

# Расчет и конструирование машин

УДК 539.3

## О возможности применения сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитьями в качестве приводов управляемой упругой деформации

**Ф.Д. Сорокин, Чан Ки Ан**

*Повышенные требования к отсутствию частиц загрязнений в устройствах, применяемых в условиях сверхчистого вакуума, тонких химических, электронных и медицинских технологиях, могут быть удовлетворены за счет использования приводов с разделением «чистой» и рабочей полостей. В статье предложен новый вид таких приводов на основе сетчатых оболочек с неравновесной исходной конфигурацией. Равновесную конфигурацию, к которой стремится оболочка при подаче внутреннего давления, несложно определить путем прямой минимизации полного потенциала системы. Приведен пример цилиндрической сетчатой оболочки, принимающей форму тора при нагружении внутренним давлением, что позволяет на ее основе разрабатывать захваты и другие устройства. Управление величиной жесткости такого устройства сводится к простому изменению давления.*

*Таким образом, впервые предложено в качестве приводов управляемой упругой деформации использовать сетчатые оболочки с несимметрично уложенными нитьями.*

*Результаты исследования доказывают возможность применения сетчатых оболочек в качестве приводов управляемой упругой деформации.*

**Ключевые слова:** управляемая упругая деформация, сетчатая оболочка, неравновесная конфигурация.

## The use of irregular lattice shells as actuators for controlling elastic deformations

**F.D. Sorokin, Chan Ki An**

*Actuators with separated pure and working chambers can eliminate contamination in devices applied in fine chemical, electronic and medical technologies and under pure vacuum conditions. This paper proposes a new type of actuators based on lattice shells with non-equilibrium initial configurations. The equilib-*



**СОРОКИН**  
Федор Дмитриевич  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**SOROKIN**  
Fedor Dmitrievich  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)



**ЧАН Ки Ан**  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**CHAN Ki An**  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)

*rium configuration, which the shell seeks when internal pressure is applied, can be easily determined by minimizing the total potential energy of the system. An example of a cylindrical lattice shell taking the form of a torus when loaded by internal pressure is presented. This shell can be used in the designing of grippers and other devices. The stiffness of the structure is easily controlled by changing the pressure. Thus, irregular lattice shells are proposed for the first time to be used as actuators for controlling elastic deformations. The results of the research demonstrate the possibility of using lattice shells as actuators for controlling elastic deformations.*

**Keywords:** controllable elastic deformation, lattice shell, non-equilibrium configuration.

Традиционные приводы машин, составленные из зубчатых передач, подшипников, муфт и других деталей, в ряде случаев оказываются непригодными для эксплуатации в условиях сверхчистого вакуума, тонких химических, электронных и медицинских технологий. Причиной являются микрочастицы загрязнений, порождаемые парами трения контактирующих деталей машин. Очевидно, что в рассматриваемых случаях должны применяться приводы, не подверженные износу, т. е. не содержащие пар трения.

В работах [1, 2] рассмотрены приводы управляемой упругой деформации (УУД), основанные на применении гибких оболочек, отделяющих «чистую» полость от полости приводного устройства. В качестве гибких оболочек предлагается использовать трубки различных форм (витые, винтовые, некругового сечения, с некруговой осью и т.п.), системы таких трубок, сильфоны с несимметричными гофрами и системы сильфонов.

Авторы данной статьи предлагают расширить набор таких приводов оболочками, составленными из двух перекрещивающихся семейств нитей и эластичного связующего. Оболочки данного вида рассматривали В.Л. Бидерман и Б.Л. Бухин [3, 4] и назвали их сетчатыми оболочками. Основным элементом, воспринимающим нагрузку в сетчатой оболочке, является металлический или текстильный корд. Эластичное связующее (обычно резина) выполняет роль узелков, скрепляющих нити ле-

вого и правого семейств. Резинокордные сетчатые оболочки применяют в качестве амортизаторов, упругих опор, напорных рукавов, автомобильных шин и т. п.

