

УДК 539.3

Механика деформирования цилиндрической оболочки радиальными силами

Ю.И. Виноградов

Актуальность исследования механики деформирования цилиндрической оболочки определяется широким ее использованием в машиностроении, а также тем, что локальное воздействие на нее избежать не удастся во многих тонкостенных конструкциях. При проектировании тонкостенных конструкций локальное воздействие на оболочку в расчетах часто идеализируется воздействием сосредоточенной силы. Это объясняется простотой построения алгоритма счета на ЭВМ: не нужно решать дифференциальные уравнения с правой частью, которая появляется при поверхностной нагрузке. Однако идеализация поверхностной нагрузки сосредоточенной требует оценки погрешности при расчете величин, определяющих прочность оболочки, которые при сосредоточенном воздействии имеют свои особенности. Теоретически с выделением особенности и построением асимптотических формул для искомых величин задачи решались многими авторами, но ими не определены даже приближенные оценки погрешностей, которые появляются неизбежно. В статье впервые оценена такая погрешность. Даны формулы априорных оценок погрешностей при расчетах на ЭВМ и экспериментальные результаты, полученные аналитически, которые подтверждаются с определенной погрешностью. Получены количественные оценки возможности использования идеализации локального воздействия сосредоточенной силой. Результаты исследования будут полезны при проектировании летательных аппаратов.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, локальная нагрузка, теория, эксперимент, погрешности решения задач.

Mechanics of deformation of a cylindrical shell by radial forces

Y.I. Vinogradov

The study of mechanics of deformation of a cylindrical shell is important because such shells are widely used in mechanical engineering and many of them are subject to local loadings. When designing thin-walled structures, the local loading on a shell is often approximated by a concentrated force. This can be explained by the desire to simplify the computer algorithm: there is no need to solve differential equations with the right-hand side that appears due to surface loads. However, the representation of a surface load by a concentrated force introduces errors in the strength characteristics of a shell computed. Theoretically, the problem of deformation of a shell under concentrated loads can be solved by removing a singular point and using asymptotic formulas for the unknown functions. Many researchers solved this problem, but even approximate estimates of such errors have not been found yet. This article is the first to



ВИНОГРАДОВ
Юрий Иванович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

VINOGRADOV
Yuriy Ivanovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

evaluate these errors. Formulas are given for a priori estimates of errors in computer calculations. The results of research will be useful when designing aircrafts.

Keywords: cylindrical shell, local load, theory, experiment, error of solution.

Аналитическое решение задачи деформирования цилиндрической оболочки радиальными силами и сравнение с результатами, полученными по асимптотическим формулам, показало расхождение в значениях искомых величин на порядок.

При аналитическом решении такой задачи необходимо доказательство достоверности результатов, которые определяются в окрестности точки воздействия сил на оболочку, так как известно, что ряды Фурье разделения переменных дифференциальных уравнений в точке воздействия не сходятся.

Использование численных методов конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ) для решения задач с контролируемой погрешностью в результатах невозможно, так как при этом нет методов контроля погрешностей при решении дифференциальных уравнений.

Проблему можно преодолеть путем сравнения аналитического и экспериментального исследования на примере деформирования цилиндрической оболочки радиальными силами.

Постановка задачи. Предположим, что мы хотим найти точное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому нас интересует погрешность, с которой наше численное решение аппроксимирует искомое решение системы дифференциальных уравнений. Эта погрешность состоит из нескольких частей: погрешность, которую вносит приближенный метод решения дифференциальных уравнений; погрешность, которая появляется даже тогда, когда можно провести счет с точными числами; погрешность вследствие того, что вычислительная машина оперирует с приближенными числами.

Проблема оценки погрешности решения краевых задач, когда можно провести счет с точными числами, снимается на этапе определения решения обыкновенных дифференци-

альных уравнений, если они вычисляются по формулам в виде сходящихся рядов, т. е. аналитически. Эта проблема устраняется путем решения дифференциальных уравнений в виде значений функций Коши–Крылова по формулам, представленным в работе [1]. Контроль погрешностей априори осуществляется сравнением частичных сумм матричных рядов.

