

Расчет и конструирование машин

УДК 539.3

Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления.

Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений*

Ю.И. Димитриенко, Ю.В. Юрин, С.В. Европин

Для оценки надежности уникальных конструкций, таких как корпуса реакторов перспективных ядерных энергетических установок, изготавливаемых малыми партиями, традиционные методы расчета, основанные на статическом анализе отказов, не применимы.

Предложен метод прогнозирования долговечности сложных элементов конструкций высокого давления при длительных циклических нагрузках, основанный на расчете трехмерного напряженно-деформированного состояния конструкции с учетом деформаций ползучести и модели расчета накопления повреждений и долговечности конструкции. Для расчета накопления повреждений использован «химический» критерий длительной прочности, позволяющий проводить расчеты накопления повреждений и долговечности при сложных программных режимах нагружения. Для решения задачи механики конструкций с учетом ползучести разработан итерационный метод решения трехмерной задачи на базе метода конечных элементов. В качестве примера применения разработанного метода проведен численный расчет повреждаемости и долговечности конструкции высокого давления двигательной установки в виде трехслойной сварной конструкции с патрубками. Конструкции такого типа применяют при создании ядерных энергетических установок. В части 2 статьи разработанный метод применен для расчета характеристик надежности конструкций.

Ключевые слова: прогнозирование долговечности, накопление повреждений, ползучесть, численное моделирование, метод конечных элементов, конструкции высокого давления, «химический» критерий длительной прочности.

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (Государственный контракт № 14.516.11.0083).



ДИМИТРИЕНКО
Юрий Иванович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
DIMITRIENKO
Yuriy Ivanovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



ЮРИН
Юрий Викторович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
YURIN
Yuriy Viktorovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



ЕВРОПИН
Сергей Владимирович
ОАО «НИКИЭТ»
EVROPIN
Sergey Vladimirovich
(Moscow, Russian Federation,
JSC NIKIET)

Prediction of durability and reliability of structural elements under high pressure. Part 1. Numerical simulation of damage accumulation

Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Yurin, S.V. Evropin

To assess the reliability of unique structures such as reactor vessels of advanced nuclear power plants produced in small batches, the conventional numerical methods based on the steady-state analysis of failures are not applicable. In this paper, a method for predicting durability of complex structural elements of high pressure under prolonged cyclic loading is proposed. The method implies the calculation of a three-dimensional stress-strain state of a structure taking into account creep deformation, accumulation of damages, and durability. To calculate damage accumulation and durability under complex loading conditions, the so-called «chemical» long-term strength criterion is used. Three-dimensional creep problems of structural mechanics are solved by an iterative method based on the finite element method. This method is applied to the numerical analysis of damageability and durability of a high-pressure propulsion system comprising a three-layer structure with welded pipes. This type of construction is used in nuclear power plants. The developed method will be used in Part 2 of the paper to calculate reliability characteristics of structures.

Keywords: durability prediction, damage accumulation, fatigue, creep, simulation, finite element method, high-pressure vessels, «chemical» long-term strength criterion.

При создании уникальных инженерных конструкций, таких как корпуса реакторов ядерных энергетических установок, двигательных установок, изготавливаемых малыми партиями, или даже в единственном числе, существует проблема обоснования надежности их функционирования и прогнозирования эксплуатационной долговечности. Двигательные установки содержат, как правило, конструкции высокого давления (КВД), и относятся к категории взрыво-пожароопасных объектов, выход из строя которых может принести серьезную

угрозу окружающим объектам, нанести экологический вред и иметь другие катастрофические последствия, поэтому к вопросам оценки их надежности предъявляются повышенные требования. В настоящее время активно развивается, главным образом, за рубежом, теория надежности конструкций, основанная на использовании метода конечных элементов (МКЭ) и компьютерных технологий численного моделирования разрушения конструкций [1–10], применение которой частично, или в определенных случаях полностью, способно заменить проведение дорогостоящих испытаний конструкций на надежность. Однако работы по данному направлению не учитывают эффектов накопления повреждений в конструкциях при длительной эксплуатации, исследованию которых без использования методов МКЭ посвящено значительное количество работ [11–13].

В данной работе предложен метод расчета накопления повреждений в конструкциях высокого давления, основанный на конечно-элементном моделировании трехмерного напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций при длительном циклическом нагружении. Дальнейшее развитие этой теории накопления повреждений при случайных нагрузках позволит разработать методику численного моделирования надежности конструкций, которая будет изложена в части 2 этой статьи.

Математические модели расчета НДС элементов КВД. Рассмотрим характерный элемент КВД, представляющий собой трехслойную тонкостенную сварную конструкцию, два силовых слоя (внешний и внутренний) которой являются тонкостенными оболочками из высокопрочных металлических сплавов, разделенных воздушной прослойкой (условным третьим — промежуточным слоем). Внешний и внутренний слои оболочки соединяются между собой с помощью дискретных узлов креплений. Полагаем, что элемент КВД может иметь входные и выходные части (патрубки), по которым подается или отводится рабочее тело двигательной установки (газ). Патрубки — однослойные тонкостенные оболочки, которые «проходят насквозь» через внешний и внутренний слои основной силовой трехслойной оболочки (рис. 1).

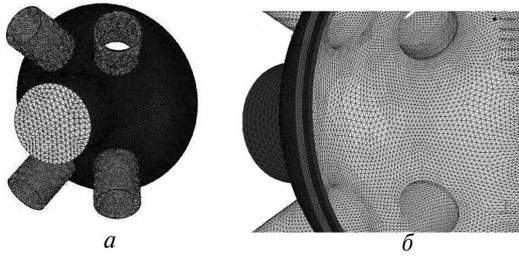


Рис. 1. Геометрическая модель элемента КВД (а) и конечно-элементная сетка, сгенерированная для расчетов НДС (б)

Такие элементы КВД, как правило, представляют собой тонкостенные оболочки с соотношением толщина/радиус порядка 0,01...0,02, что позволяет использовать для расчета их НДС методы теории оболочек [14, 15]. Однако наличие сложных соединительных элементов, таких как узлы крепления внешних и внутренних слоев, зоны стыка силовых слоев и патрубков, требует проведения более детального анализа НДС в рамках трехмерной теории упругости.

Деформации элементов КВД будем считать малыми, а конструкционные материалы оболочки изотропными, нелинейно-упругими, нелинейность которых обусловлена появлением деформаций ползучести при длительной эксплуатации КВД. На внутренней оболочке элемента КВД действуют переменное внутреннее давление. Температурное поле оболочки для упрощения расчетов будем полагать не меняющимся во времени и равномерным по всей оболочке. Тогда для расчета НДС элемента КВД можно сформулировать трехмерную задачу механики деформируемого твердого тела (МДТТ), которая состоит из уравнений механического равновесия (уравнений квазистатики), определяющих соотношений, соотношений Коши, а также граничных и начальных условий. В тензорной форме эта задача имеет следующий вид [16]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T); \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\lambda I_1(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c) - (3\lambda + 2\mu)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{E} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_c); \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c &= \frac{1 - \omega \varepsilon_{ci}}{\eta} \left(\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_s} \right)^r \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E} \right); \\ \boldsymbol{\sigma}|_{\Sigma_\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{S}_e, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_e, \quad t = 0: \boldsymbol{\varepsilon}_c = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ — тензоры полных деформаций и деформаций ползучести; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; \mathbf{u} — вектор перемещений; ∇ — диффе-

ренциальный набла-оператор Гамильтона [17]; \otimes — знак тензорного произведения; \cdot — знак скалярного произведения; \mathbf{E} — метрический (единичный тензор); $I_1(\boldsymbol{\sigma})$ — первый инвариант тензора; σ_{ii} — интенсивность напряжений (второй инвариант); ε_{ci} — интенсивность тензора деформаций ползучести, выражаемые по формулам [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^2 &= \frac{3}{2} \mathbf{P}_T \cdot \mathbf{P}_T; \quad \varepsilon_{ci}^2 = \frac{3}{2} \mathbf{P}_c \cdot \mathbf{P}_c; \\ \mathbf{P}_T &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}; \quad \mathbf{P}_c = \boldsymbol{\varepsilon}_c - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}_c)\mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{P}_T и \mathbf{P}_c — девиаторы тензоров напряжений и деформаций ползучести. Здесь также обозначены: λ , μ — константы Ламе, $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где ν , E — коэффициент Пуассона и модуль упругости; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \alpha_\theta(\theta - \theta_0)$ — тепловая деформация, α_θ — коэффициент теплового расширения, r — константа — показатель нелинейности деформаций ползучести; η — коэффициент вязкости; ω — коэффициент стабилизации ползучести (если $\omega=0$, деформация ползучести не устанавливается и развивается по линейному закону); \mathbf{u}_e — вектор заданных перемещений на части поверхности Σ_u ; \mathbf{S}_e — вектор заданных усилий на части границы конструкции Σ_σ ; \mathbf{n} — вектор нормали.

Линеаризация задачи расчета НДС элементов КВД. Задача (1) вследствие наличия деформаций ползучести является нелинейной, для ее решения перейдем к формулировке в скоростях. Для этого продифференцируем по времени уравнения системы (1), кроме четвертого и седьмого:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= 0; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}} + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}^T); \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \lambda I_1(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c)\mathbf{E} + 2\mu(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c); \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c &= \frac{1 - \omega \varepsilon_{ci}}{\eta} \left(\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_s} \right)^r \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E} \right); \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}|_{\Sigma_\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \dot{\mathbf{S}}_e; \quad \dot{\mathbf{u}}|_{\Sigma_u} = \dot{\mathbf{u}}_e; \quad t = 0: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c = 0, \quad \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения задачи (3) построим итерационный цикл по времени, в котором на каждом m -м шаге итерации сначала решается линейная часть задачи (3):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} &= 0; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\{m\}} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}^{\{m\}} + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}^{\{m\}T}); \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} &= \lambda I_1 (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\{m\}}) \mathbf{E} + 2\mu \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\{m\}}; \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} \Big|_{\Sigma_\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \dot{\mathbf{S}}_e(t^{\{m\}}); \quad \dot{\mathbf{u}}^{\{m\}} \Big|_{\Sigma_u} = \dot{\mathbf{u}}_e(t^{\{m\}}), \end{aligned} \quad (4)$$

а затем рассчитываются скорости деформации ползучести $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}}$ и вычисляется релаксация напряжений за счет деформаций ползучести на m -м шаге:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}} &= \frac{1 - \varpi \varepsilon_{cн}^{\{m\}}}{\eta} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_u^{\{m-1\}}}{\sigma_s} \right)^\gamma \times \\ &\times \left(\boldsymbol{\sigma}^{\{m-1\}} - \frac{1}{3} I_1 (\boldsymbol{\sigma}^{\{m-1\}}) \mathbf{E} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} = -\lambda I_1 (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}}) \mathbf{E} - 2\mu \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}}, \quad (6)$$

и с их помощью вычисляются напряжения и деформации ползучести на m -м шаге:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\{m\}} &= \boldsymbol{\sigma}^{\{m-1\}} + (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}}) \Delta t; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c^{\{m\}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_c^{\{m-1\}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}} \Delta t. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь Δt — шаг по времени, величина которого выбирается из условия, что за Δt изменения деформации ползучести являются существенными.

Расчет НДС элементов КВД при циклическом нагружении. Рассмотрим один из наиболее характерных видов нагружения элементов КВД — циклическое нагружение, при котором вектор внешних усилий \mathbf{S}_e и заданных перемещений \mathbf{u}_e являются периодическими функциями времени: $\mathbf{S}_e(t) = \mathbf{S}_e(t + t_s)$, $\mathbf{u}_e(t) = \mathbf{u}_e(t + t_s)$. Период колебаний t_s полагаем существенно меньшим, чем характерное время изменения деформаций ползучести Δt . Такое допущение вполне реалистично, поскольку для большинства конструкционных материалов эффекты ползучести развиваются достаточно медленно и проявляются на значительных временах эксплуатации конструкции. В тоже время переменные нагрузки, действующие на элементы КВД, и обусловленные, как правило, рабочими частотами тепло-газодинамических процессов, протекающих в двигательной установке, меняются за существенно меньшие времена $t_s \ll \Delta t$.

Наиболее типичным видом нагружения элементов КВД является действие внутреннего давления $\mathbf{S}_e(t, \mathbf{x}) = -p(t)S(\mathbf{x})\mathbf{n}$, где $S(\mathbf{x})$ — функция распределения давления по поверхности КВД, $p(t)$ — периодическая функция времени,

которую в силу периодичности можно представить в виде тригонометрического ряда:

$$p(t) = \bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t). \quad (8)$$

Здесь \bar{p} — стационарная часть давления; p'_j, p''_j — амплитуды колебаний; $\omega_j = j\omega$ — частоты колебаний, кратные ведущей частоте $\omega = \pi / t_s$. Полагаем, что перемещения $\mathbf{u}_e(t)$ являются нулевыми (жесткая заделка конструкции по части поверхности Σ_u). Тогда решение задачи (4) в силу ее линейности при циклическом нагружении будет соответствовать простому (пропорциональному) нагружению циклического вида

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} &= \boldsymbol{\sigma}^0 p(t); \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} = \boldsymbol{\sigma}^0 p(t); \\ \tilde{p}^{\{m\}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j (p''_j \cos \omega_j t - p'_j \sin \omega_j t); \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\{m\}} &= \boldsymbol{\varepsilon}^0 p(t); \quad \tilde{\mathbf{u}}^{\{m\}} = \mathbf{u}^0 p(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0$ и \mathbf{u}^0 — амплитуды колебаний тензоров напряжений, деформаций и перемещений, не зависят от времени, а только от координат. Для их вычисления из (4) получаем следующую линейную задачу с заданным на границе Σ_σ единичным давлением:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 &= 0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u}^0 + \nabla \otimes \mathbf{u}^{0T}); \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= \lambda I_1 (\boldsymbol{\varepsilon}^0) \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^0; \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \Big|_{\Sigma_\sigma} \cdot \mathbf{n} &= -S\mathbf{n}; \quad \mathbf{u}^0 \Big|_{\Sigma_u} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта задача для каждого m -го шага итерации (поэтому номер m в ней опущен).

Общее решение задач (4)–(6) для циклического нагружения можно представить в виде суперпозиции упругого колебательного решения линейной задачи для амплитуд и итерационного решения нелинейной стационарной задачи теории ползучести, в которой колебательными процессами пренебрегается:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^0 (p(t) - \bar{p}) + \boldsymbol{\sigma}^{\{m\}}(t); \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^0 (p(t) - \bar{p}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\{m\}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{\{m\}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^{\{m\}}$ вычисляются по итерационным формулам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{\{m\}} &= \boldsymbol{\sigma}^{\{m-1\}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}} \Delta t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c^{\{m\}} = \boldsymbol{\varepsilon}_c^{\{m-1\}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}} \Delta t, \\ m &= 1, 2, 3, \dots, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\{0\}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0 \bar{p}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c^{\{0\}} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\{m\}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{\{m\}}$ находятся из уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{(m)} = \frac{1 - \varpi \varepsilon_{cн}^{(m)}}{\eta} \left(\frac{\sigma_{и}^{(m-1)}}{\sigma_s} \right)^\gamma \times \left(\boldsymbol{\sigma}^{(m-1)} - \frac{1}{3} I_1(\boldsymbol{\sigma}^{(m-1)}) \mathbf{E} \right); \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} = -\lambda I_1(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{(m)}) \mathbf{E} - 2\mu \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{(m)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, единственной краевой задачей, которую необходимо решать численно в разработанном методе, является линейная задача трехмерной теории упругости (10). Для ее решения применяется хорошо разработанный МКЭ. Основной проблемой, которую приходится преодолевать при использовании МКЭ для расчета элементов КВД — это создание качественных конечно-элементных сеток для тонкостенных оболочечных конструкций.

Моделирование накопления повреждений в конструкционных материалах. При длительном воздействии циклических нагрузок в конструкционных материалах происходит накопление повреждений (микротрещин и иных дефектов структуры). В настоящее время существует большое число различных моделей, описывающих накопление повреждений в материалах. В данной работе рассматривается модель, предложенная в статьях [18–20], основанная на использовании в качестве меры повреждаемости так называемого химического термодинамического потенциала, который применяется также и в теории физико-химических превращений для моделирования критических процессов. Согласно модели [18–20] параметр повреждаемости $z(t)$ состоит из двух частей — обратимых («залечивающихся» с течением времени после снятия нагрузки) и необратимых повреждений

$$z(t) = z_r(t) + z_d(t). \quad (14)$$

Параметр обратимых повреждений $z_r(t)$ согласно модели [20] для изотропных сред имеет вид

$$z_r(t) = B_0 \sigma + B_1 \sigma^2 + B_2 \sigma_{и}^2 + K_0 \int_0^t \frac{\sigma_{и}^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\gamma} - \Gamma_0^2 \left(\int_0^t \frac{\sigma_{и}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta} \right)^2, \quad (15)$$

где $K_0, \Gamma_0, \gamma, \beta$ — набор констант модели повреждаемости; $\sigma = I_1(\boldsymbol{\sigma}), \sigma_T, \sigma_c, \sigma_s$ — пределы

статической прочности при растяжении, сжатии и сдвиге; B_1, B_0, B_2 — константы прочности:

$$B_0 = \frac{\sigma_c^2 - \sigma_T^2}{\sigma_T(\sigma_c^2 + \sigma_T^2)}; \quad B_1 = \frac{2}{\sigma_c^2 + \sigma_T^2} - \frac{1}{3\sigma_s^2};$$

$$B_2 = \frac{1}{3\sigma_s^2}. \quad (16)$$

Для необратимой части повреждений согласно [18, 20] $z_d(t)$ имеет место следующее интегральное выражение:

$$z_d(t) = D_0 \int_0^t \sigma_{и}^2(\tau) d\tau - W_0 \int_0^t \int_0^\tau e^{-\phi(\tau-x)} \sigma_{и}(\tau) \sigma_{и}(x) dx d\tau. \quad (17)$$

Здесь D_0, W_0, ϕ — константы модели.

Согласно «химическому» критерию длительной прочности разрушение в некоторой точке \mathbf{x}^* конструкции в момент времени $t^*(\mathbf{x}^*)$ происходит, если в этот момент достигает значения 1 параметр повреждаемости $z(t)$:

$$z(t^*(\mathbf{x}^*)) = 1. \quad (18)$$

Для хрупких материалов, для которых вследствие первоначального разрушения происходит практически мгновенный рост трещины, приводящий к полному разрушению элемента КВД, время $t^*(\mathbf{x}^*)$ является искомой долговечностью КВД.

Критерий усталостной прочности при циклическом нагружении. При циклическом нагружении вида (11), (8) напряжения без учета деформаций ползучести имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 \left(\bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t) \right);$$

$$\sigma = \sigma^0 \left(\bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t) \right);$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = I_1(\boldsymbol{\sigma}^0); \quad (19)$$

$$\sigma_{и} = \sigma_{и}^0 \left(\bar{p} + \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j \cos \omega_j t + p''_j \sin \omega_j t) \right);$$

$$\sigma_{и}^0 = \sigma_{и}(\boldsymbol{\sigma}^0).$$

Тогда, при условии $\bar{p} > p_a$ (чисто асимметричный цикл колебаний, где $p_a = \sum_{j=0}^{\infty} (p'_j + p''_j)$ — амплитуда колебаний) параметр повреждаемости $z(t)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$z(t) = B_0 \tilde{\sigma}^0 + B_1 \tilde{\sigma}^{02} + \tilde{\sigma}_n^{02} B(t, k); \quad (20)$$

$$B(t, k) = B_2 + B_3(t) f_1(k) - B_4(t) f_2(k);$$

$$B_3(t) = \frac{K_0}{1-\gamma} t^{1-\gamma} + t D_0;$$

$$B_4(t) = \frac{\Gamma_0^2}{(1-\beta)^2} t^{2-2\beta} + t \frac{W_0}{\phi}; \quad (21)$$

$$f_1(k) = (\bar{p}^2 + p_a^2 / 2) / p_m^2 = (3 + 2k + 3k^2) / 8;$$

$$f_2(k) = \bar{p}^2 / p_m^2 = (1+k)^{2/4}. \quad (22)$$

Здесь $\tilde{\sigma}_n^0 = \sigma_n^0 p_m$, $\tilde{\sigma}^0 = \sigma^0 p_m$ — инварианты; $p_m = \bar{p} + p_a$ — максимальное значение нагрузки в одном цикле колебаний; $k = (\bar{p} - p_a) / p_m$ — коэффициент асимметрии цикла.

Алгоритм численного моделирования накопления повреждений. В соответствии с разработанной методикой составлен алгоритм численного моделирования накопления повреждений элементов КВД, состоящий из следующих этапов:

- 1) определение усталостных характеристик конструкционных материалов: $K_0, \Gamma_0, \gamma, \beta, D_0, W_0, \phi$, входящих в выражение параметра повреждаемости (20), путем обработки экспериментальных кривых усталости;
- 2) задание стационарной нагрузки \bar{p} и коэффициента асимметрии k нагружения элемента КВД;
- 3) построение компьютерной 3D модели элемента КВД, построение конечно-элементных сеток для проведения расчетов НДС элементов КВД;
- 4) решение линейной задачи (10) расчета НДС элементов КВД, результатом которого является расчет поля тензора напряжений $\tilde{\sigma}^0$;
- 5) расчет напряжений и деформаций ползучести $\sigma^{(m)}$ и $\epsilon^{(m)}$ по формулам (11)–(13);
- 6) расчет значений $B_0, B_1, B_2, B(t), \sigma^0, \sigma_n^0$, входящих в выражения (20) и (21) для определения значений параметра повреждаемости $z(t)$ по эти формулам.

Определение усталостных характеристик материалов. Определение этих характеристик осуществляется с помощью кривых усталостной долговечности (кривых Веллера) при одноосном постоянном циклическом растяжении в режимах без «отдыха» и с «отдыхом» материала. При одноосном НДС инварианты σ^0, σ_n^0 совпа-

дают с компонентой σ_{11} тензора напряжений: $\sigma^0 = \sigma_n^0 = \sigma_{11}$, а уравнение (20) вместе с условием (18) для режима «без отдыха» принимает вид

$$B_0 \tilde{\sigma}_{11}^0 + \tilde{\sigma}_{11}^{02} (B_1 + B(t^*, k)) = 1. \quad (23)$$

Для режима «с отдыхом», представляющего собой цикл предварительного циклического нагружения, затем период «отдыха» и монотонное нагружение до разрушения, уравнения (20) и (18) принимают следующий вид:

$$B_0 \sigma_{11} + B_1 \sigma_{11}^2 = 1 - \tilde{\sigma}_{11}^{02} \tilde{B}(t^*, k), \quad (24)$$

где $\tilde{\sigma}_{11}^0 = \sigma_{11}^0 p_m$ — максимальное напряжение в цикле колебаний; $\tilde{B}(t, k) = \tilde{B}_3(t) f_1(k) - \tilde{B}_4(t) f_2(k)$, $\tilde{B}_3(t) = t D_0$, $\tilde{B}_4(t) = t \frac{W_0}{\phi}$. Значения

усталостных характеристик определяются из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных кривых усталостной прочности в режиме без «отдыха» $\tilde{\sigma}_{11(e)}^0(t^*, k)$ и с «отдыхом» $\sigma_{11(e)}(t^*, k)$ с соответствующими расчетными кривыми, получаемыми как решение уравнений (23) и (24) относительно $\tilde{\sigma}_{11}^0(t^*, k)$ и $\sigma_{11}(t^*, k)$.

В качестве основного конструкционного материала элементов КВД, принятого в расчетах, был выбран молибденовый жаропрочный сплав. На рисунке 2 показаны кривые $\tilde{\sigma}_{11}^0(t^*, k)$ длительной ($k = 1$) и усталостной ($k = 0,1$) прочности жаростойкого молибденового сплава при одноосном растяжении и нормальной температуре, полученные на основе обработки имеющихся справочных данных и путем расчета с помощью «химического» критерия длительной прочности по уравнению (23). Характерной особенностью конструкционных материалов является сильная зависимость долговечности от коэффициента асимметрии цикла нагружения: при значении $k = 0,1$ (асимметричный цикл) значение долговечности при одних и тех же значениях амплитуды колебаний уменьшается по сравнению со статической длительной прочностью на несколько порядков.

Результаты определения других констант жаростойкого молибденового сплава представлены в таблице. В ней же приведены математиче-

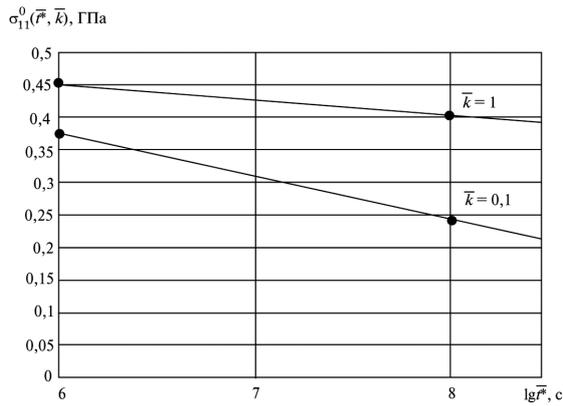


Рис. 2. Кривые $\sigma_{11}^0(t^*, k)$ длительной (при $k = 1$) и усталостной ($k = 0,1$) прочности жаростойкого молибденового сплава при нормальной температуре:

- — экспериментальные значения (среднее значение по 5 испытаниям), — — расчет по «химическому» критерию (уравнение (23))

ские ожидания значений параметров материала и среднеквадратические отклонения, принятые в расчетах.

Исходные данные для проведения численного моделирования. При проведении численного моделирования были выбраны следующие значения геометрических параметров элементов КВД: относительная толщина стенки внешней оболочки — 0,02; внутренней оболочки — 0,01; внутреннее давление газов на оболочку $\bar{p}=3,3$ МПа; давление газа между внутренней и внешней оболочками $\bar{p}=3,0$ МПа; средний коэффициент асимметрии цикла пульсирующего по случайному закону давления $\bar{k}=0,1$; температура внутренней теплонагруженной оболочки в течение всего времени длительного нагружения полагалась равной 1 000 °С.

Значения характеристик материала КВД на основе жаростойкого молибденового сплава

Номер характеристики i	Характеристика материала c_i	Размерность величины c_i	Математическое ожидание $M(c_i)$	Относительное среднеквадратическое отклонение $\sqrt{D(c_i)} / M(c_i), \%$
1	E	ГПа	170	10
2	ν	1	0,3	0
3	σ_T	ГПа	0,49	20
4	σ_C	ГПа	0,675	0
5	σ_S	ГПа	0,18	0
6	α	1	0,839	0

7	β	1	0,683	0
8	K_0	$\text{ГПа}^{-2} \cdot \text{с}^{1-\alpha}$	$4,731 \cdot 10^{-2}$	10
9	Γ_0	$\text{ГПа}^{-2} \cdot \text{с}^{2-2\beta}$	$5,789 \cdot 10^{-2}$	10

Расчеты НДС и накопления повреждений в элементах КВД. В рамках пакета SolidWorks была разработана твердотельная 3D модель элемента КВД. Генерация конечно-элементных сеток для моделирования НДС в конструкциях КВД осуществлялась с использованием свободно-распространяемого генератора NetGen. На рисунке 1 показаны конечно-элементные расчетные сетки, визуализация которых осуществлялась в специализированном графическом редакторе MeshViewer4.0, разработанном в научно-образовательном центре «СИМПЛЕКС» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Для решения задачи теории ползучести (10)–(13) был доработан конечно-элементный решатель НОЦ «СИМПЛЕКС».

Были проведены серии расчетов НДС элементов КВД в соответствии с разработанным алгоритмом. Некоторые результаты расчетов напряжений в элементах КВД в виде распределений 1-го и 2-го инвариантов σ_{ii} тензора напряжений по поверхности конструкции в один фиксированный момент времени $t = 10^3$ с показаны на рис. 3.

Максимальные значения 1-го инварианта напряжений σ^0 достигаются на внутренней поверхности внешней силовой оболочки (рис. 3, б), а максимальные значения инварианта σ_{ii}^0 — в зонах стыков внешней силовой оболочки с патрубками (рис. 3, а).

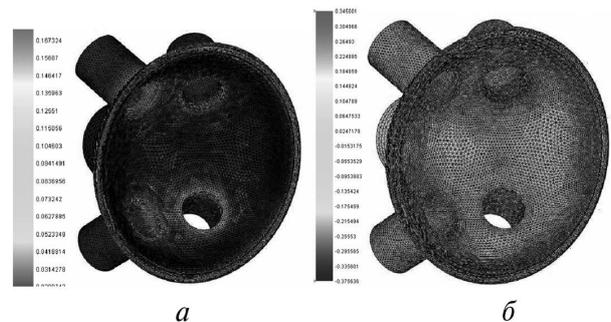


Рис. 3. Распределение 2-го инварианта σ_{ii}^0 (а) и 1-го инварианта напряжений σ^0 (б), ГПа, в элементах КВД

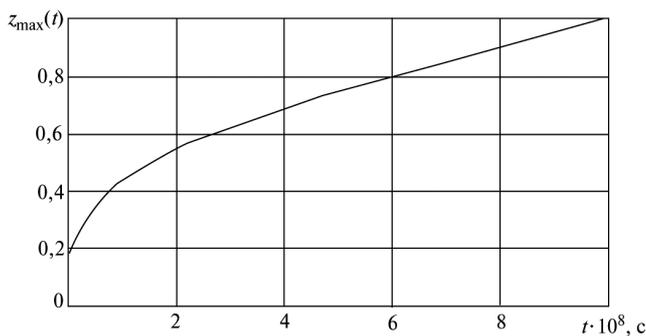


Рис. 4. Накопление повреждений в элементе КВД

В соответствии с разработанной методикой рассчитаны значения параметра повреждаемости $z(t)$ по уравнению (20) для всех точек x конструкции, в результате была вычислена функция $z(x, t)$, где $x \in V$, а V — область конструкции. Максимальные значения функции $z_{\max}(t) = \max_{x \in V} \{z(x, t)\}$ конструкции показаны на рис. 4. Максимальные значения параметра повреждаемости достигаются в зоне стыков патрубков с внешней силовой оболочкой. За время 10^9 с циклического нагружения происходило накопление повреждений от значения параметра $z_{\max} = 0,2$ до значения $z_{\max}(t^*) = 1$, соответствующего критическому уровню, при котором происходит усталостное разрушение конструкции. Долговечность t^* конструкции зависит от значений всех параметров, участвующих в модели: усталостных характеристик материала, коэффициента асимметрии цикла k , максимального напряжения цикла, а также от геометрических особенностей формы элемента КВД. Следует отметить, что поскольку все перечисленные величины на практике являются случайными, то долговечность также есть случайная величина. Моделированию долговечности конструкций КВД с учетом случайных факторов посвящена часть 2 данной статьи.

Выводы

1. Предложен метод расчета накопления повреждений и прогнозирования долговечности элементов конструкций высокого давления, основанный на конечно-элементном моделировании НДС конструкций при циклическом

нагружении с учетом деформаций ползучести, а также с использованием «химического» критерия длительной прочности.

2. Пример численного расчета долговечности сложных составных конструкций высокого давления, выполненный в работе, показал возможность практической реализации предложенной методики.

Литература

- [1] Beck A.T., Edison da Rosa. Structural reliability analysis using deterministic finite element Programs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2006, no. 3, pp. 197—222.
- [2] Anantha Ramu S., Ganesan R. Stability analysis of a stochastic column subjected to stochastically distributed loadings using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1992, no. 11, pp. 105—115.
- [3] Adhikari S., Manohar C.S. Dynamic analysis of framed structures with statistical uncertainties. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, pp. 1157—1178.
- [4] Wang D., Chowdhury M.R., Haldar A. System reliability evaluation considering strength and serviceability requirements. *Computers and Structures*, 1997, vol. 62, no. 5, pp. 883—896.
- [5] Takada T. Weighted integral method in multidimensional stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, vol. 5, no. 4, pp. 158—166.
- [6] Spanos P.D., Ghanem R. Stochastic finite element expansion for random media. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, vol. 115, no. 5, pp. 1035—1053.
- [7] Mahadevan S., Dey A. Adaptive Monte Carlo simulation for time-variant reliability analysis of brittle structures. *AIAA Journal*, 1997, vol. 35, no. 2, pp. 321—326.
- [8] Liu W.K., Bestereld G.H., Belytschko T. Variational approach to probabilistic finite elements. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 1988, vol. 114, no. 12, pp. 2115—2133.
- [9] Der Kiureghian A., Ke J.B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, vol. 3, no. 2, pp. 83—91.
- [10] Chang T.P. Dynamic finite element analysis of a beam on random foundation. *Computers and Structures*, 1993, vol. 48, no. 4, pp. 583—589.
- [11] Болотин В.В. *Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений*. Москва, Стройиздат, 1971, 256 с.
- [12] Ильюшин А.А., Победра Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 256 с.
- [13] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Длительная прочность армированных пластиков. *Механика композитных материалов*, 1989, № 1, с. 16—22.
- [14] Димитриенко Ю.И. *Механика композиционных материалов при высоких температурах*. Москва, Машиностроение, 1997, 366 с.
- [15] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86—100.
- [16] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 610 с.
- [17] Димитриенко Ю.И. *Тензорный анализ*. В 3 т. Т. 1: Механика сплошной среды. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [18] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Прогнозирование долговечности полимерных элементов конструкций с помощью «химического» критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники*, 2002, № 1/2, с. 15—21.
- [19] Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.П. Расчет сопротивления усталости композитов на основе «химического» критерия длительной прочности. *Вопросы оборонной техники*, 2002, № 1/2, с. 21—25.

[20] Димитриенко Ю.И., Дубровина А.Ю., Соколов А.П. Конеч-но-элементное моделирование усталостных характеристик композици-онных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. вып. Математическое моделирование*, 2011, с. 34–49.

References

- [1] Beck A.T., Edison da Rosa. Structural reliability analysis using deterministic finite element Programs. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2006, no. 3, pp. 197–222.
- [2] Anantha Ramu S., Ganesan R. Stability analysis of a stochastic column subjected to stochastically distributed loadings using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1992, no. 11, pp. 105–115.
- [3] Adhikari S., Manohar C.S. Dynamic analysis of framed structures with statistical uncertainties. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 44, pp. 1157–1178.
- [4] Wang D., Chowdhury M.R., Haldar A. System reliability evaluation considering strength and serviceability requirements. *International Journal of Computers and Structures*, 1997, vol. 62, no. 5, pp. 883–896.
- [5] Takada T. Weighted integral method in multidimensional stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1990, vol. 5, no. 4, pp. 158–166.
- [6] Spanos P.D., Ghanem R. Stochastic finite element expansion for random media. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, vol. 115, no. 5, pp. 1035–1053.
- [7] Mahadevan S., Dey A. Adaptive Monte Carlo simulation for time-variant reliability analysis of brittle structures. *AIAA Journal*, 1997, vol. 35, no. 2, pp. 321–326.
- [8] Liu W.K., Bestereld G.H., Belytschko T. Variational approach to probabilistic finite elements. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 1988, vol. 114, no. 12, pp. 2115–2133.
- [9] Der Kiureghian A., Ke J.B. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, vol. 3, no. 2, pp. 83–91.
- [10] Chang T.P. Dynamic finite element analysis of a beam on random foundation. *Computers & Structures*, 1993, vol. 48, no. 4, pp. 583–589.
- [11] Bolotin V.V. *Primenenie metodov teorii veroiatnostei i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzhenii* [Application of the theory of probability and reliability theory in the calculation of structures]. Moscow, Stroizdat publ., 1971. 256 p.

[12] Il'iushin A.A., Pobedria B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviskouprugosti* [Fundamentals of mathematical theory thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka publ., 1970. 256 p.

[13] Dimitrienko Iu.I., Dimitrienko I.P. Dlitel'naia prochnost' armirovannykh plastikov [Long-term strength of reinforced plastics]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Composite mechanics and Design], 1989, no. 1, pp. 16–22.

[14] Dimitrienko Iu.I. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1997. 366 p.

[15] Dimitrienko Iu.I. Asimptoticheskaia teoriia mnogosloinykh tonkikh plastin [Asymptotic Theory of Multilayer Thin Plates]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural sciences], 2012, no. 3, pp. 86–100.

[16] Dimitrienko Iu.I. *Nelineinai mekhanika sploshnoi sredy* [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 610 p.

[17] Dimitrienko Iu.I. *Tenzorni analiz. V 3 t. T. 1: Mekhanika sploshnoi sredy* [Tensor analysis. In 3 vol. 1: Continuum Mechanics]. Moscow, Bauman Press, 2011. 463 p.

[18] Dimitrienko Iu.I., Dimitrienko I.P. Prognozirovaniye dolgovechnosti polimernykh elementov konstruksii s pomoshch'iu «khimicheskogo» kriteriia dlitel'noi prochnosti [Predicting durability of polymeric structural elements with the help of «chemical» criterion of long-term strength]. *Voprosy oboronoii tekhniki* [Questions of defense equipment], 2002, no. 1/2, pp. 15–21.

[19] Dimitrienko Iu.I., Dimitrienko I.P. Raschet soprotivleniia ustalosti kompozitov na osnove «khimicheskogo» kriteriia dlitel'noi prochnosti [The calculation of the fatigue resistance of the composites based on «chemical» long-term strength criterion]. *Voprosy oboronoii tekhniki* [Questions of defense equipment], 2002, no. 1/2, pp. 21–25.

[20] Dimitrienko Iu.I., Dubrovina A.Iu., Sokolov A.P. Konechno-elementnoe modelirovaniye ustalostnykh kharakteristik kompozitsionnykh materialov [Finite element modeling of fatigue properties of composite materials]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural sciences]. Spets. vyp. Matematicheskoe modelirovaniye [Special issue Mathematical Modeling], 2011, pp. 34–49.

Статья поступила в редакцию 03.07.2013

Информация об авторах

ДИМИТРИЕНКО Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

ЮРИН Юрий Викторович (Москва) — аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

ЕВРОПИН Сергей Владимирович (Москва) — кандидат технических наук, директор отделения целостности конструкций ОАО «НИКИЭТ» (107140, Москва, Российская Федерация, Малая Красносельская ул., д.2/8, e-mail: evropin@nikiet.ru).

Information about the authors

DIMITRIENKO Yuriy Ivanovich (Moscow) — Dr. Sci. (Phys. Math.), Professor, Head of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

YURIN Yuriy Viktorovich (Moscow) — Post-Graduate of «Computational Mathematics and Mathematical Physics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: dimit.bmstu@gmail.com).

EVROPIN Sergey Vladimirovich (Moscow) — Cand. Sci. (Eng.), Director of Structural Integrity Branch of JSC «NIKIET» (Malaya Krasnosel'skaya str., 2/8, 410017, Moscow, Russian Federation, e-mail: evropin@nikiet.ru).