



ЗРУБИН

Владимир Степанович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ZARUBIN

Vladimir Stepanovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



КУВЫРКИН

Георгий Николаевич
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

KUVYRKIN

Georgiy Nikolaevich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



САВЕЛЬЕВА

Инга Юрьевна
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

SAVEL'EVA

Inga Yur'evna
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

Влияние взаимного расположения волокон на теплопроводность однонаправленного волокнистого композита

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

Благодаря высоким механическим характеристикам волокнистые композиты находят широкое применение в технике в качестве конструкционного материала. В настоящее время проблема моделирования процессов теплопроводности в таких композитах очень актуальна. В данной работе получены расчетные зависимости, позволяющие оценить эффективный коэффициент теплопроводности однонаправленного волокнистого композита в направлении, перпендикулярном волокнам. Эти зависимости учитывают влияние взаимного расположения волокон. Рассмотрены варианты расположения волокон в предположении сохранения композитом свойства трансверсальной изотропии по отношению к оси, параллельной волокнам. Расчетным путем установлено сближение значений нижних оценок рассматриваемого эффективного коэффициента теплопроводности, полученных как с учетом влияния взаимного расположения волокон, так и на основе теории смесей. Полученные расчетные зависимости могут быть использованы для прогноза эффективного коэффициента теплопроводности однонаправленного волокнистого композита в плоскости, перпендикулярной волокнам.

Ключевые слова: однонаправленный волокнистый композит, эффективная теплопроводность.

The influence of relative position of fibers on the thermal conductivity of unidirectional fiber composites

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'eva

Fiber composites are widely used in engineering as a construction material due to their favorable mechanical properties. Therefore, the modeling of heat conduction in these composites is relevant. In this paper, calculation relationships are obtained to estimate the effective thermal conductivity of unidirectional fiber composites in a direction perpendicular to the fibers. These relationships take into account the relative position of the fibers. Various fiber arrangements are considered under the assumption of transverse isotropy of a composite with respect to an axis parallel to the fibers. The convergence of the values of lower bounds of the effective thermal conductivity is proved by calculations taking into account the relative position of the fibers on the basis of the theory of mixtures. The proposed relationships can be used to predict the effec-

tive thermal conductivity of unidirectional fiber composites in a plane perpendicular to the fibers.

Keywords: unidirectional fiber composite, effective thermal conductivity.

Благодаря высоким механическим характеристикам волокнистые композиты находят широкое применение в технике в качестве современного конструкционного материала [1, 2]. Одно из существенных преимуществ волокнистых композитов состоит в том, что технологический процесс их получения как конструкционного материала обычно совмещен по времени с изготовлением конструкции из этого материала [3, 4]. Достаточно широкое применение получили однонаправленные композиты. По структуре однонаправленный волокнистый композит состоит из одинаково ориентированных в пространстве волокон, расположенных в отвержденном связующем, образующем матрицу композита.

Для термонапряженных конструкций, подверженных интенсивным механическим и тепловым воздействиям, кроме механических характеристик важны и теплофизические свойства конструкционного материала (в том числе его теплопроводность). Однонаправленный волокнистый композит по теплопроводности является анизотропным материалом, характеризуемым тензором второго ранга эффективной теплопроводности. Компоненты этого тензора зависят от ряда параметров, которые входят в математическую модель теплового взаимодействия волокон и матрицы в композите. Существуют различные подходы к построению такой модели [5–10], позволяющие получить оценки компонент этого тензора. Однако в большинстве известных подходов учитывается лишь объемное содержание волокон в композите и не рассматривается их взаимное расположение. Это приводит к значительному разбросу оценок эффективной теплопроводности композита в направлении, перпендикулярном волокнам (особенно при большом различии коэффициентов теплопроводности волокон и матрицы [11, 12]). Учет взаимного расположения волокон позволяет уточнить эти оценки

Основные соотношения. Примем, что изотропная матрица однонаправленного волокнистого композита армирована параллельно расположенными анизотропными волокнами, достаточно длинными по сравнению с их радиусом и обладающими свойством трансверсальной изотропии [6] относительно их продольной оси. Коэффициент теплопроводности волокон поперек этой оси обозначим λ_1° , вдоль нее — λ_3° , а коэффициент теплопроводности матрицы — λ_m . Композит в целом будем считать также трансверсально изотропным относительно оси, параллельной волокнам. Поэтому одна из главных осей тензора его эффективной теплопроводности совпадает с этой осью, причем две независимые компоненты тензора являются эффективными коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_3 композита в направлениях соответственно поперек и параллельно волокнам. Объемное содержание волокон в композите обозначим C_V .