Априорная оценка погрешностей при решении краевых задач требует учитывать, что вычислительная машина оперирует с приближенными значениями величин. Иначе необходима оценка погрешности как следствие ошибок округления при счете на ЭВМ.

Подавляющее число машинных операций при решении краевых задач методом сопряжения интервалов [2] состоит в решении системы матричных алгебраических уравнений. Обычно такие системы алгебраических уравнений решаются методом Гаусса на ЭВМ. В таком случае известно [3], что априори можно оценить число неверных значащих цифр N , как следствие ошибок округления. Для десятичной системы счисления

$$N = \lg m,$$

для двоичной системы счисления

$$N = \log_2 m,$$

где m — порядок системы алгебраических уравнений.

Оценка числа неверных значащих цифр по формулам является верхней. Она соответствует самому неблагоприятному случаю округлений результата на каждой операции. Если же ожидать статистического накопления ошибок, то в формулах следует вместо m иметь в виду \sqrt{m} . Необходимо также учитывать еще и то, что в методе Гаусса матрица коэффициентов системы алгебраических уравнений квазидиагональная (малозаполненная), что дополнительно снижает погрешность в результатах решения краевых задач, обусловленную ошибками округления при счете на ЭВМ.

Нерешенным остается вопрос о погрешности, обусловленной использованием метода Фурье разделения переменных, т. е. необходи-

ма оценка погрешности, связанная с ухудшением сходимости тригонометрических рядов при определении решения в малой окрестности у точки воздействия силы на оболочку.

Сходимость рядов Фурье. При действии на цилиндрическую оболочку радиальной силы P асимптотические формулы имеют логарифмическую особенность в точке приложения силы [4]:

$$y = a \ln \rho, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \varphi^2},$$

где y — искомая величина задачи; a — параметр нагрузки; ξ и φ — продольная и окружная координаты.

Допустим, что $\xi = 0$, тогда

$$y = a \ln \varphi. \quad (1)$$

Известно, что

$$\ln \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n};$$

$$\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \ln \varphi - R.$$

Здесь $R = \frac{\varphi^2}{6} + \frac{\varphi^4}{100} + \frac{\varphi^6}{2835} + \dots + \frac{2^{2n-1} B_n}{n(2n)!} \varphi^{2n} + \dots;$

B_n — числа Бернулли.

Можарируя ряд остаточного члена R , получаем

$$R \leq \sec \frac{\varphi}{2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^2 + \frac{5}{24} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^4 + \frac{61}{120} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^6 + \dots + \frac{E_n}{(2n)!} \varphi^{2n} + \dots,$$

где E_n — числа Эйлера.

Вычислив, при $\varphi = 0,0873$ ($\varphi = 5^\circ$) получим $\sec \frac{\varphi}{2} - 1 \approx 0,001$ и $R \leq 0,001$. Если $\varphi \leq 0,0873$, то $|\ln|0,0873|| \geq 2$. Следовательно,

$$\ln \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad (2)$$

с погрешностью, не превышающей 0,05%.

На рисунке 1 приведена логарифмическая функция (1) и та же функция, определенная с помощью тригонометрического ряда (2), в котором удержано $n = 100$ членов.

Следует иметь в виду, что асимптотические формулы являются частью общего решения для искомых величин в виде тригонометрических рядов. Отброшенная часть общего решения — тригонометрические ряды, которые схо-

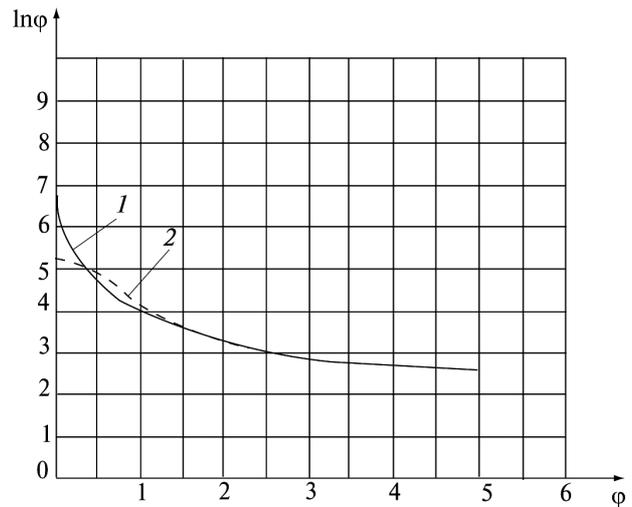


Рис. 1. Логарифмическая функция (1) и функция, определенная тригонометрическим рядом (2)

дятся как $\frac{\cos n\varphi}{n^5}$, т. е. очень быстро [5]. Таким

образом, очевидно, что тригонометрические ряды решений сходятся быстро в малой окрестности у точки нагружения оболочки силой P .

Численные эксперименты и решения многих задач [6–13] при нагружении оболочек сосредоточено показали, что погрешность определения искомых величин не превышает 3% за исключением малой окрестности у точек нагружения, когда в тригонометрических рядах удерживается $n = 100$ членов. Радиус окрестности, в которой погрешность не удается контролировать, не превышает трех толщин оболочек.

Эксперимент. Цель эксперимента: определить деформации оболочки в окрестности приложения сосредоточенных сил; вычислить значения изгибающих моментов в оболочке и сравнить их с результатами решения этой же задачи методом сопряжения интервалов, аналитически. Сравнение результатов должно было подтвердить достоверность решения краевой задачи на ЭВМ.

В эксперименте использовали оболочку из материала АМГ-6 с модулем упругости $E = 65,7$ ГПа, который определяли с помощью образцов-свидетелей при производстве оболочки. Размеры оболочки: $l = 200$ мм, $R = 55,75$ мм, $h = 1,5$ мм. Ее безразмерные параметры $\frac{l}{R} = 3,6$ и $\frac{R}{h} = 37,2$.

Оболочку нагружали сосредоточенными радиальными силами в диаметрально противоположных точках, расположенных на середине длины образующей, где $\varphi=0$. Элементы, передающие усилия на оболочку, имели форму усеченного конуса с диаметром окружности для контакта с оболочкой 1,5 мм. Один из соосных элементов нагружения оболочки находился в неподвижном состоянии, а другой соосным перемещением нагружал оболочку. Нагрузка передавалась через динамометр, который определял силу P радиального воздействия.

Прогиб измеряли с точностью 0,01 мм вдоль нулевой образующей $\varphi=0$ по внутренней поверхности оболочки с помощью индикаторной головки, перемещающейся вдоль оси. Для каждой точки вдоль образующей прогиб w рассчитывали по формуле

$$w = w_2 - \frac{w_2}{2},$$

где w_2 — показания перемещения чувствительного элемента индикаторной головки (рис. 2).

Деформации определяли малогазовыми 1-мм тензодатчиками сопротивлением 50 Ом. Для наклейки тензодатчиков на поверхность оболочки использовали синтетический клей. На схеме, изображенной на рис. 3, расположение этих датчиков отмечено цифрами 1, 1', 2, 2', 3, 3', 5, 5', 6, 6'. Остальные, показанные на схеме, тензодатчики имели базу 5 мм и сопротивление 100 Ом. Для регистрации сигналов с тензодатчиков использовали тензометрический мост с дистанционным переключателем. Показания

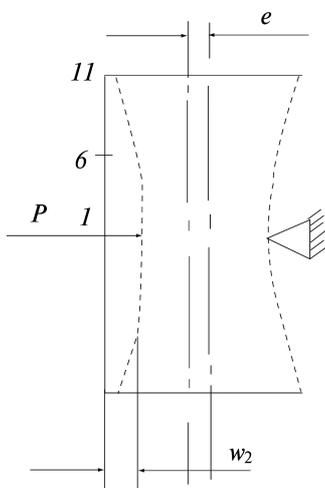


Рис. 2. Схема эксперимента

тензодатчиков регистрировали при нагружении оболочки силами 0; 284,4 Н; 549,2 Н; 814 Н и 1075,7 Н.

Приближенные значения деформаций ϵ оболочки находили вычитанием показаний тензодатчиков для ненагруженной оболочки из тех, которые регистрировались при действии сил P .