Как правило, в исходном состоянии сетчатые оболочки осесимметричны. При этом нити левого и правого семейств уложены под одинаковыми углами ( $\beta_n = \beta_p$ ). Более того, закон изменения углов укладки нитей обычно выбирается из условия образования нитями «равновесной конфигурации», т. е. такой конфигурации, которая не меняется при нагружении оболочки заданным сочетанием внутреннего давления и осевой силы. Расчет равновесных конфигураций хорошо разработан для случаев шинной геометрии нитей и укладки нитей по геодезическим линиям [3, 4].

В работах [5–7] рассмотрены некоторые классы сетчатых оболочек с несимметричной укладкой нитей.

Осесимметричная деформация сетчатых оболочек подробно описана в работах В.Л. Бидермана и Б.Л. Бухина. Известны уточнения теории сетчатых оболочек, учитывающие деформации нитей, жесткость связующего и малую изгибную жесткость стенки оболочки. Разработана теория малых неосесимметричных деформаций в окрестности равновесной осесимметричной конфигурации. Однако создание устройств УУД в теории сетчатых оболочек ранее не рассматривалось.

Если ставится задача использовать сетчатые оболочки в качестве приводов, то исходная конфигурация оболочки должна быть неравновесной, тогда при подаче внутреннего давления такая оболочка будет стремиться к равновесной конфигурации и совершать при этом требуемое движение. Пример использования трех таких оболочек в качестве захвата приведен на рис. 1. Нити уложены таким образом, что при подаче давления «пальцы» изгибаются и могут удерживать предмет (рис. 2).

Рассмотрим расчет равновесной конфигурации сетчатой оболочки с несимметрично уложенными нитями (рис. 3).

Наиболее просто напряженно-деформированное состояние сетчатой оболочки определяется на основе прямой минимизации полного потенциала механической системы. Механиче-

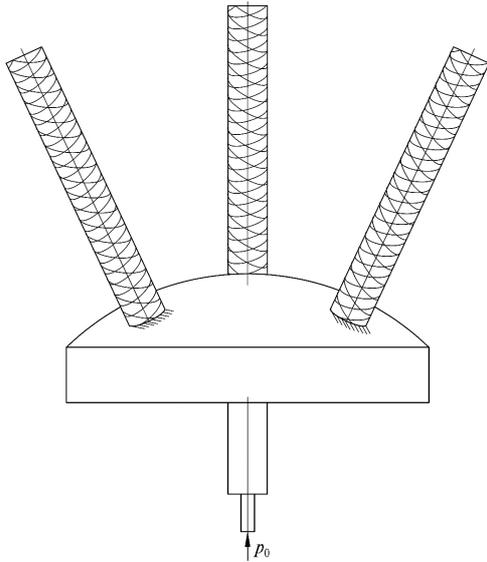


Рис. 1. Устройство захвата на основе цилиндрических сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями

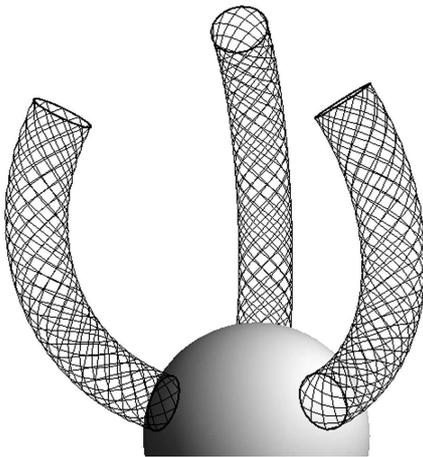


Рис. 2. Захват в рабочем положении

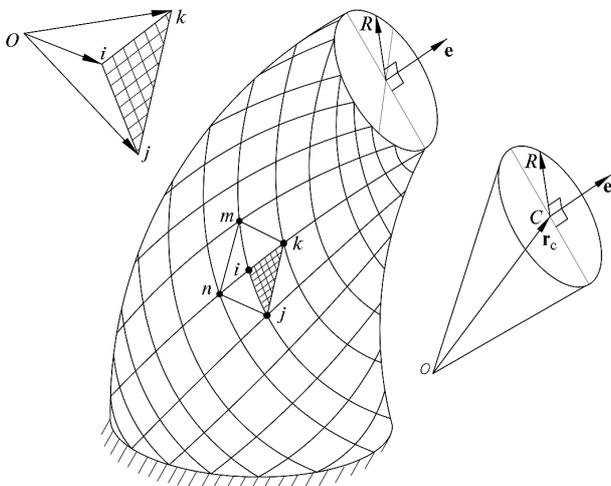


Рис. 3. Сетчатая оболочка в деформированном состоянии

ская система включает упругие нити корда, жесткие торцы оболочки и внутреннее давление в оболочке. Оболочка (сетка) разбивается на отдельные прямолинейные упругие элементы – стерженьки, упругие свойства которых объединяют сразу несколько нитей одноименного направления. Жесткость сечения таких стерженьков  $K$  вычисляется путем сложения жесткостей, заменяемых ими нитей:

$$K = nK_n,$$

где  $K_n$  – жесткость сечения одной нити;  $n$  – количество нитей, приходящихся на один, заменяющий их стержневой элемент.

Энергия деформаций стержневого элемента с номерами узлов  $i$  и  $j$  определяется по формуле

$$U_{ij} = \frac{K\Delta l^2}{2l_0} = K \frac{(l-l_0)^2}{2l_0},$$

где  $l_0, l$  – длины нитей (стержневых элементов) в исходном и деформированном состояниях.

Длины  $l_0, l$  рассчитываются по формулам через координаты узлов элемента (рис. 3):

$$l_0 = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0})^2};$$

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Здесь  $x, y, z$  – декартовы координаты;  $i, j$  – номера узлов стержневого элемента; индексом «0» помечено исходное состояние.

Потенциал сил давления  $p$  равен произведению давления на объем  $V$  внутренней полости оболочки, взятый с обратным знаком:

$$W = -pV.$$

Для вычисления объема поверхность оболочки разбивалась на группы из четырех треугольников (см. рис. 3). Объем тетраэдра с вершиной в начале координат рассчитывался через определитель

$$V_{ijk} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$$

Объем конуса  $V_k$  с вершиной в начале координат, опирающегося на верхнее днище, определялся по формуле

$$V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_C),$$

где  $R$  — радиус верхнего дна;  $\mathbf{e}$  — нормаль к плоскости дна;  $\mathbf{r}_C$  — радиус-вектор центра дна.

Полный потенциал системы складывается из упругой энергии всех нитей и потенциала сил давления:

$$\Pi = \sum_{i,j} U_{ij} - p \left( V_k + \sum_{i,j,k} V_{ijk} \right).$$

Граничными условиями являются условия жесткого закрепления нитей к нижнему неподвижному дну и верхнему подвижному дну. Координаты узлов на нижнем дну определяются исходной конфигурацией сетки и исключаются из списка неизвестных. Радиус-векторы  $\mathbf{r}$  узлов на верхнем дну выражаются через радиус-вектор  $\mathbf{r}_C$  центра тяжести и тензор поворота:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{L}(\mathfrak{D})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{C0}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{L}(\mathfrak{D})$  — тензор поворота в зависимости от вектора поворота  $\mathfrak{D}$  верхнего дна (вектор Эйлера [8–11]).

В декартовых координатах компоненты вектора Эйлера и тензора поворота соответственно равны [8–11]:

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{D}\} &= (\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z)^T; \\ [\mathbf{L}(\mathfrak{D})] &= \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \begin{pmatrix} \vartheta_x^2 & \vartheta_x \vartheta_y & \vartheta_x \vartheta_z \\ \vartheta_y \vartheta_x & \vartheta_y^2 & \vartheta_y \vartheta_z \\ \vartheta_z \vartheta_x & \vartheta_z \vartheta_y & \vartheta_z^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{\sin\theta}{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta_z & \vartheta_y \\ \vartheta_z & 0 & -\vartheta_x \\ -\vartheta_y & \vartheta_x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\theta = |\mathfrak{D}| = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$  — длина вектора Эйлера (угол поворота в радианах).

Согласно формулам (1), (2) координаты всех узлов верхнего дна оказываются выражен-

ными через шесть переменных  $x_C, y_C, z_C, \vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$  — трех координат центра верхнего дна и трех проекций вектора Эйлера. Таким образом, полный потенциал механической системы оказывается функцией координат свободных узлов и шести степеней свободы верхнего дна:

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, x_C, y_C, z_C, \vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z).$$

Положение равновесия сетчатой оболочки определялось прямой минимизацией полного потенциала:

$$\Pi \rightarrow \min.$$

Минимизация выполнялась встроенной процедурой FindMinimum в пакете Mathematica [12].

