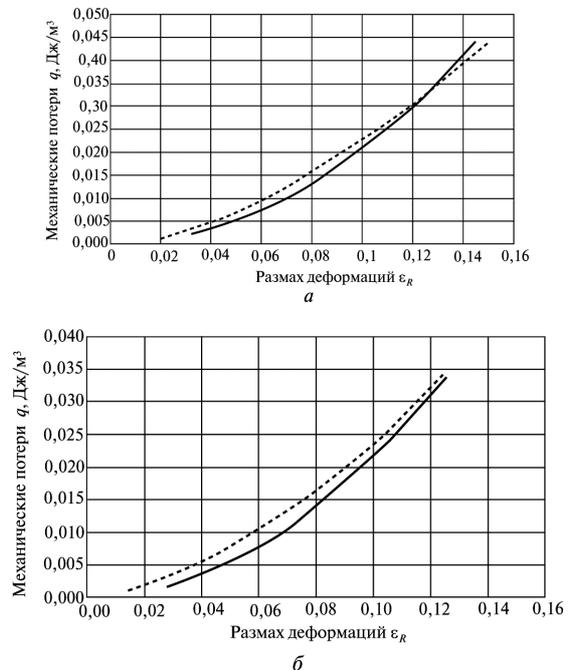


Рис. 4. Зависимость удельных механических потерь от размаха деформации при гармоническом пульсационном цикле нагружения с частотой 5 Гц:

a — резина марки 644; b — резина марки 102 (с белой сажой); — — расчет; - - - — эксперимент

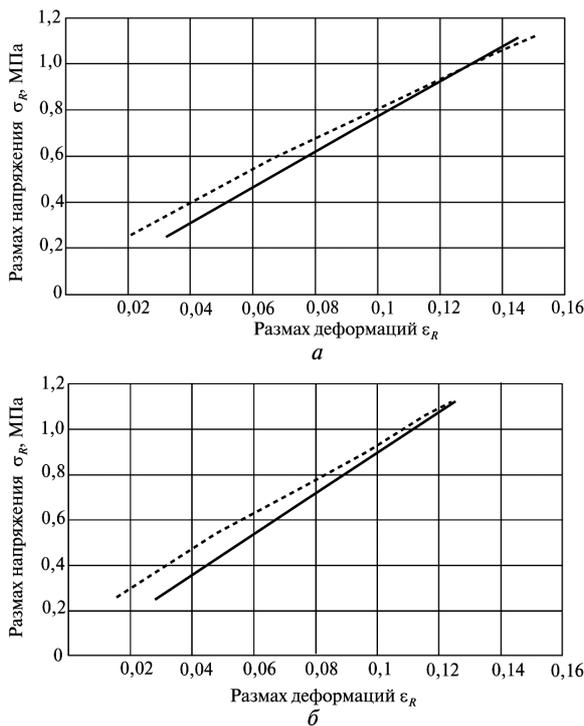


Рис. 5. Зависимость между размахами напряжения и деформации при гармоническом пульсационном цикле нагружения с частотой 5 Гц:

a — резина марки 644; *б* — резина марки 102 (с белой сажей); — — расчет; - - - — эксперимент

Таким образом, рассмотренные соотношения вязкоупругости для резины дают достаточную для практических целей точность в оценке гистерезисных потерь при значениях размахов деформации, превышающих 5%. Расхождение с экспериментом в этом случае составляет не более 20%. Если детали из резины работают в области меньших деформаций, необходимо переопределить значения параметров материала.

Литература

[1] de Gennes P.G. Reptation of a polymer chain in the presence of fixed obstacles. *The Journal of Chemical Physics*, 1971, vol. 55, no. 2, pp. 572–579.

Информация об авторах

СЕМЕНОВ Владимир Константинович (Москва) — ассистент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: semenov0811@gmail.com).

БЕЛКИН Александр Ефимович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: a_belkin@newmail.ru).

Information about the authors

SEMENOV Vladimir Konstantinovich (Moscow) — Assistant of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: semenov0811@gmail.com).

BELKIN Aleksandr Efimovich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: a_belkin@newmail.ru).

[2] Дой М., Эдвардс С. *Динамическая теория полимеров*. Москва, Мир, 1998. 440 с.

[3] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 931–954.

[4] Bergström J.S., Boyce M.C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 633–656.

[5] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chemistry and Technology*, 2004, vol. 77, no. 5, pp. 972–981.

[6] Dal H., Kaliske M. Bergström–Boyce model for nonlinear finite rubber viscoelasticity: theoretical aspects and algorithmic treatment for the FE method. *Computational Mechanics*, vol. 44, no. 6, pp. 809–823.

[7] Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. Москва, Наука, 1969. 420 с.

[8] Семенов В.К., Белкин А.Е. Экспериментальное исследование гистерезисных свойств протекторных резин в условиях циклического нагружения, характерного для автомобильных шин. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2013, № 2, с. 9–14.

References

[1] de Gennes P.G. Reptation of a polymer chain in the presence of fixed obstacles. *The Journal of Chemical Physics*, 1971, vol. 55, no. 2, pp. 572–579.

[2] Doi M., Edwards S. *Dinamicheskaya teoriya polimerov* [Dynamical Theory of Polymers]. Moscow, Mir publ., 1998. 440 p.

[3] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 931–954.

[4] Bergström J.S., Boyce M.C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 633–656.

[5] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström-Boyce model to high strain rates. *Rubber Chemistry and Technology*, 2004, vol. 77, no. 5, pp. 972–981.

[6] Dal H., Kaliske M. Bergström–Boyce model for nonlinear finite rubber viscoelasticity: Theoretical aspects and algorithmic treatment for the FE method. *Computational Mechanics*, vol. 44, no. 6, pp. 809–823

[7] Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Fundamentals of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka publ., 1969. 420 p.

[8] Semenov V.K., Belkin A.E. Eksperimental'noe issledovanie gisterizisnykh svoystv protektornykh rezin v usloviyakh tsiklicheskogo nagruzheniya, harakternogo dlia avtomobil'nykh shin [Experimental Study of Tread Rubbers Hysteresis Properties under Cyclic Loading Typical for Tires]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2013, no. 2, pp. 9–14.

Статья поступила в редакцию 23.10.2013