Деформацию в каждой точке вычисляли с учетом коэффициентов тензочувствительности моста, тензочувствительности датчиков соответственно с базой 1 и 5 мм.

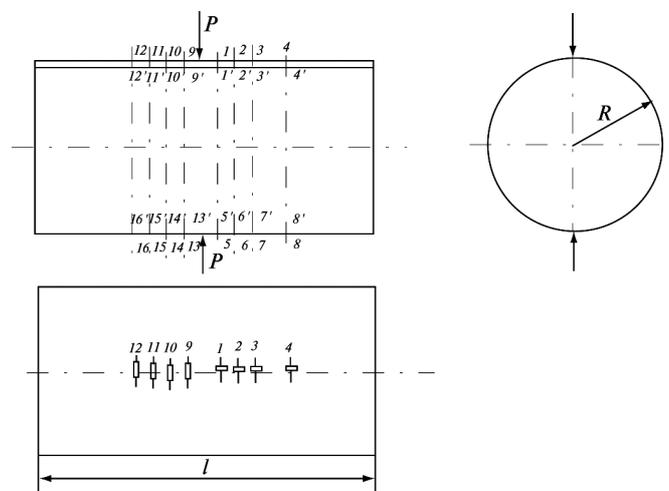


Рис. 3. Схема расположения тензодатчиков

Значения продольного M_1 и окружного M_2 изгибающих моментов рассчитывали по формулам

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2); M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1),$$

где $\chi_1 = \frac{\xi_b + \xi_n}{h}$; $\chi_2 = \frac{\xi'_b + \xi'_n}{h}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

$E = 65,7$ ГПа; $h = 1,5$ мм; $\nu = 0,3$. Здесь ξ_b и ξ_n — относительные деформации, полученные для точки с помощью тензодатчиков, наклеенных соответственно на внутренней и наружной поверхности оболочки вдоль ее образующей $\varphi=0$. Штрихи обозначают, что деформации оболочки определены в направлении окружной координаты.

Значения величин безразмерных изгибающих моментов $\overline{M}_i = \frac{\pi M_i}{2P_z}$ ($i = 1, 2$), полученных

при деформировании оболочки силами $P_z = 284,4 \text{ Н}, 549,2 \text{ Н}, 814,0 \text{ Н}, 1078,7 \text{ Н}$ при использовании для их вычислений показаний различных тензодатчиков, оказались отличными от случайных ошибок.

Алгоритм оценки надежности:

1) определим среднее значение величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где n — число величин x_i , полученных экспериментально;

2) вычислим среднее квадратичное отклонение

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2};$$

3) так как средняя квадратичная ошибка не известна, используем эмпирический стандарт

$$S = S^* \sqrt{\frac{n}{n-1}};$$

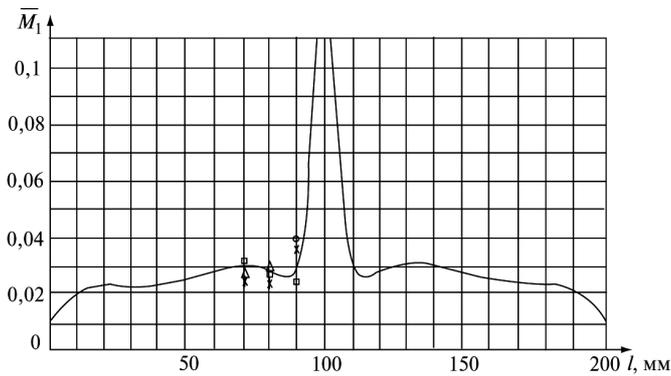


Рис. 4. Изменение продольного изгибающего момента M_1 вдоль образующей оболочки, $\varphi = 0$:

— расчет; Δ , *, \square — эксперимент

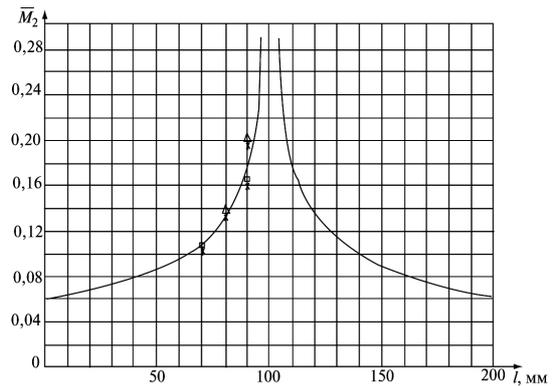


Рис. 5. Изменение окружного изгибающего момента M_2 вдоль образующей оболочки, $\varphi = 0$:

— расчет; Δ , *, \square — эксперимент

4) при неизвестной точности измерений применим правило трех сигм для доверительной оценки

$$|a - \bar{x}| \leq \frac{3S}{\sqrt{n}}.$$

Надежность P этой оценки зависит от количества измерений [14].

Доверительный интервал значений M_1, M_2 , определенный экспериментально, и значения M_1 и M_2 , полученные в результате решения задачи методом сопряжения интервалов, т. е. аналитически, приведены в таблице.

Таким образом, расхождение теоретических и экспериментальных результатов не превышает 15%.

Для наглядности на рис. 4 и рис. 5 представлены изменения продольного M_1 и окружного M_2 изгибающих моментов соответственно вдоль образующей при $\varphi = 0$. Таким образом, достоверность аналитических расчетов подтверждается.

Таблица

Изгибающие моменты	Расстояние до тензодатчика, мм		
	10	20	30
Эксперимент $M_1 \frac{\pi}{2P_z}$	$0,0346 < a < 0,0368$ $P=0,996$	$0,0238 < a < 0,0251$ $P=0,997$	$0,0251 < a < 0,0255$ $P=0,997$
Вычисление $M_1 \frac{\pi}{2P_z}$	0,0320	0,0270	0,0271
Эксперимент $M_2 \frac{\pi}{2P_z}$	$0,170 < a < 0,177$ $P=0,996$	$0,114 < a < 0,118$ $P=0,997$	$0,105 < a < 0,106$ $P=0,997$
Вычисление $M_2 \frac{\pi}{2P_z}$	0,175	0,126	0,105

Вывод

Аналитический метод решения краевых задач о сосредоточенном воздействии на цилиндрические оболочки позволяет получать достоверные результаты с погрешностью, не более 3% на расстоянии от точки сосредоточенного воздействия, не превышающего трех толщин оболочки.

Литература

- [1] Виноградов Ю.И. Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. *Докл. РАН*, 2006, т. 409, № 1, с. 15—18.
- [2] Виноградов Ю.И. Методы вычислений и построение алгоритмов решения краевых задач строительной механики. *ДАН СССР*, 1988, т. 298, № 2, с. 308—313.
- [3] Филин А.П. *Матрицы в статике стержневых систем*. Москва, Ленинград, Изд-во литературы по строительству, 1966, 438 с.
- [4] Даревский В.М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках. В сб. *Прочность и динамика авиационных двигателей*. Москва, Машиностроение, 1964, вып. 1, с. 23—83.
- [5] Новожилов В.В., Черных К.Ф. К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия. В сб.: *Исследования по упругости и пластичности*. Ленинград, ЛГУ, 1963, № 2, с. 48—58.
- [6] Демьянович Ю.С. К вопросу об изгибе цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. В сб.: *Исследования по упругости и пластичности*. Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1963, вып. 2, с. 121—131.
- [7] Работнов Ю.Н. Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. *Докл. АН СССР*, 1946, т. 52, № 4, с. 299—301.
- [8] Juan S.W. Thin cylindrical shells subjected to concentrated loads. *Quart. Appl. Math.*, 1946, vol. 4, no. 1, pp. 13—26.
- [9] Beskin L. Local stress distribution in Cylindrical shells. *J. Appl. Mech.*, 1946, vol. 13, no. 2, p. 137—146.
- [10] Ting L., Yuan S.W. On radial deflection of a cylinder of finite length with various end conditions. *J. Aeronaut. Sci.*, 1958, vol. 25, no. 4, pp. 230—234.
- [11] Чернышев Г.Н. О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую оболочку произвольного очертания. *ПММ*, 1963, т. 27, вып. 1, с. 26—34.
- [12] Lee S.W., Dai C.C., Yeom C.H. A triangular finite element for thin plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1985, vol. 21, no. 10, pp. 1813—1831.
- [13] Лукасевич С. *Локальные нагрузки в пластинах и оболочках*. Москва, Мир, 1982, 542 с.
- [14] Румшинский Л.З. *Математическая обработка результатов эксперимента*. Москва, Наука, 1971, 192 с.

References

- [1] Vinogradov Yu.I. Metod resheniia lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [The method of solution of linear

ordinary differential equations]. *Doklady RAN* [Reports of RAS]. 2006, vol. 409, no. 1, pp. 15—18.

[2] Vinogradov Yu.I. Metody vychislenii i postroenie algoritmov resheniia kraevykh zadach stroitel'noi mekhaniki [Calculation methods and the construction of algorithms for solving boundary value problems in structural mechanics]. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences]. 1988, vol. 298, no. 2, pp. 308—313.

[3] Filin A.P. *Matritsy v statike stержnevyykh system* [Matrix in static rod systems]. Moscow, Leningrad, Literatura po stroitel'stvu publ., 1966. 438 p.

[4] Darevskii V.M. Opredelenie peremeshchenii i napriazhenii v tsilindricheskoi obolochke pri lokal'nykh nagruzkakh [Determination of displacements and stresses in a cylindrical shell under local loads]. *Sbornik Prochnost' i dinamika aviatsionnykh dvigatelei* [Collection of strength and dynamics of aircraft engines]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1964, issue 1, pp. 23—83.

[5] Novozhilov V.V., Chernykh K.F. K raschetu obolochek na sosredotochennye vozdeistviia [Calculation of shells on a concentrated impact]. *Sbornik Issledovaniia po uprugosti i plastichnosti* [Study on the collection of elasticity and plasticity]. Leningrad, LGU publ., 1963, issue 2, pp. 48—58.

[6] Dem'ianovich Yu.S. K voprosu ob izgibe tsilindricheskoi obolochki sosredotochennoi siloi [On the question of bending cylindrical shell concentrated force]. *Sbornik Issledovaniia po uprugosti i plastichnosti* [Study on the collection of elasticity and plasticity]. Leningrad, LGU publ., 1963, issue 2, pp. 121—131.

[7] Rabotnov Yu.N. *Izhib tsilindricheskoi obolochki sosredotochennoi siloi* [Bending cylindrical shell concentrated force]. *DAN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences]. 1946, vol. 52, no. 4, pp. 299—301.

[8] Juan S.W. Thin cylindrical shells subjected to concentrated loads. *Quart. Appl. Math.*, 1946, vol. 4, no. 1, pp. 13—26.

[9] Beskin L. Local stress distribution in cylindrical shells. *J. Appl. Mech.*, 1946, vol. 13, no. 2, pp. 137—146.

[10] Ting L., Yuan S.W. On radial deflection of a cylinder of finite length with various end conditions. *J. Aeronaut. Sci.*, 1958, vol. 25, no. 4, pp. 230—234.

[11] Chernyshev G.N. O deistvii sosredotochennykh sil i momentov na upruguiu obolochku proizvol'nogo ochertaniia [On the action of concentrated forces and moments on the elastic shell of arbitrary shape]. *Prikladnaia matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1963, vol. 27, issue 1, pp. 26—34.

[12] Lee S.W., Dai C.C., Yeom C.H. A triangular finite element for thin plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1985, vol. 21, no. 10, pp. 1813—1831.

[13] Lukasevich S. *Lokal'nye nagruzki v plastinakh i obolochkakh* [Local loads in plates and shells]. Moscow, Mir publ., 1982. 542 p.

[14] Rumshinskii L.Z. *Matematicheskaia obrabotka rezul'tatov eksperimenta* [Mathematical processing of the experimental results]. Moscow, Nauka publ., 1971. 192 p.

Статья поступила в редакцию 06.06.2013

Информация об авторе

ВИНОГРАДОВ Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).

Information about the author

VINOGRADOV Yuriy Ivanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Professor of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).