В качестве примера рассмотрена цилиндрическая сетчатая оболочка с углами укладки нитей, зависящими от окружной координаты, но не зависящими от продольной координаты (рис. 4).

Исходная конфигурация оболочки — цилиндр радиуса 5 мм и длиной 50 мм. Для создания неравновесной укладки нитей использовалась равновесная укладка с углом наклона нити к меридиану  $\beta = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54,7^\circ$ , модифицированная таким образом, что полярный угол каждой точки изменялся по закону

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \pi f \left( \frac{\varphi - \pi}{\pi} \right); \\ f(t) &= \frac{2}{3} \left( t + \frac{t^3}{2} \right). \end{aligned}$$

При разбиении окружности на 12 частей указанное преобразование полярного угла приводит к изображенному на рис. 5 расположению узлов в основании оболочки. При этом узлы оказываются более плотно расположенными при положительных значениях координаты  $x$  и менее плотно расположенными при отрицательных ее значениях. Полученная исходная конфигурация является симметричной относительно нулевого меридиана ( $\varphi = 0$ ), поэтому должна сохраняться симметрия относительно координатной плоскости  $xOz$  также и в деформированном состоянии.

При подаче внутреннего давления сетчатая оболочка «перескакивает» из цилиндрического в торообразное состояние (см. рис. 4). Верхнее жесткое дно при этом поворачивается на  $42,4^\circ$  вокруг оси  $y$ . Значение давления и жест-

кость сечения нитей выбирались так, чтобы деформации нитей составляли единицы процентов ( $K = 500 \text{ Н}$ ,  $p = 7 \text{ МПа}$ ) – это довольно условный выбор. При использовании малорастяжимых нитей деформированная конфигурация оболочки в основном определяется не жесткостью нитей и давлением, а исходной неравновесной укладкой нитей. Однако скорость вычислительного процесса при нахождении минимума полного потенциала довольно существенно зависит от значений  $K$  и  $p$ , а также от густоты сетки.

Рассмотренная сетчатая оболочка, которая при подаче внутреннего давления стремится принять форму тора (см. рис. 4), может использоваться для создания захвата (см. рис. 1, 2), а также других устройств УУД. Следует отметить, что движение оболочки при подаче давления ограничено равновесной конфигурацией, т. е. такой захват не раздавит предмет, а только зафиксирует его. В то же время усилие, которое необходимо приложить для того, чтобы вырвать предмет из захвата зависит от давления. От давления также зависит жесткость «пальцев» захвата. Таким образом, меняя значение

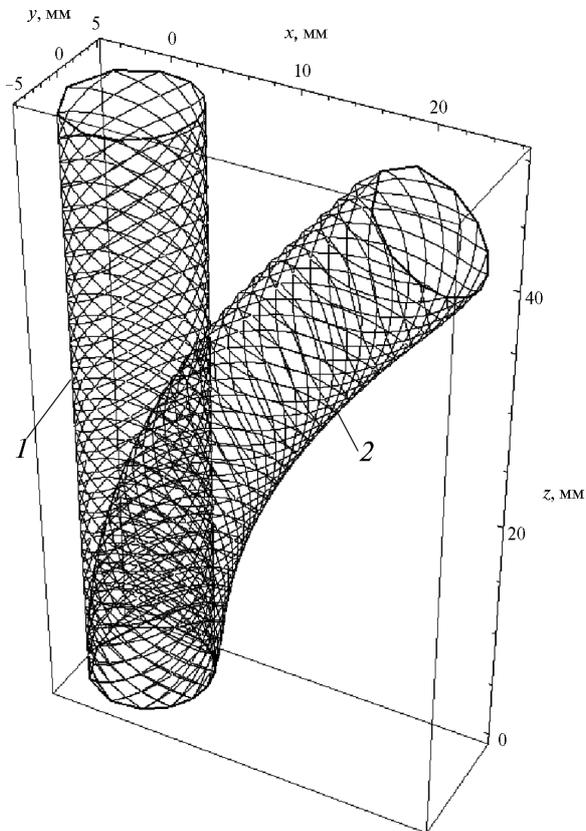


Рис. 4. Конфигурация сетчатой оболочки до подачи внутреннего давления (1) и после (2)

