



ДИМИТРИЕНКО
Юрий Иванович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

DIMITRIENKO
Yuriy Ivanovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



ЮРИН
Юрий Викторович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

YURIN
Yuriy Viktorovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



ШИВЕРСКИЙ
Евгений Александрович
ОАО «НИКИЭТ»

SHIVERSKIY
Evgeniy Aleksandrovich
(Moscow, Russian Federation,
JSC «NIKIET»)

Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 2. Численное статистическое моделирование*

Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, Е.А. Шиверский

Оценка надежности и долговечности взрывоопасных конструкций высокого давления является актуальной технической проблемой. В части 1 статьи разработан метод прогнозирования долговечности конструкций, основанный на численном моделировании трехмерного напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций и использовании «химического» критерия длительной прочности. Настоящая статья является продолжением этих работ. В ней предложен метод расчета и надежности сложных элементов конструкций высокого давления при случайных стационарных нагрузках, длительно воздействующих на конструкцию в процессе ее эксплуатации, с учетом статистического разброса упруго-прочностных характеристик материалов конструкций. Метод основан на сочетании численного статистического моделирования (метод Монте-Карло) НДС конструкции со случайными характеристиками конструкционных материалов и модели расчета накопления поврежденных конструкций при случайных стационарных нагружениях. Для расчета накопления повреждений применен «химический» критерий длительной прочности, позволяющий проводить расчеты накопления поврежденных и долговечности при циклических и статических нагрузках. Для численного расчета НДС конструкций с учетом ползучести разработан итерационный метод решения трехмерной задачи механики с использованием конечно-элементного метода. Получены аналитические выражения для дисперсии параметра повреждаемости и плотности распределения долговечности конструкции, которые позволяют сократить необходимый для расчетов надежности конструкций объем численного моделирования. В качестве примера применения разработанного метода проведен численный расчет долговечности и надежности элемента конструкции высокого давления в виде трехслойной сварной конструкции с патрубками. Конструкции такого типа используют при создании корпусов реакторов перспективных ядерных энергетических установок.

Ключевые слова: прогнозирование долговечности и надежности, накопление повреждений, ползучесть, численное моделирование, статистическое моделирование, метод конечного элемента, конструкции высокого давления, ядерные энергетические установки, «химический» критерий длительной прочности.

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Государственный контракт № 14.516.11.0083).

Prediction of durability and reliability of high-pressure structural elements. Part 2. Computational statistical modeling

Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, E.A. Shiverskiy

The evaluation of reliability and durability of high-pressure explosive structures is an important technical problem. In Part 1, a method for predicting durability of structures was proposed. The method implies the numerical simulation of a three-dimensional stress-strain state (SSS) of structures taking into account the chemical durability criterion. This paper deals with a method of calculation of durability and reliability of complex high-pressure structural elements under random steady-state loads imposed on the structure during its operation taking into account statistical straggling of elastic strength properties of structural materials. The method is a combination of the numerical statistical simulation (the Monte Carlo method) of the SSS of a structure with random characteristics of structural materials and a damage accumulation model under steady-state random loading. The damage accumulation is calculated using the chemical durability criterion. This criterion allows carrying out calculations of damage accumulation and durability under cyclic and static loads. To simulate the three-dimensional behavior of structures subject to creep, an iteration technique based on the finite element method is developed. Analytical expressions for the variances of the damage parameter and durability distribution density are obtained to reduce the amount of calculations required for evaluating the reliability. As an example of the application of this method, the durability and reliability of a high-pressure three-layer structure with welded pipes is calculated. Such structures can be used in prospective nuclear power plants.

Keywords: durability and reliability predicting, damage accumulation, fatigue, creep, computational modeling, Mont-Carlo method, finite element method, high-pressure structures, nuclear power plants, chemical durability criterion.

Для обоснования надежности уникальных дорогостоящих технических систем, изготавливаемых малыми партиями, или даже

в единственном числе, например, корпусов реакторов ядерных двигательных установок, нельзя использовать классические методы теории надежности, основанные на анализе результатов большого числа экспериментальных данных о натуральных изделиях. В последнее время активно развивается, главным образом за рубежом, теория надежности конструкций, основанная на использовании методов конечных элементов (МКЭ) и компьютерных технологий численного моделирования разрушения конструкций [1–10], применение которой частично, или в определенных случаях полностью, способно заменить проведение дорогостоящих испытаний конструкций на надежность. Однако работы по данному направлению не учитывают эффектов накопления повреждений в конструкциях при длительной эксплуатации, которые, как известно, определяют долговечность конструкций. Методы расчета повреждаемости конструкций рассмотрены во многих работах, например, [11–13], но, как правило, расчет накопления повреждений в этих работах осуществляется без использования методов МКЭ для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и без учета случайного характера нагрузок, действующих на конструкции в процессе эксплуатации.

В данной работе предложен метод расчета надежности конструкций высокого давления (КВД), основанный на комплексе математических моделей, описывающих накопление повреждений в конструкционных материалах при случайных нагружениях, и статистическом моделировании НДС конструкций.

Математические модели расчета НДС элементов КВД. Метод расчета НДС элементов конструкций в рамках 3-мерной постановки задачи механики с учетом деформаций ползучести и повреждаемости при циклическом, но детерминированном, нагружении предложен в ч. 1 данной работы [14]. В рамках предлагаемой модели могут быть использованы и другие методы расчета НДС тонкостенных конструкций [15–17].

Рассматриваемый элемент КВД представляет собой двухслойную оболочку с воздушным зазором между слоями, которые соединены с помощью четырех патрубков (рис. 1). Как и в работе [14] будем считать, что температурное



Рис. 1. Элемент КВД и конечно-элементная сетка, сгенерированная для расчетов НДС

поле оболочки КВД не меняется во времени и равномерно по всей оболочке. Полагаем, что элемент КВД подвергается переменному внутреннему давлению $p(t)$, действующему на внутреннюю оболочку КВД, так что можно полагать $p(t)$ периодической функцией времени, которую в силу периодичности представим в виде тригонометрического ряда:

$$p(t) = \bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t), \quad (1)$$

где \bar{p} — стационарная часть давления; p'_j, p''_j — амплитуды колебаний; $\omega_j = j\omega$ — частоты колебаний, кратные ведущей частоте $\omega = \pi / t_s$. Полагаем, что на торцевой части конструкции $\Sigma_{\text{н}}$ заданы нулевые перемещения (жесткая заделка) для обеих оболочек КВД.

При циклическом нагружении вида (1) напряжения в упругих элементах конструкции КВД без учета деформаций ползучести также имеют гармонический вид:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^0 \left(\bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t) \right); \\ \sigma &= \sigma^0 \left(\bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t) \right); \\ \sigma^0 &= I_1(\sigma^0); \\ \sigma_{\text{н}} &= \sigma_{\text{н}}^0 \left(\bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t) \right); \\ \sigma_{\text{н}}^0 &= \sigma_{\text{н}}(\sigma^0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ^0 — относительная амплитуда колебаний тензора напряжений, не зависящая от вре-

мени; $I_1(\sigma^0)$ и $\sigma_{\text{н}}(\sigma^0)$ — след и интенсивность тензора напряжений соответственно [18].

Для нахождения распределения поля амплитуд тензора напряжений $\sigma^0(\mathbf{x})$ в элементе КВД решаем краевую задачу теории упругости (10) из [14] линейно-упругого изотропного тела.

Накопление повреждений в конструкционных материалах. Накопление повреждений в конструкционных материалах КВД учитывается с помощью параметра повреждаемости $z(t)$, который, согласно модели [19–21] для изотропных сред при циклическом нагружении (1), имеет вид [14]

$$z(t) = B_0 \sigma^0 p_m + B_1 \sigma^{02} p_m^2 + \sigma_{\text{н}}^{02} (B_2 p_m^2 + B_3(t) (\bar{p}^2 + p_a^2 / 2) - B_4(t) \bar{p}^2), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} B_3(t) &= \frac{K_0}{1-\gamma} t^{1-\gamma} + t D_0; \\ B_4(t) &= \frac{\Gamma_0^2}{(1-\beta)^2} t^{2-2\beta} + t \frac{W_0}{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

— функции времени; $p_m = \bar{p} + p_a$ — максимальное значение нагрузки в одном цикле колебаний;

$p_a = \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j + p''_j)$ — амплитуда колебаний.

Выражение (3) записано для $\bar{p} > p_a$ (чисто асимметричный цикл колебаний). В него входят $K_0, \Gamma_0, \gamma, \beta, D_0, W_0, \phi$ — семь констант повреждаемости, три константы $\sigma_T, \sigma_c, \sigma_s$ — пределы статической прочности при растяжении, сжатии и сдвиге, а также B_0, B_1, B_2 — константы прочности:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\sigma_c^2 - \sigma_T^2}{\sigma_T(\sigma_c^2 + \sigma_T^2)}; \quad B_1 = \frac{2}{\sigma_c^2 + \sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_s^2}; \\ B_2 &= \frac{1}{3\sigma_s^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно «химическому» критерию длительной прочности в некоторой точке \mathbf{x}^* конструкции в момент времени $t^*(\mathbf{x}^*)$ происходит усталостное разрушение, если в этот момент достигает значения 1 параметр повреждаемости $z(t)$:

$$z(t^*(\mathbf{x}^*)) = 1. \quad (6)$$

Для хрупких материалов, у которых следствием первоначального разрушения является

практически мгновенный рост трещины, приводящий к полному разрушению элемента КВД, время $t^*(x^*)$ является искомой характеристикой долговечности КВД в детерминированной постановке задачи.

Случайное нагружение. В реальных условиях эксплуатации нагружение, как правило, представляет собой случайный процесс и вместо расчета долговечности вычисляются статистические характеристики: гамма-процентный ресурс безотказной работы, вероятность безотказной работы, средней наработки до отказа и т. п.

Положим, что нагрузка, действующая на КВД, — давление $p(t)$ является стационарным случайным гауссовским процессом, ведущая частота которого удовлетворяет условию $\omega = \pi / t_s \ll \pi / \Delta t$, что является приемлемым допущением для непрерывно работающей двигательной установки в течение всего срока эксплуатации. Тогда для функции $p(t)$ можно записать спектральное представление [22], которое формально совпадает с выражением (1), но амплитуды колебаний p'_j, p''_j являются случайными величинами с нулевым матожиданием: $M(p'_j) = M(p''_j) = 0$, распределены по нормальному закону с заданной дисперсией $D(p'_j), D(p''_j)$. Стационарное давление \bar{p} является неслучайной величиной. Для параметра повреждаемости справедлива также формула (3), но она представляет собой уже реализацию случайного процесса $z(t)$. Вычислим математическое ожидание и дисперсию параметра повреждаемости. В силу того, что все величины в (3), кроме амплитуды колебаний p_a и $z(t)$ на данном этапе полагаются детерминированными, то, используя свойства математического ожидания от линейных случайных функций [22], получаем

$$M(z(t)) = A_0 \bar{p} + A_1 (\bar{p}^2 + M(p_a^2)) + \sigma_n^{02} ((\bar{p}^2 + \frac{1}{2} M(p_a^2)) B_3(t) - \bar{p}^2 B_4(t)), \quad (7)$$

где $A_0 = B_0 \sigma^0$; $A_1 = B_1 \sigma^{02} + \sigma_n^{02} B_2$.

При выводе формулы (7) учтено, что $M(p_a) = 0$. Аналогично вычисляем дисперсию от параметра повреждаемости:

$$D(z(t)) = M((z - M(z))^2) = M\left((A_0 p_a + A_1 (p_a^2 + 2p_a \bar{p} - M(p_a^2)) + \frac{1}{2} B_3 (p_a^2 - M(p_a^2)))^2 \right) = A_0 M(p_a^2) + A_1^2 (M(p_a^4) + 4M(p_a^2) \bar{p}^2 - M^2(p_a^2)) + B_3(t) (\frac{1}{4} B_3(t) + A_1) \times (M(p_a^4) - M^2(p_a^2)) + 4A_0 A_1 M(p_a^2) \bar{p}. \quad (8)$$

Полагая, что плотность распределения параметра повреждаемости соответствует нормальному закону

$$f(z(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(z(t))}} \exp[-(z(t) - M(z(t)))^2 / D(z(t)) / 2], \quad (9)$$

получаем, что максимум случайных значений параметра повреждаемости достигается при значении z_{\max} , равном математическому ожиданию: $z_{\max} = M(z)$. Если $z_{\max} = 1$ в некоторый момент времени \bar{t}^* (т. е. когда выполняется условие $z_{\max}(\bar{t}^*) = M(z(\bar{t}^*)) = 1$), то в этот момент происходит усталостное разрушение элемента конструкции. Момент времени \bar{t}^* назовем средней долговечностью элемента КВД при заданном уровне случайных нагрузок, он, вообще говоря, не совпадает с математическим ожиданием от случайных долговечностей $M(\bar{t}^*)$, поскольку зависимость $z(\bar{t}^*)$ является нелинейной $M(z(\bar{t}^*)) \neq z(M(\bar{t}^*))$. Вычислим среднюю долговечность \bar{t}^* с помощью уравнения

$$M(z_{\max}(\bar{t}^*)) = 1, \quad (10)$$

подставляя в которое выражение (7), получаем уравнение для средней долговечности \bar{t}^* :

$$A_0 \bar{p} + A_1 (\bar{p}^2 + M(p_a^2)) + \sigma_n^{02} ((\bar{p}^2 + \frac{1}{2} M(p_a^2)) B_3(\bar{t}^*) - \bar{p}^2 B_4(\bar{t}^*)) = 1. \quad (11)$$

Это уравнение задает зависимость \bar{p} от \bar{t}^* , т.е. среднюю кривую усталости элемента КВД при случайном нагружении. Вводя среднее значение максимума нагрузки в цикле колебаний $\bar{p}_m = \bar{p} + \sqrt{M(p_a^2)}$ и средний коэффициент асимметрии цикла колебаний $\bar{k} = (\bar{p} - \sqrt{M(p_a^2)}) / \bar{p}_m$, уравнение (11) можно записать в виде, характерном для теории усталости, т.е. в виде зависимости максимальной нагрузки \bar{p}_m от долговечности \bar{t}^* и \bar{k} :

$$A_0 \bar{p}_m (1 + \bar{k}) + A_1 \bar{p}_m^2 (1 + \bar{k}^2) + \sigma_{ii}^0 \bar{p}_m^2 B(\bar{t}^*, \bar{k}) = 2, \quad (12)$$

где функция от времени и коэффициента асимметрии

$$B(\bar{t}^*, \bar{k}) \equiv \frac{1}{4} (3 + 2\bar{k} + 3\bar{k}^2) B_3(\bar{t}^*) - \frac{1}{2} (1 + \bar{k})^2 B_4(\bar{t}^*). \quad (13)$$

Коэффициенты σ^0 , σ_{ii}^0 фактически представляют собой инварианты тензора концентрации напряжений и характеризуют степень неоднородности напряженного состояния элемента КВД. В частности, для одноосного растяжения стержня (образца) $\sigma^0 = \sigma_{ii}^0 = \sigma_{11}^0 = 1$. Тогда из (12) получаем уравнение усталостной прочности при одноосном нагружении

$$\tilde{\sigma}_{11}^0(\bar{t}^*, \bar{k}) = \frac{1}{2A(\bar{t}^*, \bar{k})} ((B_0^2(1 + \bar{k})^2 + 8A(\bar{t}^*, \bar{k}))^{1/2} - B_0(1 + \bar{k})). \quad (14)$$

Здесь $A(\bar{t}^*, \bar{k}) = A_1(1 + \bar{k}^2) + \sigma_{ii}^0 B(\bar{t}^*, \bar{k})$ и $\tilde{\sigma}_{11}^0 = \bar{p}_m$.

Полагая в уравнении (9) $z(t^*) = 1$, находим плотность распределения долговечностей t^* :

$$f(t^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(z(t^*))}} \exp[-(1 - M(z(t^*)))^2 / D(z(t^*)) / 2], \quad (15)$$

где $M(z(t^*))$ и $D(z(t^*))$ определяются по формулам (7), (8), причем аргумент $z(t^*)$ для этих функций отличен от 1 и зависит от t^* . Распределение $f(t^*)$ (15) отлично от нормального. Аналитические формы (7)–(9), (15) позволяют существенно сократить объем численных расчетов долговечности, отказавшись от расчетов НДС элементов КВД для различных моментов времени.

Модель статистического разброса характеристик материалов. По различным причинам (не совершенства технологии изготовления, сборки, соединения элементов и т. п.) значения упруго-прочностных характеристик конструкционных материалов одной и той же марки могут варьироваться. Рассмотрим модель, в которой часть характеристик материалов, входящих в определяющие соотношения упругости и повреждаемости (3), являются относительно стабильными, и их можно положить детерминированными величинами. К ним отнесем следующие:

$$\{a_1 \dots a_s\} = \{v, \sigma_s, \sigma_c, D_0, W_0, \phi\}, \quad (16)$$

где v — коэффициент Пуассона, а другая часть представляет собой набор случайных величин:

$$\{c_1 \dots c_q\} = \{E, \sigma_T, K_0, \Gamma_0\}, \quad q = \overline{1, 4}, \quad (17)$$

где E — модуль упругости, здесь $q = 4$. При отсутствии экспериментальных данных полагаем, что значения случайных величин $\{c_{1(k)} \dots c_{q(k)}\}$ распределены по нормальному закону с заданным среднеквадратическим отклонением.

Применим метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), согласно которому рассмотрим серии статистических реализаций наборов случайных величин (17) полагая заданными параметры их распределения (математическое ожидание и дисперсию). Для каждой k -й реализации $\{c_{1(k)} \dots c_{q(k)}\}$ случайных величин $\{c_1 \dots c_q\}$ можно проделать описанную в предыдущих разделах процедуру расчета НДС в конструкции (10) с помощью решения задачи теории упругости (10) из [14] и расчета плотности распределения долговечностей $f_{(k)}(t^*)$ по формуле (15).

Для того чтобы найти итоговую плотность распределения долговечностей $\bar{f}(t^*)$ для всех реализаций случайных величин (17) просуммируем их по всем этим реализациям, образуя генеральную совокупность случайных величин

$$\bar{f}(t^*) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{f}_{(k)}(t^*). \quad (18)$$

С помощью этой функции $\bar{f}(t^*)$ вычислим функцию распределения отказа элемента КВД $F(t^*)$ (вероятность разрушения конструкции в зависимости от времени эксплуатации) и функцию надежности $P(t^*)$ элемента КВД (вероятность безотказной работы в зависимости от времени эксплуатации):

$$F(t^*) = \int_0^{t^*} \bar{f}(t) dt; \quad P(t^*) = 1 - F(t^*). \quad (19)$$

По этим формулам определим вероятность $P(t)$ безотказной работы за заданное время t и гамма-процентный ресурс t_γ — время безотказной работы с вероятностью γ : $P(t_\gamma) = 1 - F(t_\gamma) = \gamma$. Среднюю наработку до отказа \bar{t}^* вычислим, как

среднее значение долговечностей $\bar{t}_{(k)}^*$, каждое из которых является решением уравнения (11) при k -й реализации $\{c_{1(k)} \dots c_{q(k)}\}$:

$$\bar{t}^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{t}_{(k)}^* \quad (20)$$

Алгоритм численного моделирования. В соответствии с разработанной методикой был предложен алгоритм численного моделирования надежности и долговечности элементов КВД, который состоял из следующих этапов:

1) определение математических ожиданий и дисперсий характеристик конструкционных материалов, входящих в (17), и детерминированных характеристик (16) путем обработки экспериментальных данных;

2) задание стационарной нагрузки \bar{p} и дисперсии случайной величины — амплитуды колебаний нагрузки p_a , численный расчет математического ожидания квадрата амплитуды $M(p_a^2)$ на основе нормального закона распределения p_a с нулевым средним и с использованием датчика случайных чисел для p_a ;

3) построение компьютерной 3D модели элемента КВД, построение конечно-элементных сеток для проведения расчетов НДС элементов КВД;

4) формирование одной реализации значений $\{c_{1(k)} \dots c_{q(k)}\}$ набора случайных параметров $\{c_1 \dots c_q\}$ (17);

5) решение линейной задачи теории упругости (10) [14] для значения реализации модуля упругости $E_{(k)}$ в результате которого вычисляем относительную амплитуду напряжений $\sigma_{(k)}^0$;

6) расчет значений $B_{0(k)}, B_{1(k)}, B_{2(k)}, B_{(k)}(t), \sigma_{(k)}^0, \sigma_{n(k)}^0$, входящих в выражения (7), (8), (11), расчет $M_{(k)}(z(t)), D_{(k)}(z(t)), \bar{t}_{(k)}^*$ по формулам (7), (8), (11);

7) расчет плотности распределения $f_{(k)}(t^*)$ по формуле (15);

8) осуществление цикла по всем N реализациям случайных величин $\{c_1 \dots c_q\}$, в котором повторяются этапы 4—7 ($k = \overline{1, N}$);

9) расчет итоговой плотности распределения долговечностей $\bar{f}(t^*)$, функции распределения отказа $F(t^*)$, надежности $P(t^*)$ по (18), (19), а также гамма-процентного ресурса t_γ и средней наработки до отказа \bar{t}^* по (20).

Исходные данные для проведения численного моделирования. Математические ожидания значений параметров материала КВД (16), (17) и среднеквадратические отклонения, принятые в расчетах приведены в таблице.

При проведении численного моделирования были выбраны следующие значения геометрических параметров элементов КВД: относительная толщина стенки внешней оболочки — 0,02, внутренней оболочки — 0,01; внутреннее давление газов на оболочку $\bar{p}=3,3$ МПа; давление газа между внутренней и внешней оболочками $\bar{p}=3,0$ МПа; средний коэффициент асимметрии цикла пульсирующего по случайному закону давления $\bar{k}=0,1$. Температура внутренней теплонагруженной оболочки в течение всего времени длительного нагружения полагалась равной 1 000 °С.

Расчет параметров повреждаемости и долговечности. В соответствии с разработанной методикой были проведены две серии численных экспериментов с различными выборками реализаций значений случайных параметров:

серия 1 — по 50 реализаций для каждого случайного параметра из набора $\{c_1 \dots c_4\}$ (17);

серия 2 — по 200 реализаций для каждого случайного параметра.

Значения математических ожиданий и коэффициентов вариации для случайных величин, принятые в расчетах, указаны в таблице. Реализация значений случайных величин, распределенных по нормальному закону, осуществлялась с помощью датчика случайных чисел.

Зависимость параметра повреждаемости от длительности t воздействия нагрузок, вычисленного в некоторой точке x КВД, в которой достигается максимальное значение этого параметра, представлена на рис. 2. Кривые приведены для шести реализаций набора случайных величин, в котором варьировались одновременно все параметры (17).

Зависимости долговечности конструкции корпуса КВД от статистических реализаций значений параметров (17), которые варьирова-

Значения характеристик материала КВД на основе жаростойкого молибденого сплава

Номер характеристики i	Характеристика материала c_i	Размерность величины c_i	Математическое ожидание $M(c_i)$	Относительное среднеквадратическое отклонение $\sqrt{D(c_i)} / M(c_i), \%$
1	E	ГПа	170	10
2	ν	1	0,3	0
3	σ_T	ГПа	0,49	20
4	σ_c	ГПа	0,675	0
5	σ_s	ГПа	0,18	0
6	α	1	0,839	0
7	β	1	0,683	0
8	K_0	$\text{ГПа}^{-2} \cdot \text{с}^{1-\alpha}$	$4,731 \cdot 10^{-2}$	10
9	Γ_0	$\text{ГПа}^{-2} \cdot \text{с}^{2-2\beta}$	$5,789 \cdot 10^{-2}$	10

лись случайным образом по нормальному закону, приведены на рис. 3 и 4. Кривые, показанные на этих графиках, соответствуют вариантам, при которых варьировался только один из указанных параметров. Полученные зависимости позволяют сделать выводы о различном влиянии разных случайных факторов на итоговую долговечность конструкций корпуса.

Случайное увеличение жесткости материала корпуса (без повышения прочности), обусловленное как технологическими факторами изготовления, так и влиянием факторов облучения, старения, приводит к снижению долговечности, поскольку возрастание модуля упругости вызывает увеличение максимумов напряжений в конструкции.

Случайное возрастание статической прочности, напротив, увеличивает долговечность, причем эта зависимость может иметь скачкообразный характер (рис. 3, б), что связано со сменой типа разрушения материала при изменении предела прочности на растяжение: может осуществляться переход от сдвигового разрушения к разрушению от растяжения. Могут изменяться также зоны, в которых происходит разрушение в конструкции.

Случайное возрастание параметра усталостной прочности K_0 приводит к уменьшению долговечности, а параметра Γ_0 способствует ее увеличению. Сокращается долговечность и при случайном возрастании амплитуды давления, воздействующего на конструкцию. Итоговый

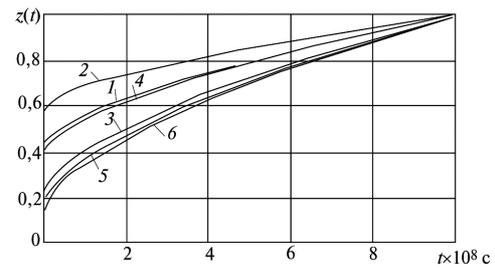


Рис. 2. Накопление повреждений в элементе КВД (в точке максимальных значений параметра z) / при различных значениях реализаций полного набора случайных параметров (30), цифрами у кривых обозначен номер реализации

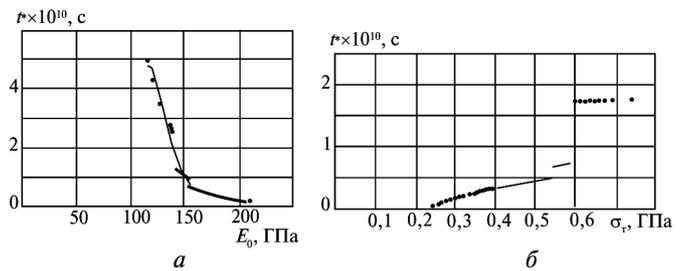


Рис. 3. Зависимость долговечности элементов КВД от статистических реализаций значений модуля упругости E_0 (а) и статической прочности σ_T (б)

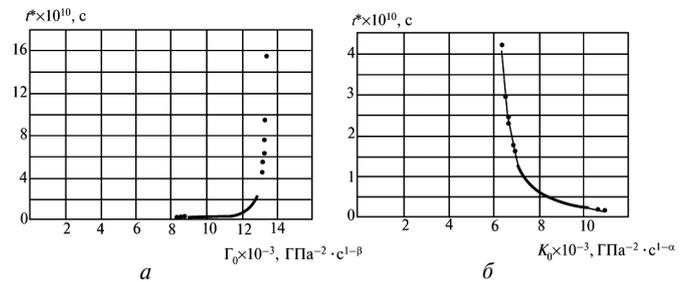


Рис. 4. Зависимость долговечности элементов КВД от статистических реализаций значений параметров усталостной прочности Γ_0 (а) и K_0 (б)

расчет долговечности проводился при комплексном изменении всех параметров (17) по нормальному закону.

Моделирование характеристик надежности элемента КВД. По результатам расчета реализаций случайной величины — долговечности \bar{t}^* при различных значениях параметров конструкционных материалов и нагрузок (17) $E_0, \sigma_T, K_0, \Gamma_0$ была вычислена плотность распределения $f(\bar{t}^*)$ случайной величины отказов (рис. 5) и характеристики надежности КВД: вероятность безотказной работы; средняя наработка

до отказа и гамма-процентный ресурс безотказной работы (рис. 6).

По результатам численного моделирования были определены следующие значения показателей надежности рассмотренного типа элемента КВД:

- вероятность безотказной работы за время непрерывной работы в течение 10 лет ($t = 3,1 \cdot 10^8$ с) $P_{6,p} = 0,993$ (значение получено по результатам расчета выборки 200 численных реализаций);
- средняя наработка до отказа — $t = 2,1 \cdot 10^9$ с ($T_c = 67$ лет);
- гамма-процентный ресурс безотказной работы — $T_{90} = 1,8 \cdot 10^9$ с ($T_c = 58$ лет); $T_{99} = 4,1 \cdot 10^9$ с ($T_c = 13$ лет); $T_{99,3} = 3,1 \cdot 10^8$ с ($T_c = 10$ лет).

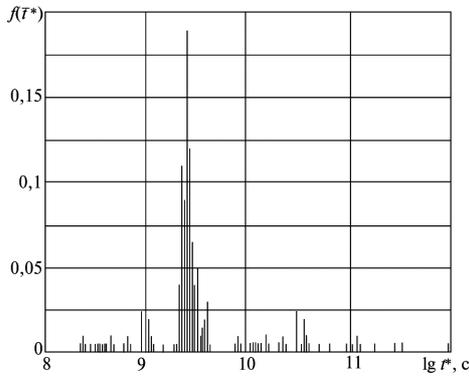


Рис. 5. Плотность распределения отказов элемента КВД (плотность распределения долговечности), рассчитанная по результатам численного моделирования

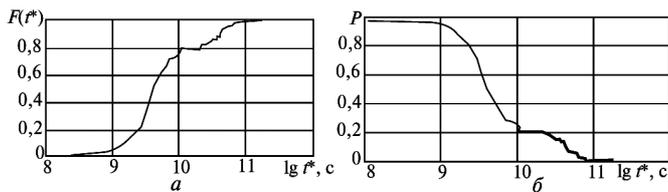


Рис. 6. Функция распределения отказа (а) и функция надежности элемента КВД (б), рассчитанные по результатам численного моделирования

Выводы

Предложен метод прогнозирования долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления, основанный на использовании статистического и численного конечно-элементного моделирования. Метод применим для расчета параметров долговечности и надежности сложных конструкций типа со-

ставных тонкостенных оболочек при случайных стационарных нагружениях. Пример расчета элемента конструкции высокого давления, выполненный в работе, показал возможность практической реализации предложенной методики и ее эффективность с точки зрения сокращения или замены экспериментальных исследований по обоснованию надежности конструкций.

Литература

- [1] Beck A.T., Edison da Rosa. Structural reliability analysis using deterministic finite element Programs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2006, no. 3, pp. 197—222.
- [2] Anantha Ramu S., Ganesan R. Stability analysis of a stochastic column subjected to stochastically distributed loadings using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1992, no. 11, pp. 105—115.
- [3] Adhikari S., Manohar C.S. Dynamic analysis of framed structures with statistical uncertainties. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, pp. 1157—1178.
- [4] Wang D., Chowdhury M.R., Haldar A. System reliability evaluation considering strength and serviceability requirements. *Computers and Structures*, 1997, vol. 62, no. 5, pp. 883—896.
- [5] Takada T. Weighted integral method in multi-dimensional stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, vol. 5, no. 4, pp.158—166.
- [6] Spanos P.D., Ghanem R. Stochastic finite element expansion for random media. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, vol. 115, no. 5, pp. 1035—1053.
- [7] Mahadevan S., Dey A. Adaptive Monte Carlo simulation for time-varient reliability analysis of brittle structures. *AIAA Journal*, 1997, vol. 35, no. 2, pp. 321—326.
- [8] Liu W.K., Bestereld G.H., Belytschko T. Variational approach to probabilistic finite elements. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 1988, vol. 114, no. 12, pp. 2115—2133.
- [9] Der Kiureghian A., Ke J.B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, vol. 3, no. 2, pp. 83—91.
- [10] Chang T.P. Dynamic finite element analysis of a beam on random foundation. *Computers and Structures*, 1993, vol. 48, no. 4, pp. 583—589.
- [11] Болотин В.В. *Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений*. Москва, Стройиздат, 1971, 256 с.
- [12] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термоэластоупругости*. Москва, Наука, 1970, 280 с.
- [13] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Длительная прочность армированных пластиков. *Механика композитных материалов*, 1989, № 1, с. 16—22.
- [14] Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2013, № 11, с. 3—11.
- [15] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Машиностроение, 1997, 366 с.
- [16] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86—100.
- [17] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 610 с.
- [18] Димитриенко Ю.И. *Тензорный анализ*. В 4 т. Т. 1: *Механика сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [19] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Прогнозирование долговечности полимерных элементов конструкций с помощью

«химического» критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники*, № 1/2, 2002, с. 15–21.

[20] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Расчет сопротивления усталости композитов на основе «химического» критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники*, № 1/2, 2002, с. 21–25.

[21] Димитриенко Ю.И., Дубровина А.Ю., Соколов А.П. Конечное-элементное моделирование усталостных характеристик композиционных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. вып. Математическое моделирование*, 2011, с. 34–49.

[22] Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, Изд-во Физматлит, 1969, 564 с.

References

[1] Beck A.T., Edison da Rosa. Structural reliability analysis using deterministic finite element Programs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2006, no. 3, pp. 197–222.

[2] Ramu S.A., Ganesan R. Stability analysis of a stochastic column subjected to stochastically distributed loadings using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1992, no. 11, pp. 105–115.

[3] Adhikari S., Manohar C.S. Dynamic analysis of framed structures with statistical uncertainties. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, pp. 1157–1178.

[4] Wang D., Chowdhury M.R., Haldar A. System reliability evaluation considering strength and serviceability requirements. *Computers and Structures*, 1997, vol. 62, no. 5, pp. 883–896.

[5] Takada T. Weighted integral method in multi-dimensional stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, vol. 5, no. 4, pp. 158–166.

[6] Spanos P.D., Ghanem R. Stochastic finite element expansion for random media. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, vol. 115, no. 5, pp. 1035–1053.

[7] Mahadevan S., Dey A. Adaptive Monte Carlo simulation for time-variant reliability analysis of brittle structures. *AIAA Journal*, 1997, vol. 35, no. 2, pp. 321–326.

[8] Liu W.K., Besterfield G.H., Belytschko T. Variational approach to probabilistic finite elements. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 1988, vol. 114, no. 12, pp. 2115–2133.

[9] Der Kiureghian A., Ke J.B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, vol. 3, no. 2, pp. 83–91.

[10] Chang T.P. Dynamic finite element analysis of a beam on random foundation. *Computers and Structures*, 1993, vol. 48, no. 4, pp. 583–589.

[11] Bolotin V.V. *Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений* [Application of the theory of probability and reliability theory in the calculation of structures]. Moscow, Stroizdat publ., 1971. 256 p.

[12] П'иушин А.А., Победрия В.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости* [Fundamentals of mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka publ., 1970. 280 p.

[13] Dimitrienko Iu.I., Dimitrienko I.P. Dlitel'naia prochnost' armirovannykh plastikov [Long-term strength of reinforced plastics]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1989, no. 1, pp. 16–22.

[14] Dimitrienko Iu.I., Iurin Iu.V., Evropin S.V. Prognozirovaniye dolgovrechnosti i nadezhnosti elementov konstruksii vysokogo davleniia. Chast' 1. Chislennoe modelirovaniye nakopleniia povrezhdenii. [Prediction of durability and reliability of structural elements under high pressure. Part 1. Numerical simulation of damage accumulation]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mashinostroeniye* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2013, no. 11, pp. 3–11.

[15] Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow, Mashinostroeniye publ., 1997. 366 p.

[16] Dimitrienko Iu.I. Asimptoticheskaia teoriia mnogoslonykh tonkikh plastin [Asymptotic Theory of Multilayer Thin Plates]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences]. 2012, no. 3, pp. 86–100.

[17] Dimitrienko Iu.I. *Nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 610 p.

[18] Dimitrienko Iu.I. *Tenzornyye analizy. V 4 t. T. 1: Mekhanika sploshnoi sredy* [Tensor analysis. In 4 vol. Vol. 1: Continuum Mechanics]. Moscow, Bauman Press, 2011. 463 p.

[19] Dimitrienko Iu.I., Dimitrienko I.P. Prognozirovaniye dolgovrechnosti polimernykh elementov konstruksii s pomoshch'yu «khimicheskogo» kriteriia dlitel'noi prochnosti [Predicting durability of polymeric structural elements with the help of «chemical» criterion of long-term strength]. *Voprosy obronnoi tekhniki* [Questions of defense equipment]. 2002, no. 1/2, pp. 15–21.

[20] Dimitrienko Iu.I., Dimitrienko I.P. Raschet soprotivleniia ustalosti kompozitov na osnove «khimicheskogo» kriteriia dlitel'noi prochnosti [Calculation of the fatigue resistance of the composites based on «chemical» long-term strength criterion]. *Voprosy obronnoi tekhniki* [Questions of defense equipment]. 2002, no. 1/2, pp. 21–25.

[21] Dimitrienko Iu.I., Dubrovina A.Iu., Sokolov A.P. Konechno-elementnoe modelirovaniye ustalostnykh kharakteristik kompozitsionnykh materialov [Finite element modeling of fatigue properties of composite materials]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. Spetsial'nyi vypusk Matematicheskoe modelirovaniye* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences. Special issue of Mathematical Modeling]. 2011, pp. 34–49.

[22] Venttsel' E.S. *Teoriia veroiatnostoni* [Probability]. Moscow, Fizmatlit publ., 1969. 564 p.

Статья поступила в редакцию 03.07.2013

Информация об авторах

ДИМИТРИЕНКО Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

ЮРИН Юрий Викторович (Москва) — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

ШИВЕРСКИЙ Евгений Александрович (Москва) — кандидат технических наук, начальник центра вероятностных анализов безопасности и риска ОАО «НИКИЭТ» (107140, Москва, Малая Красносельская ул., д. 2/8, e-mail: e_shiversky@nikiet.ru).

Information about the authors

DIMITRIENKO Yuriy Ivanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Professor, Head of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

YURIN Yuriy Viktorovich (Moscow) — Post-Graduate of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).

SHIVERSKIY Evgeniy Aleksandrovich (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Head of the Centre of Safety and Risk Probabilistic Analyses of JSC «NIKIET» (Malaya Krasnoselskaya str., 2/8, 107140, Moscow, Russian Federation, e-mail: e_shiversky@nikiet.ru).