Наиболее простые оценки значений λ_1 и λ_3 можно получить из соотношений теории смесей [8] в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1^+ &= \lambda_1^* / \lambda_m = 1 - C_V + \bar{\lambda}_1 C_V; \\ \tilde{\lambda}_3^+ &= \lambda_3^* / \lambda_m = 1 - C_V + \bar{\lambda}_3 C_V,\end{aligned}\quad (1)$$

где $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^\circ / \lambda_m$; $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3^\circ / \lambda_m$. Обратным по отношению к коэффициенту теплопроводности является коэффициент термического сопротивления. В этом случае из теории смесей следует

$$\begin{aligned}1/\lambda_1^- &= (1 - C_V) / \lambda_m + C_V / \lambda_1; \\ 1/\lambda_3^- &= (1 - C_V) / \lambda_m + C_V / \lambda_3,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1^- &= \lambda_1^- / \lambda_m = 1 / (1 - C_V + C_V / \bar{\lambda}_1); \\ \tilde{\lambda}_3^- &= \lambda_3^- / \lambda_m = 1 / (1 - C_V + C_V / \bar{\lambda}_3).\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\bar{\lambda}_1 > 0$ и $\bar{\lambda}_3 > 0$.

Верхние индексы «+» и «-» в формулах (1) и (2) указывают на то, что речь идет соответственно о верхней и нижней оценках значений λ_1 и λ_3 . Действительно, из этих формул получим

$$\tilde{\lambda}_1^+ - \tilde{\lambda}_1^- = \frac{(\bar{\lambda}_1 + 1/\bar{\lambda}_1 - 2)(1 - C_V)C_V}{1 - C_V + C_V/\bar{\lambda}_1} \geq 0,$$

поскольку значение дроби в средней части этого соотношения при положительном знаменателе и неотрицательном числителе также будет неотрицательным. Эта дробь равна нулю при $\bar{\lambda}_1 = 1$, а также при $C_V = 0$ и $C_V = 1$, т. е. в случае однородного материала, когда верхняя и нижняя оценки совпадают между собой и с точным значением λ_1 . Такой же результат справедлив и для разности $\tilde{\lambda}_3^+ - \tilde{\lambda}_3^-$.

Верхние и нижние оценки значений λ_1 и λ_3 можно также получить, если воспользоваться двойственной вариационной формулировкой стационарной задачи теплопроводности в неоднородном теле [10, 13–15], включающей минимизируемый и максимизируемый функционалы, достигающие на истинном решении задачи совпадающих экстремальных значений. При этом верхняя оценка соответствует предположению об однородности в представительном элементе композита векторного поля градиента температуры, а нижняя — поля вектора плотности теплового потока.

В работе [10] на основе построенной математической модели переноса тепловой энергии в представительном элементе однонаправленного волокнистого композита в форме, достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы, получена оценка λ_1^\diamond эффективного коэффициента λ_1 теплопроводности композита, которую можно представить в виде

$$\lambda_1^\diamond = \lambda_1^\circ \frac{2 - (1 - \bar{\lambda}_1)(1 - C_V)}{2 - (1 - \bar{\lambda}_1)(1 + C_V)}.$$

В интервале $(0;1)$ изменения C_V для любых значений $\bar{\lambda}_1 \neq 1$ справедливо неравенство $\lambda_1^+ > \lambda_1^\diamond > \lambda_1^-$. Эта же модель для эффективного коэффициента λ_3 теплопроводности композита приводит к оценке, совпадающей со значением λ_3^+ . Следует отметить, что значение λ_3^+ достаточно хорошо согласуется с немногочисленными экспериментальными данными по измерению величины λ_3 [12, 16].

Представленные выше оценки сохраняют смысл во всем промежутке изменения объемной концентрации C_V волокон в композите от 0 до 1, что предполагает возможность уменьшения радиуса волокон от некоторого конечного значения r_0 до бесконечно малого. При таком предположении сохраняет смысл значение $C_V = 1$, когда композит состоит только из волокон. Однако реальный однонаправленный волокнистый композит обычно состоит из волокон примерно одинакового радиуса, что ограничивает их наибольшую возможную объемную концентрацию значением $C_V^* < 1$. Предельно плотная укладка цилиндрических волокон с круговым поперечным сечением одинакового радиуса соответствует значению $C_V^\Delta = \pi / (2\sqrt{3}) \approx 0,907$, когда центры поперечных сечений, касающихся между собой соседних волокон одинакового радиуса, расположены в вершинах равносторонних треугольников. Однако из условия прочности при растяжении композита в направлении волокон каждое волокно должно быть окружено связующим, образующим матрицу [3], и поэтому реальное значение $C_V < C_V^\Delta$.

Учет взаимного расположения волокон. Однонаправленный волокнистый композит обладает свойством трансверсальной изотропии по отношению к оси, параллельной волокнам, если их взаимное расположение является хаотическим, т. е. носит случайный характер. При упорядоченном расположении волокон это свойство сохраняется, когда центры их круговых поперечных сечений одинакового радиуса r_0 совпадают с узлами плоской сетки с одинаковыми ячейками в виде правильных многоугольников, поскольку ось, проходящая через центр таких многоугольников перпендикулярно их плоскости, имеет порядок выше второго [17]. Ограничимся рассмотрением двух вариантов такого расположения волокон, соответствующих сетке с одинаковыми квадратными ячейками и ячейками в виде правильных треугольников.

В случае квадратных ячеек со стороной $2l$ при касании соседних волокон $l = r_0$ и максимально достижимое значение объемной кон-

центрации волокон $C_V \pi / 4 \approx 0,7854$. Тогда заданному значению $C_V = C_V^\square$ будет соответствовать относительный радиус волокна $r_0 = r_0 / l = \sqrt{4C_V / \pi}$. В этом случае повторяющийся элемент структуры композита представим в координатной плоскости $x_1 O x_2$ квадратной ячейкой (рис. 1) с длиной стороны, равной единице, содержащей четверть кругового поперечного сечения волокна с центром в начале координат и относительным радиусом \bar{r}_0 . Стороны ячейки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ примем идеально теплоизолированными, а на сторонах $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$ зададим температуры, равные соответственно нулю и T_0 .

Одну из оценок величины λ_1 в данном случае можно получить, если считать, что при установленном температурном состоянии в рассматриваемой ячейке все изотермы будут параллельны координатной оси Ox_1 . Такое распределение температуры является допустимым для минимизируемого функционала [14, 15], входящего в двойственную вариационную формулировку стационарной задачи теплопроводности в рассматриваемой ячейке. Поэтому соответствующая оценка будет верхней по отношению к величине λ_1 .

Верхнюю оценку величины λ_1 можно в данном случае представить в виде $\lambda_1^+ = 1 / R_T^-$, где R_T^- — нижняя оценка термического сопротивления рассматриваемой ячейки. Оно последовательно включает термическое сопротивление $R_m = (1 - \bar{r}_0) / \lambda_m$ полосы единичной длины шириной

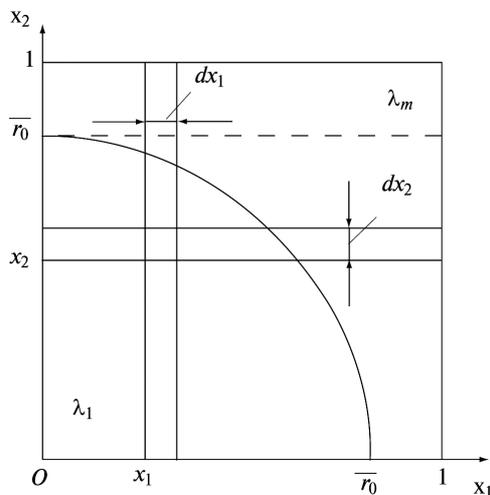


Рис. 1

риной $1 - \bar{r}_0$ с коэффициентом теплопроводности λ_m матрицы и термическое сопротивление R_T' полосы также единичной длины шириной \bar{r}_0 , содержащей четверть кругового поперечного сечения волокна и фрагмент поперечного сечения матрицы.

Для вычисления величины R_T' выделим полосу единичной длины шириной dx_2 , включающей два участка (см. рис. 1): длиной $\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1^* и длиной $1 - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_m . Тогда для термического сопротивления этой полосы получим

$$dR_T = \frac{dx_2}{\lambda_1^* \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2} + \lambda_m (1 - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2})},$$

а для всей полосы шириной \bar{r}_0 —

$$R_T = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^{\bar{r}_0} \frac{dx_2}{1 + b \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}} = \frac{\pi}{2\lambda_m b} - \frac{2}{\lambda_m b} \frac{\arctg \sqrt{(1 - b\bar{r}_0)/(1 + b\bar{r}_0)}}{\sqrt{1 - (b\bar{r}_0)^2}}, \quad (3)$$

где $b = \bar{\lambda}_1 - 1$.

Таким образом, нижняя оценка суммарного термического сопротивления квадратной ячейки составит $R_m + R_T$, а соответствующая верхняя оценка ее проводимости, совпадающая в данном случае с верхней оценкой величины λ_1 , будет равна

$$\lambda^\square = 1 / (R_m + R_T) = \lambda_m / (1 - \bar{r}_0 + \lambda_m R_T). \quad (4)$$

Для построения нижней оценки величины λ_1 необходимо использовать распределение вектора плотности теплового потока в рассматриваемой ячейке, допустимое для максимизируемого функционала [14, 15], входящего в двойственную вариационную формулировку стационарной задачи теплопроводности в этой ячейке. Такое распределение можно получить, разбивая квадратную ячейку системой адиабатических плоскостей, параллельных координатной оси Ox_2 . Тогда термическая проводимость этой ячейки равна сумме проводимостей $Y_m = \lambda_m (1 - \bar{r}_0)$ полосы единичной длины шириной $1 - \bar{r}_0$ с коэффициентом теплопроводности λ_m матрицы и Y_T полосы также единичной длины, но шириной \bar{r}_0 и содержащей четверть

кругового поперечного сечения волокна и фрагмент поперечного сечения матрицы.

Для вычисления значения Y_T выделим полосу единичной длины шириной dx_1 , включающей два участка (см. рис. 1): длиной $\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1° и длиной $1 - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_m . Для термической проводимости этой полоски получим

$$dY_T = \frac{dx_1}{\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2} / \lambda_1^\circ + (1 - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}) / \lambda_m},$$

а для всей полосы шириной \bar{r}_0 после интегрирования по x_1 в пределах от 0 до \bar{r}_0 имеем

$$Y_T = \frac{\pi \lambda_m}{2b_1} - \frac{2\lambda_m}{b_1} \frac{\arctg \sqrt{(1 - b_1 \bar{r}_0) / (1 + b_1 \bar{r}_0)}}{\sqrt{1 - (b_1 \bar{r}_0)^2}}, \quad (5)$$

где $b_1 = 1/\bar{\lambda}_1 - 1$. В итоге нижняя оценка величины λ_1

$$\lambda_{\square} = Y_m + Y_T = \lambda_m (1 - \bar{r}_0) + Y_T. \quad (6)$$

Отметим, что при $b > 1/\bar{r}_0$ в формуле (3) аргумент арктангенса и знаменатель дроби, в которую входит арктангенс, станут чисто мнимыми. В этом случае [18]

$$\begin{aligned} \frac{\arctg \sqrt{(1 - b\bar{r}_0) / (1 + b\bar{r}_0)}}{\sqrt{1 - (b\bar{r}_0)^2}} &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(b\bar{r}_0)^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{b\bar{r}_0 + 1} + \sqrt{b\bar{r}_0 - 1}}{\sqrt{b\bar{r}_0 + 1} - \sqrt{b\bar{r}_0 - 1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичная ситуация наблюдается в формуле (5) при $b_1 > 1/\bar{r}_0$. Тогда следует использовать равенство (7) с заменой b на b_1 . Формулы (4) и (6) с учетом равенств (3) и (5) можно преобразовать к виду, представленному в работе [6].

Рассмотрим вариант расположения центров круговых поперечных сечений волокон одинакового радиуса в узлах сетки, ячейки которой являются одинаковыми правильными треугольниками. Повторяющийся элемент структуры композита для такой укладки волокон представим в координатной плоскости $x_1 O x_2$ прямоугольной ячейкой (рис. 2) с длинами сторон, равными 1 и $\sqrt{3}$. Эта ячейка содержит четверти поперечных сечений двух соседних воло-

кон. Центр поперечного сечения одного из волокон помещен в начале координат, а центр поперечного сечения другого волокна расположен в противоположной вершине прямоугольника. Стороны ячейки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ считаем идеально теплоизолированными, а на сторонах $x_2 = 0$ и $x_2 = \sqrt{3}$ зададим температуры, равные соответственно нулю и T_0 .

При касании соседних волокон для относительного радиуса поперечного сечения волокна получим $\bar{r}_0 = 1$. Именно этому случаю соответствует предельное значение $C_V^\Delta = \pi / (2\sqrt{3})$ объемной концентрации волокон в композите. При $\bar{r}_0 \leq \sqrt{3} / 2$ для получения верхней оценки величины λ_1 исходную прямоугольную ячейку можно разбить на две равноценные также прямоугольные ячейки, каждая из которых содержит четверть поперечного сечения волокна и имеет стороны, равные 1 и $\sqrt{3} / 2$ (см. рис. 2). В этом случае $C_V \leq C_V^\circ = \pi\sqrt{3} / 8$, причем $\bar{r}_0 = \sqrt{2\sqrt{3}C_V} / \pi$. Тогда эту оценку можно построить аналогично рассмотренному выше случаю укладки волокон, когда центры их поперечных сечений были расположены в узлах квадратной сетки.

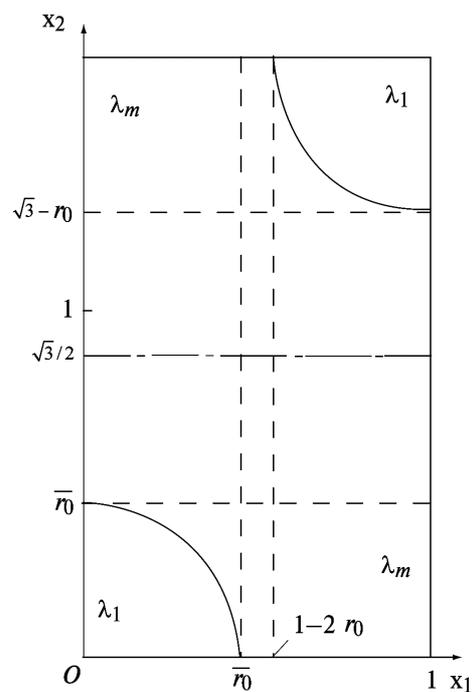


Рис. 2

Действительно, считая при установившемся температурном состоянии изотермы параллельными координатной оси Ox_1 , получаем, что суммарное термическое сопротивление ячейки будет последовательно включать термическое сопротивление $R'_m = (\sqrt{3}/2 - \bar{r}_0) / \lambda_m$ полосы единичной длины шириной $\sqrt{3}/2 - \bar{r}_0$ с коэффициентом теплопроводности λ_m матрицы и термическое сопротивление R_r полосы также единичной длины шириной \bar{r}_0 , определяемое формулой (3). Таким образом, верхняя оценка проводимости ячейки со сторонами 1 и $\sqrt{3}/2$ равна $1/(R'_m + R_r)$, а соответствующая ей верхняя оценка величины λ_1 —

$$\lambda^\Delta = \lambda_m (\sqrt{3}/2) / (\sqrt{3}/2 - \bar{r}_0 + \lambda_m R_r).$$

В случае $C_v^\circ < C_v \leq C_v^\Delta$ необходимо рассматривать исходную прямоугольную ячейку со сторонами 1 и $\sqrt{3}$ (рис. 3), причем равенство $\bar{r}_0 = \sqrt{2\sqrt{3}C_v} / \pi$ сохраняет силу.

Предположив параллельность изотерм координатной оси Ox_1 , при построении верхней оценки величины λ_1 для этой ячейки следует выделить две идентичные полосы единичной длины шириной $\sqrt{3} - \bar{r}_0$, каждая из которых включает большую часть поперечного сечения волокна и фрагмент матрицы, и промежуточную полосу также единичной длины и шириной $2\bar{r}_0 - \sqrt{3}$, включающую фрагмент матрицы и остальные части поперечных сечений обоих волокон. Для одной из идентичных полос термическое сопротивление определяет интеграл

$$R'_r = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^{\sqrt{3}-\bar{r}_0} \frac{dx_2}{1 + b\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}},$$

а для промежуточной полосы — интеграл

$$R''_r = \frac{1}{\lambda_m} \int_{\sqrt{3}-\bar{r}_0}^{\bar{r}_0} \frac{dx_2}{1 + b\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2} + b\sqrt{\bar{r}_0^2 - (x_2 - \sqrt{3})^2}}.$$

Тогда суммарная термическая проводимость рассматриваемой ячейки составит $1/(2R'_r + R''_r)$, а верхняя оценка величины λ_1 при $\bar{r}_0 > \sqrt{3}/2$ будет равна

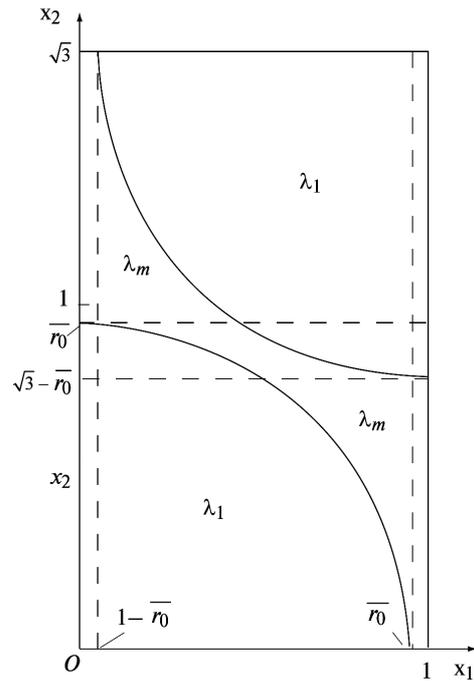


Рис. 3

$$\lambda^\Delta = \sqrt{3} / (2R'_r + R''_r).$$

Перейдем к построению нижней оценки величины λ_1 . В рассматриваемой ячейке (см. рис. 2) в случае $\bar{r}_0 \leq 1/2$ следует выделить адиабатическими сечениями, параллельными координатной оси Ox_2 , две идентичные полосы длиной $\sqrt{3}$ и шириной \bar{r}_0 , каждая из которых содержит четверть кругового поперечного сечения волокна и фрагмент поперечного сечения матрицы. Термическую проводимость каждой из этих полос определяет интеграл

$$Y'_r = \lambda_m \int_0^{\bar{r}_0} \frac{dx_1}{\sqrt{3 + b_1\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}}}.$$

Между этими полосами будет расположена полоса также длиной $\sqrt{3}$ и шириной $1 - 2\bar{r}_0$ с термической проводимостью $Y'_m = \lambda_m (1 - 2\bar{r}_0) / \sqrt{3}$ (ясно, что $Y'_m = 0$ при $\bar{r}_0 = 1/2$). В итоге для нижней оценки λ_1 , справедливой при $\bar{r}_0 \leq 1/2$ (при $C_v \leq \pi / (8\sqrt{3})$), получим

$$\lambda_\Delta = \lambda_m (1 - 2\bar{r}_0 + 2\sqrt{3}Y'_r).$$

Если $\pi / (8\sqrt{3}) < C_v \leq \pi / (2\sqrt{3})$, что соответствует условию $1/2 < \bar{r}_0 \leq 1$, то в рассматриваемой прямоугольной ячейке (см. рис. 3) необхо-

димо выделить адиабатическими сечениями, параллельными координатной оси Ox_2 , две идентичные полосы, каждая длиной $\sqrt{3}$ и шириной $1 - \bar{r}_0$ (она включает часть поперечного сечения волокна и фрагмент матрицы), и промежуточную полосу также длиной $\sqrt{3}$ и шириной $2\bar{r}_0 - 1$, включающую фрагмент матрицы и остальные части поперечных сечений обоих волокон. Для одной из идентичных полос термическую проводимость определяет интеграл

$$Y'_T = \lambda_m \int_0^{1-\bar{r}_0} \frac{dx_1}{\sqrt{3 + b_1 \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}}},$$

а для промежуточной полосы — интеграл

$$Y''_T = \lambda_m \int_{1-\bar{r}_0}^{\bar{r}_0} \frac{dx_2}{\sqrt{3 + b_1 \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2} + b_1 \sqrt{\bar{r}_0^2 - (x_2 - 1)^2}}}.$$

Тогда суммарная термическая проводимость рассматриваемой ячейки будет равна $2Y'_T + Y''_T$, а соответствующая нижняя оценка величины λ_1 при $1/2 < \bar{r}_0 \leq 1$ составит

$$\lambda_{\Delta} = \sqrt{3}(2Y'_T + Y''_T). \tag{9}$$

Результаты расчетов. Для количественной оценки влияния взаимного расположения волокон на теплопроводность однонаправленного волокнистого композита представим результаты расчетов полученных оценок эффективного коэффициента теплопроводности λ_1 композита, опустив далее в обозначения этих оценок нижний индекс. Выберем два фиксированных значения $\bar{\lambda}_1$, соответствующих различию на порядок коэффициентов теплопроводности λ_1° волокна и λ_m матрицы. Для значения $\bar{\lambda}_1 = 0,1$ результаты приведены на рис. 4 в виде зависимостей от C_V отношения $\tilde{\lambda} = \lambda / \lambda_m$ с соответствующими индексами, а для обратного ему значения $\bar{\lambda}_1 = 10$ — на этом же рисунке в виде зависимостей от C_V отношения $\hat{\lambda} = \lambda / \lambda_1^{\circ}$ с идентичными индексами. Это позволяет представить все результаты расчетов графиками с ординатами, не превышающими единицу.

На рисунке 4 сплошные кривые без дополнительных значков соответствуют зависимостям отношений $\tilde{\lambda}^* = \lambda^+ / \lambda_m$ и $\hat{\lambda}^* = \lambda^+ / \lambda_1^{\circ}$ от

C_V , а штриховые кривые также без дополнительных значков — зависимостям от C_V отношений $\tilde{\lambda}_* = \lambda^- / \lambda_m$ и $\hat{\lambda}_* = \lambda^- / \lambda_1^{\circ}$. На рисунке видно, что все кривые для оценок, учитывающих взаимное расположение волокон в композите, лежат в пределах полос, границы которых определены следующими из формул (1) и (2) соответствующими верхними и нижними оценками отношений λ_1 / λ_m и $\lambda_1 / \lambda_1^{\circ}$.

Следует отметить, что для фиксированных значений $C_V \in (0; C_V^{\square}]$ справедливы неравенства $\tilde{\lambda}^{\square} - \tilde{\lambda}_{\square} < \tilde{\lambda}^{\Delta} - \tilde{\lambda}_{\Delta}$ и $\hat{\lambda}^{\square} - \hat{\lambda}_{\square} < \hat{\lambda}^{\Delta} - \hat{\lambda}_{\Delta}$. Эти неравенства остаются в силе при произвольных значениях $\bar{\lambda}_1 \neq 1$. Для выбранных значений $\bar{\lambda}_1$ нижняя оценка $\tilde{\lambda}_{\Delta}$ достаточно близка к оценке $\tilde{\lambda}_*$ и практически совпадает с ней при $C_V \geq 0,3$, а нижние оценки $\hat{\lambda}_{\square}$ и $\hat{\lambda}_{\Delta}$ близки к оценке $\hat{\lambda}_*$. Расчеты показывают, что по мере отклонения значения $\bar{\lambda}_1$ от единицы происходит дальнейшее сближение указанных оценок. Характерно, что известные экспериментальные данные измерения величины λ_1 [16] также лучше согласуются с этими оценками. Так, для однонаправленного волокнистого компо-

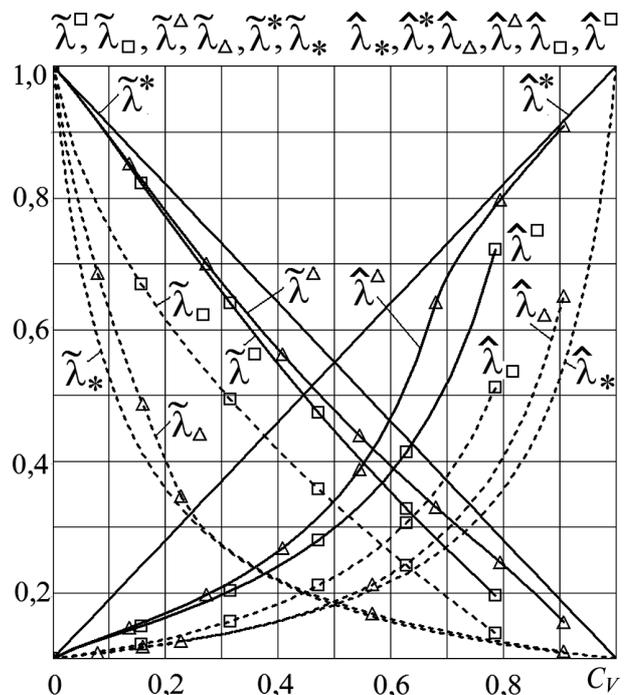


Рис. 4

зита с эпоксидным связующим и арамидным волокном кевлар-49 в работе [16] указано значение $\lambda_1 = 0,35 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ при $C_v = 0,6$ и значениях $\lambda_m = 0,133 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ и $\lambda_1^\circ = 4,110 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Этим данным соответствуют расчетные значения $\lambda_1^- = 0,317 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ по первой из формул (2), $\lambda^\square = 0,465 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ по формуле (6) и $\lambda_\Delta = 0,341 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ по формуле (8).

Выводы

1. Получены формулы для оценок эффективного коэффициента теплопроводности однонаправленного волокнистого композита в плоскости, перпендикулярной волокнам, учитывающие влияние их взаимного расположения.
2. Рассмотрены варианты расположения центров круглых поперечных сечений соседних волокон в вершинах квадратов и правильных треугольников.
3. Проведено сравнение значений этих оценок с результатами расчетов по формулам, которые следуют из теории смесей.
4. Показано, что при значительном различии коэффициентов теплопроводности волокна и матрицы композита происходит сближение значений нижних оценок рассматриваемого эффективного коэффициента теплопроводности, полученных как на основе теории смесей, так и с учетом влияния взаимного расположения волокон.

Литература

- [1] Любин Дж., ред. *Справочник по композиционным материалам*. В 2 т. Т. 2. Москва, Машиностроение, 1988. 584 с.
- [2] Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М., ред. *Композиционные материалы: Справочник*. Москва, Машиностроение, 1990. 512 с.
- [3] Комков М.А., Тарасов В.А. *Технология намотки композиционных конструкций ракет и средств поражения*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
- [4] Калинин В.А., Ягодников Д.А. *Технология производства ракетных двигателей твердого топлива*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
- [5] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. *Теплопроводность смесей и композиционных материалов*. Ленинград, Энергия, 1974. 264 с.
- [6] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука, 1977. 400 с.
- [7] Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Москва, Мир, 1982. 336 с.
- [8] Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси. *Вестник*

МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки, 2009, № 3, с. 36–49.

- [9] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения. *Тепловые процессы в технике*, 2013, т. 5, № 6, с. 276–282.
- [10] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность волокнистых композитов. Saatbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 128 с.
- [11] Янковский А.П. Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии. *Тепловые процессы в технике*, 2011, № 11, с. 500–516.
- [12] Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359–362.
- [13] Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. Москва, Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
- [14] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
- [15] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates for thermal resistance of an inhomogeneous solid body. *High Temperature*, 2013, vol. 51, no. 4, pp. 519–525.
- [16] Любин Дж., ред. *Справочник по композиционным материалам*. В 2 т. Т. 1. Москва, Машиностроение, 1988. 448 с.
- [17] Вустер У. *Применение тензоров и теории групп для описания физических свойств кристаллов*. Москва, Мир, 1977. 384 с.
- [18] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва, Физматгиз, 1963. 1100 с.

References

- [1] *Spravochnik po kompozitsionnym materialam* [Handbook of composites]. Ed. Liubin Dzh. In 2 vol. Vol. 2, Moscow, Mashinostroenie publ., 1988. 584 p.
- [2] *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite materials: Directory]. Ed. Vasil'ev V.V., Tarnopol'skii Iu.M. Moscow, Mashinostroenie publ., 1990. 512 p.
- [3] Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruksii raket i sredstv porazheniia* [Winding technology of composite structures of missiles and weapons]. Moscow, Bauman Press, 2011. 432 p.
- [4] Kalinchev V.A., Iagodnikov D.A. *Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigatelei tverdogo topliva* [Technology of production of solid propellant rocket motors]. Moscow, Bauman Press, 2011. 688 p.
- [5] Dul'nev G.N., Zarichniak Iu.P. *Teploprovodnost' smesei i kompozitsionnykh materialov* [Thermal blends and composites]. Leningrad, Energiia publ., 1974. 264 p.
- [6] Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [The theory of elasticity of micro environments]. Moscow, Nauka publ., 1977. 400 p.
- [7] Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Mir publ., 1982. 336 p.
- [8] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Smesevye modeli mekhaniki kompozitov. Ch. 1. Termomekhanika i termouprugost' mnogokomponentnoi smesi [Mixture Models of Composite Mechanics. Pt. 1. Thermal Mechanics and Thermoelasticity of Multicomponent Mixture]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences]. 2009, no. 3, pp. 36–49.
- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Effektivnyye koeffitsienty teploprovodnosti kompozita s vklucheniiami v vide udlinennykh ellipsoidov vrashcheniia [Effective Thermal Conductance of the Composite with Inclusions in the Form of Elongated Ellipsoid of Revolution]. *Teplovye protsessy v*

tekhnikе [Thermal Processes in Engineering]. 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282.

[10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. *Teploprovodnost' voloknistykh kompozitov* [Thermal conductivity of fiber composites]. Saatbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 128 p.

[11] Iankovskii A.P. Chislenno-analiticheskoe modelirovanie protsessov teploprovodnosti v prostranstvenno armirovannykh kompozitakh pri intensivnom teplovom vozdeistvii [Numerically-Analytical Modelling of Processes of Thermal Conductivity in Spatially Reinforced Composites at Intensive Thermal Action]. *Teplovyе protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering]. 2011, no. 11, pp. 500–516.

[12] Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359–362.

[13] Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniia zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat publ., 1983. 328 p.

[14] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki splushnoi sredy* [Mathematical models

of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, Bauman Press, 2008. 512 p.

[15] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates for thermal resistance of an inhomogeneous solid body. *High Temperature*, 2013, vol. 51, no 4, pp. 519–525.

[16] *Spravochnik po kompozitsionnym materialam* [Handbook of composites]. Ed. Liubin Dzh. In 2 vol. Vol. 1, Moscow, Mashinostroenie publ., 1988. 448 p.

[17] Vuster U. *Primenenie tenzorov i teorii grupp dlia opisaniia fizicheskikh svoistv kristallov* [The use of tensors and group theory to describe the physical properties of crystals], Moscow, Mir publ., 1977. 384 p.

[18] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz publ., 1963. 1100 p.

Статья поступила в редакцию 01.10.2013

Информация об авторах

ЗАРУБИН Владимир Степанович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

КУВЫРКИН Георгий Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

САВЕЛЬЕВА Инга Юрьевна (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com).

Information about the authors

ZARUBIN Vladimir Stepanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: fn2@bms-tu.ru).

KUVYRKIN Georgiy Nikolaevich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: fn2@bmstu.ru).

SAVEL'EVA Inga Yur'evna (Moscow) — Cand. Sc. (Phys. Math.), Associate Professor of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com).