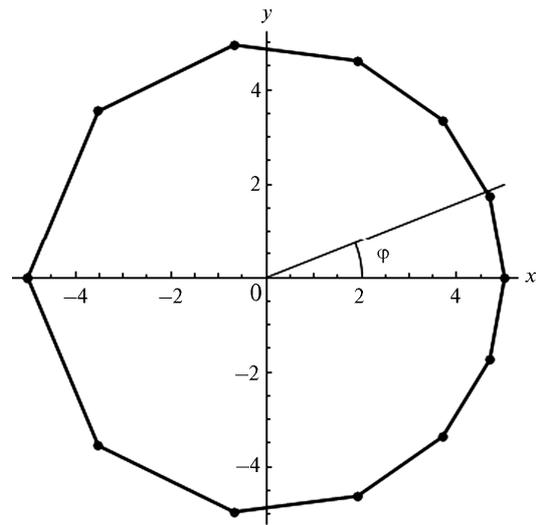


Рис. 5. Расположение узлов в основании оболочки и на верхнем днище

внутреннего давления можно очень просто управлять действиями такого захвата.

Еще одно преимущество предлагаемых приводов УУД, построенных на основе сетчатых оболочек, состоит в том, что усталостные явления возникают не в нитях, а в эластичном связующем, т. е. с точки зрения циклической прочности, предлагаемые устройства УУД аналогичны автомобильным шинам, которые, как известно, выдерживают не один миллион циклов при качении.

Если оба торца привода УУД заделать, то при подаче внутреннего давления вследствие стремления оболочки изогнуться в ее торцах возникнут изгибающие моменты. Таким образом, сетчатые оболочки рассматриваемого вида также можно использовать в качестве нагружающих устройств, преобразующих внутреннее давление в изгибающий момент.

## Выводы

1. Предложена концепция устройств УУД с разделением «чистой» и рабочей полостей на основе сетчатых оболочек с неравновесной исходной конфигурацией.
2. Обоснована возможность расчета конфигураций таких оболочек с помощью прямой минимизации полного потенциала системы.
3. Указаны преимущества предлагаемых устройств: возможность отделения рабочей полости от «чистой», простота управления и малая чувствительность к циклическим явлениям.

## Литература

- [1] Александрова А.Т. *Новые способы передачи и формирования движения в вакууме*. Москва, Высшая школа, 1979, 69 с.
- [2] Александрова А.Т., Васин В.А. Создание идеологии полных комплексных систем вакуумного оборудования (основанных на устройствах и элементах, исключающих трение движения и предназначенных для работы в области микро- и наноэлектроники и других высоких технологий) [Электронный ресурс]. *Системотехника*, 2009, № 7. URL: <http://systech.miem.edu.ru/2009/vasin.htm> (дата обращения: 26 мая 2013).
- [3] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика*. Москва, Машиностроение, 1977, 488 с.
- [4] Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1966, № 1, с. 81—89.
- [5] Сорокин Ф.Д. *Расчеты сетчатых оболочек при больших перемещениях*. Дисс. ... канд. техн. наук. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990, 159 с.
- [6] Аюшеев Т.В. *Геометрические вопросы адаптивной технологии изготовления конструкций намоткой из волоконистых композиционных материалов*. Улан-Удэ, Изд-во БНЦ СО РАН, 2005, 212 с.
- [7] Сорокин Ф.Д., Чан Ки Ан. Расчет сетчатых оболочек с несимметрично уложенными нитями. Проблемы механики современных машин. *Материалы V международной конференции*. Улан-Удэ, Изд-во ВСГУТУ, 2012, т. 3, с. 101—104.
- [8] Жилин П.А. *Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве*. Санкт-Петербург, СПбГТУ, 1992, 86 с.
- [9] Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота. *Изв. РАН. МТТ*, 1994, № 1, с. 164—168.
- [10] Casey J., Lam V. A Tensor Method for the Kinematical Analysis of Systems of Rigid Bodies. *Mechanism and Machine Theory*, 1986, vol. 21, no. 1, pp. 87—97.
- [11] Geradin M., Cardona A. *Flexible multibody dynamics: A finite element approach*. New York, John Wiley & Sons, 2001, 327 p.
- [12] Wolfram S. *The Mathematica book*. Cambridge University Press, 1999, 1470 p.

## References

- [1] Aleksandrova A.T. *Novye sposoby peredachi i formirovaniia dvizheniia v vakuume* [New modes of transmission and the formation of the movement in a vacuum]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1979. 69 p.
- [2] Aleksandrova A.T., Vasin V.A. Sozdanie ideologii polnykh kompleksnykh sistem vakuumnogo oborudovaniia (osnovannykh na ustroistvakh i elementakh, iskluchaiushchikh trenie dvizheniia

i prednaznachennykh dlia raboty v oblasti mikro i nanelektroniki i drugikh vysokikh tekhnologii) [Creating an ideology of complete integrated systems of vacuum equipment (based on the devices and elements, excluding the dynamic friction and designed to work in the field of micro- and nano-electronics and other high-tech)]. *Sistemotekhnika* [Systems Engineering], 2009, no. 7. Available at: URL: <http://systech.miem.edu.ru/2009/vasin.htm> (Accessed 26 May 2013).

[3] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksii. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1977. 488 p.

[4] Biderman V.L., Bukhin B.L. Uravneniia ravovesiia bezmomentnoi setchatoi obolochki [The equilibrium equations of the membrane retina]. *Izvestiia AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 1966, no. 1, pp. 81—89.

[5] Sorokin F.D. *Raschety setchatykh obolochek pri bol'shikh peremeshcheniakh* Diss. kand. tekhn. nauk [Calculations of lattice shells with large displacements. Cand. tech. sci. diss.]. Moscow, 1990. 159 p.

[6] Aiusheev T.V. *Geometricheskie voprosy adaptivnoi tekhnologii izgotovleniia konstruksii namotkoi iz voloknistykh kompozitsionnykh materialov* [Geometric problems in adaptive manufacturing technology of fiber-wound composite materials]. Ulan-Ude, Buriatskii nauchnyi tsentr sibirskogo otdeleniia RAN publ., 2005. 212 p.

[7] Sorokin F.D., Chan Ki An. *Raschet setchatykh obolochek s nesimmetrichno ulozhennymi nitiami. Problemy mekhaniki sovremennykh mashin* [Calculation of lattice shells with asymmetrically stacked threads. Problems of modern machines]. *Materialy 5 mezhdunarodnoi konferentsii* [Proceedings of the 5 International Conference]. Ulan-Ude, VSGUTU publ., 2012, vol. 3, pp. 101—104.

[8] Zhilin P.A. *Vektory i tenzory vtorogo ranga v trekhmernom prostanstve* [Vectors and tensors of the second rank in three-dimensional space]. St. Petersburg, SPbGTU publ., 1992. 86 p.

[9] Sorokin F.D. Priamoe tenzornoe predstavlenie uravnenii bol'shikh peremeshchenii gibkogo sterzhnia s ispol'zovaniem vektora konechnogo povorota [Direct representation of the tensor equations of motion of large flexible rod using a vector of the final turn]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 1994, no. 1, pp. 164—168.

[10] Casey J., Lam V. A Tensor Method for the Kinematical Analysis of Systems of Rigid Bodies. *Mechanism and Machine Theory*. 1986, vol. 21, no. 1, pp. 87—97.

[11] Geradin M., Cardona A. *Flexible multibody dynamics: A finite element approach*. New York, John Wiley & Sons, 2001. 327 p.

[12] Wolfram S. *The Mathematica book*. Cambridge University Press, 1999. 1470 p.

Статья поступила в редакцию 28.05.2013

## Информация об авторах

**СОРОКИН Федор Дмитриевич** (Москва) — профессор кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: sorokin\_fd@mail.ru).

**ЧАН Ки Ан** (Москва) — аспирант кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

## Information about the authors

**SOROKIN Fedor Dmitrievich** (Moscow) — Professor of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: sorokin\_fd@mail.ru).

**CHAN Ki An** (Moscow) — Post-Graduate of «Applied Mechanics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation).