

Транспортное и энергетическое машиностроение



ШУХМАН

Сергей Борисович

доктор технических наук,
профессор, генеральный
директор



СОЛОВЬЕВ

Владимир Ильич

кандидат технических
наук, старший научный
сотрудник, ведущий
специалист (ОАО
«Инновационная фирма
«НАМИ-Сервис»)
e-mail:
visoloviev01@yandex.ru

УДК 629.113; 629.3.032; 629.3.015

Математическая модель криволинейного движения колеса по грунту

С.Б. Шухман, В.И. Соловьев

Рассмотрен процесс криволинейного движения одиночного колеса по грунту. Приведены зависимости и расчетные схемы для определения силовых факторов и глубины колеи в зависимости от расположения полюса поворота колеса.

Ключевые слова: колесо, криволинейное движение, грунт, боковая сила, колея.

Mathematical model of curvilinear motion of wheels on the ground

S.B. Shukhman, V.I. Solovyev

The process of curvilinear motion of a single wheel on the soil is considered. The dependence and the calculation scheme to determine the power factor and the track depth against the location of the wheel turn pole are given.

Keywords: wheel, curvilinear motion, soil, lateral force, track.

Рассмотрению процессов, происходящих при криволинейном движении колеса по грунту, посвящено немного работ, что объясняется сложностью задачи и недостаточностью результатов экспериментов [1–4]. В большинстве случаев авторы работы ограничиваются рассмотрением искажения поперечного сечения эластичного колеса под действием боковых реакций грунта и принятия некото-

рых, не всегда обоснованных, допущений для определения их значений.

В анализе этой проблемы авторы предлагаемой статьи основное внимание уделили процессам формирования следа при проходе жесткого условного эквивалентного колеса, абстрагируясь, таким образом, от деформации поперечного сечения шины. Полагаем, что перемещение частиц грунта, взаимодействующих с боковыми поверхностями колеса, происходит только в боковом направлении, т. е. считаем, что перемещения частиц грунта под действием сил трения в контакте боковых поверхностей с грунтом не происходит, а выдавливание грунта отсутствует. Тем не менее, надеемся, что даже при подобных упрощениях приведенный ниже анализ будет способствовать приближению к выявлению закономерностей, проявляющихся при криволинейном движении колеса по грунту.

При анализе процесса качения колеса по грунту полагаем грунт сплошной однородной пластичной средой с горизонтальной поверхностью. Колесо рассматриваем как жесткий цилиндр с радиусом основания r_0 и шириной B . Траекторию центра колеса O_k в плане считаем окружностью радиусом R_{Ok} . Проекцию центра поворота колеса $O_{ц}$ на его среднюю продольную плоскость (полюс поворота P) полагаем отстоящим (в плане) от центра колеса на расстояние $x_{ц}$. Заглубление колеса в грунт (глубина следа) обозначим H (рис. 1). По рисунку 1 находим выражение для угла увода колеса:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{x_{ц}}{R_{Ok}}\right) \approx \frac{x_{ц}}{R_{Ok}} \quad (1)$$

Сечение колеса плоскостью, совпадающей с поверхностью грунта, имеет вид прямоугольника $abcd$, сторона ab которого обращена к центру поворота. Сечение колеса плоскостью, параллельной поверхности грунта и отстоящей от нее на глубину z , также имеет вид прямоугольника $efgh$, причем его сторона ef также обращена к центру поворота. При движении колеса все точки рассматриваемых прямоугольников двигаются по окружностям, центры которых совпадают с центром поворота $O_{ц}$. В этом движении они перемещают точки грун-

та в пределах бесконечно малой толщины рассматриваемого слоя грунта в направлении, перпендикулярном стороне прямоугольника.

Например, при изображенном на рис. 1 расположении полюса поворота, точка грунта, контактирующая с точкой e стороны прямоугольника ef , скользя при движении колеса по его боковой поверхности и достигнув, например, точки A , имеет боковую деформацию сдвига, равную $R_e - R_A$. Определяя деформацию грунта для всех точек стороны прямоугольника ef , контактирующих с грунтом, получаем эпюру деформаций точек грунта в этом сечении. Очевидно, что участок kf стороны прямоугольника ef с грунтом не контактирует. Совокупность эпюр деформации для всей зоны внутренней (по отношению к центру поворота) боковой поверхности колеса, контактирующей с грунтом, образует некую объемную эпюру деформаций точек грунта, находящихся в контакте с колесом. Таким образом, уплотнение грунта осуществляется только частью внутренней боковой поверхностью колеса (заштрихована на рис. 1), ограниченной вертикальной плоскостью, проходящей через полюс и центр поворота. Вследствие этого, конфигурация внутренней стенки сечения следа имеет вертикальный участок на глубину, равную расстоянию z_0 от поверхности грунта до пересечения упомянутой выше вертикальной плоскости с цилиндрической поверхностью колеса. Оставшаяся часть внутренней стенки следа имеет эллиптическую форму.

Аналогичные явления происходят и на наружной (по отношению к центру поворота) боковой поверхности колеса, но с некоторыми особенностями. Эта боковая поверхность сначала кромкой передней части срезает грунт, работая как скребок, а затем задней частью деформирует грунт в боковом направлении. Площадь контакта с грунтом наружной боковой поверхности колеса на рис. 1 выделена точечной штриховкой. Конфигурация наружной поверхности следа эллипсообразная.

Описанный вид деформации грунта и нахождения сопутствующих ему силовых зависимостей ранее не рассматривался. По характеру происходящих процессов, ближе всего к по-

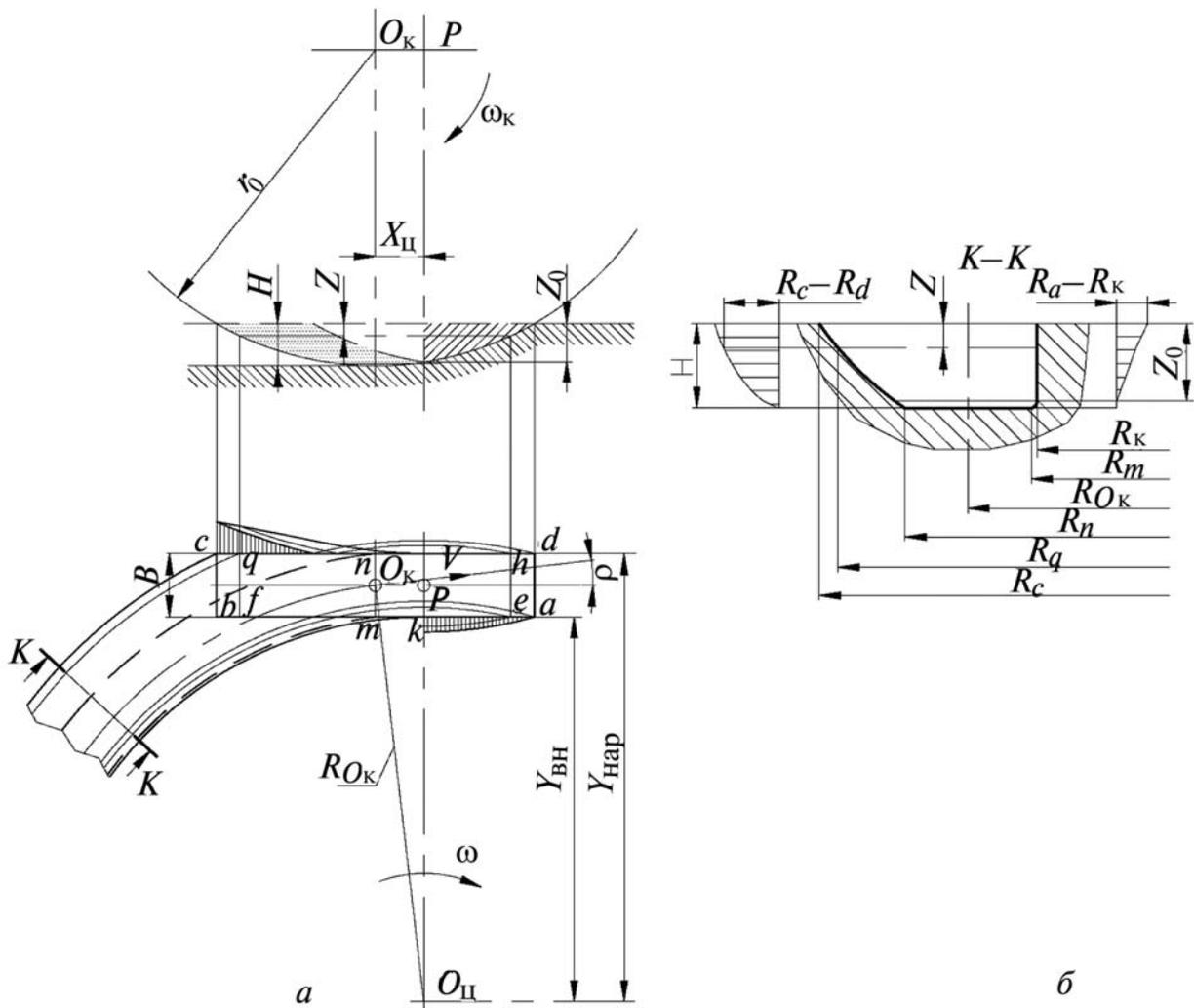


Рис. 1. Схема криволинейного движения колеса по грунту при расположении полюса поворота впереди центра колеса и в пределах прямоугольника *abcd*. Штриховыми линиями обозначены границы плоской части следа на дне колеи:

a — кинематическая расчетная схема; *б* — поперечное сечение следа

добному виду нагружения грунта будет, вероятно, деформирование грунта поворотным плоским штампом, первоначально располагавшимся вертикально (рис. 2).

Очевидно, что известные расчетные схемы и зависимости определения сопротивления грунта сдвигу в данном случае не применимы. Вследствие этого примем допущение, что, во-первых, давление на боковую поверхность колеса со стороны грунта в данной точке контакта прямо пропорционально деформации грунта и, во-вторых, этот коэффициент пропорциональности равен коэффициенту c_0 в зависимостях сопротивления грунта сдвигу. Тогда определение силовых факторов, действующих

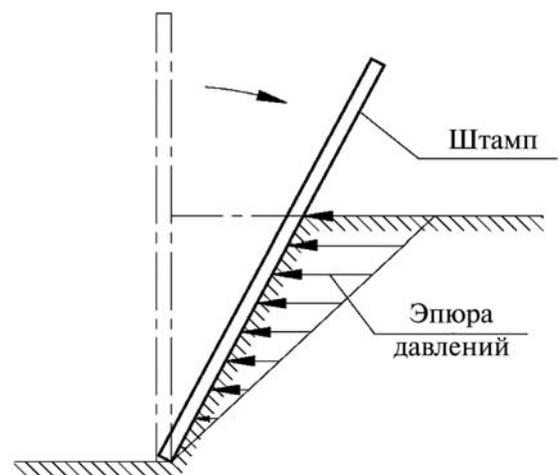


Рис. 2. Гипотетическая схема нагружения грунта при рассмотрении криволинейного движения колеса

на боковые поверхности колеса, сводится к определению параметров объемной эпюры боковой деформации грунта.

Поскольку процесс деформации грунта внутренней поверхностью колеса отличается от его деформации наружной поверхностью колеса, рассмотрим их последовательно.

Внутренняя боковая поверхность колеса (рис. 3). Выберем систему координат, центр которой O_p лежит на линии пересечения поверхности грунта с боковой поверхностью колеса в точке, совпадающей с проекцией центра поворота на боковую поверхность колеса. Ось X направим горизонтально в направлении движения колеса, ось Z — вертикально вниз, а ось Y — перпендикулярно боковой поверхности колеса в направлении центра поворота.

Объемная эпюра деформации точек грунта имеет вид цилиндрического бруса, имеющего основанием часть боковой поверхности колеса (заштрихована на рис. 3), усеченного поверхностью S , которая в секущей плоскости, параллельной плоскости XO_pY и отстоящей от нее на расстояние z , образует кривую $y = f(x, z)$. Секущая плоскость обозначена на рис. 3 штриховой линией. Кривая $y = f(x, z)$ заключена между двумя абсциссами, одна из которых равна нулю, а вторая — определяется по рис. 3 (с учетом того, что в принятой системе координат $x_{\text{ц}} < 0$):

$$\begin{aligned} X(z) &= x_{\text{ц}} + \sqrt{r_0^2 - (r_0 - H + z)^2} = \\ &= x_{\text{ц}} + \sqrt{2r_0(H - z) - (H - z)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно описанному выше процессу образования эпюры деформации для произвольной точки A с координатой x , взятой на линии пересечения секущей плоскости с внутренней боковой поверхностью колеса, деформация грунта

$$\begin{aligned} y(x, z) &= R[X(z)] - R(x) = \\ &= \sqrt{Y_{\text{вн}}^2 + X(z)^2} - \sqrt{Y_{\text{вн}}^2 + x^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $Y_{\text{вн}}$ — расстояние от центра поворота $O_{\text{ц}}$ до внутренней боковой поверхности колеса.

Площадь эпюры деформации грунта в секущей плоскости, параллельной координатной

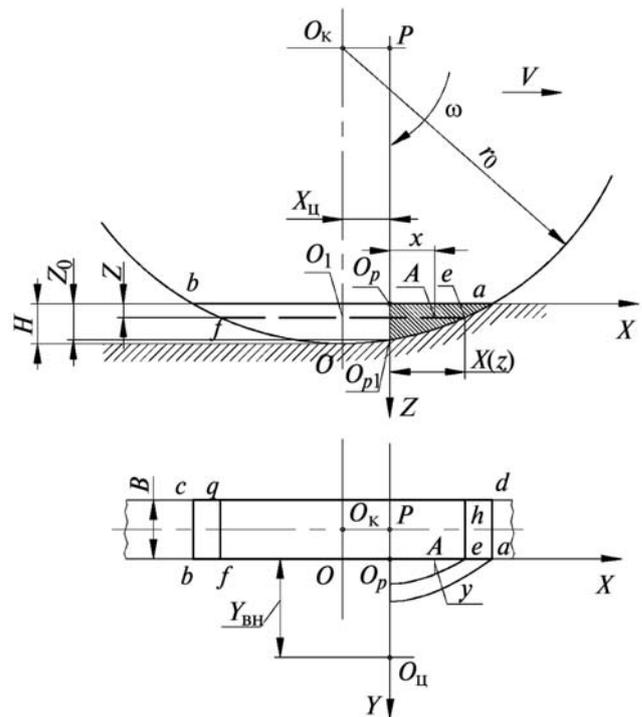


Рис. 3. Расчетная схема определения параметров объемной эпюры деформации грунта для внутренней боковой поверхности колеса

плоскости XO_pY и отстоящей от нее на расстоянии z :

$$\begin{aligned} F(x, z) &= \int_0^{X(z)} y(x, z) dx = \\ &= \int_0^{X(z)} \left[\sqrt{Y_{\text{вн}}^2 + X(z)^2} - \sqrt{Y_{\text{вн}}^2 + x^2} \right] dx. \end{aligned} \quad (4)$$

При определении объема эпюры деформации грунта обратим внимание на то, что интегрирование по координате z будет проводиться в интервале $0 \dots z_0$, где значение z_0 определяется по рис. 3:

$$z_0 = \sqrt{r_0^2 - x_{\text{ц}}^2} - r_0 + H. \quad (5)$$

Тогда объем эпюры деформации грунта внутренней боковой поверхностью колеса

$$V_{\text{вн}} = \int_0^{z_0} F(x, z) dz. \quad (6)$$

Используя известные в математике выражения по определению координат центра объема геометрических тел по осям x и z , получаем:

$$\xi_{\text{вн}} = \frac{\int_0^{z_0} dz \int_0^{X(z)} y(x, z) x dx}{V_{\text{вн}}}; \eta_{\text{вн}} = \frac{\int_0^{z_0} F(x, z) z dz}{V_{\text{вн}}}. \quad (7)$$

Таким образом, боковая реакция грунта, действующая на внутреннюю боковую поверхность колеса в направлении от центра поворота,

$$P_{\text{вн}} = c_0 V_{\text{вн}}. \quad (8)$$

Момент сопротивления повороту, создаваемый ею и направленный против направления поворота колеса,

$$M_{\text{вн}} = P_{\text{вн}} (\xi_{\text{вн}} - x_{\text{ц}}). \quad (9)$$

В результате скольжения в контакте внутренней боковой поверхностью колеса с грунтом возникает поле элементарных сил трения, направленных по касательной к траекториям, которые описывают точки их приложения. Для упрощения задачи полагаем, что равнодействующей элементарных сил трения является сила трения P_{μ} , приложенная в точке K действия боковой реакции $P_{\text{вн}}$ на боковую поверхность колеса (рис. 4) и направленная по касательной к траектории, описываемой этой точкой. Обозначим мгновенный центр поворота колеса O_r . Учитывая, что $x_{\text{ц}} < 0$, расстояние между точками O_r и K будет определяться по формуле

$$R_{\text{тр. вн}} = \sqrt{(\xi_{\text{вн}} - x_{\text{ц}})^2 + (r_0 - H + \eta_{\text{вн}} - r_{\text{к}})^2}, \quad (10)$$

где $r_{\text{к}}$ — радиус качения колеса. Отсюда момент трения $M_{\text{тр. вн}}$, возникающий в контакте внутренней боковой поверхностью колеса с грунтом,

$$M_{\text{тр. вн}} = P_{\mu} R_{\text{тр. вн}} = \mu P_{\text{вн}} \sqrt{(\xi_{\text{вн}} - x_{\text{ц}})^2 + (r_0 - H + \eta_{\text{вн}} - r_{\text{к}})^2}, \quad (11)$$

где μ — коэффициент трения боковой поверхности колеса о грунт.

Наружная боковая поверхность колеса (рис. 5). Для удобства рассмотрения деформации

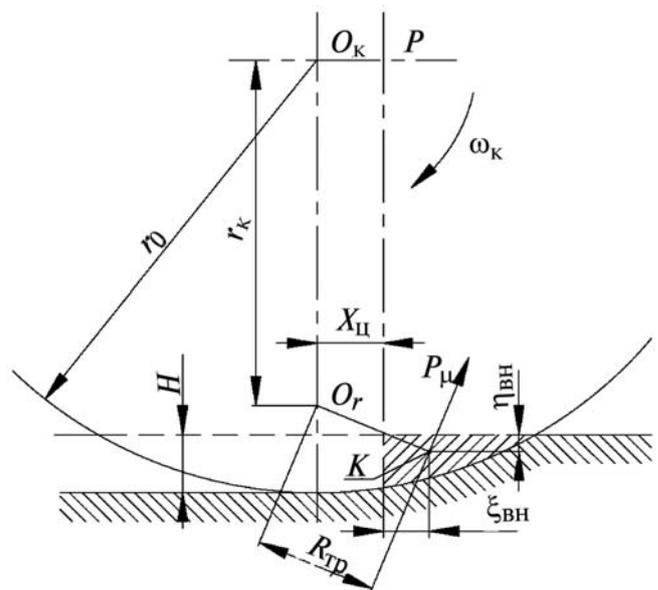


Рис. 4. Схема для определения радиуса трения

ций грунта со стороны наружной боковой поверхности колеса выберем систему координат, центр которой O_p лежит на линии пересечения поверхности грунта с наружной боковой поверхностью колеса в точке, совпадающей с проекцией центра поворота на наружную боковую поверхность колеса. Ось X направим горизонтально в направлении, противоположном направлению движения колеса, ось Z — вертикально вниз, а ось Y — перпендикулярно наружной боковой поверхности колеса в направлении от центра поворота.

Аналогично рассмотренному ранее, объемная эпюра деформации точек грунта, контактирующих с наружной боковой поверхностью колеса, имеет вид цилиндрического бруса. Основанием этого бруса является часть боковой поверхности колеса, погруженной в грунт (заштрихована на рис. 5). Брус усечен поверхностью S , которая в секущей плоскости, параллельной плоскости XO_pY и отстоящей от нее на расстоянии z , образует кривую $y = f(x, z)$, изображенную на рис. 5. Согласно рассмотренному выше процессу образования эпюры деформации грунта кривая $y = f(x, z)$ описывается уравнением

$$y(x, z) = R(x) - R_h = \sqrt{Y_{\text{нар}}^2 + x^2} - \sqrt{Y_{\text{нар}}^2 + x_0(z)^2} \quad (12)$$

и ограничена абсциссами $x_0(z)$ и $X(z)$. По рисунку 5 находим

$$X(z) = \sqrt{2r_0(H-z) - (H-z)^2} + x_{\text{ц}}. \quad (13)$$

Согласно описанному выше процессу образования эпюры деформации грунта левая часть основания цилиндрического бруса в интервале от $z=0$ до z_0 ограничена кривой $O_{p1}d_1$, являющейся зеркальным отражением кривой $O_{p1}d$ относительно оси $O_{p1}P$, а в интервале от z_0 до $z=H$ — краем боковой поверхности колеса. Вследствие такой сложной формы «бруса» деформации, для нахождения его объема используем типовой прием разбиения на две части горизонтальной плоскостью с координатой z_0 , определяемой по выражению (5). Тогда для верхней части объема по рис. 5 имеем

$$x_0(z) = \sqrt{2r_0(H-z) - (H-z)^2} - x_{\text{ц}}, \quad (14)$$

а для нижней части объема

$$x_0(z) = x_{\text{ц}} - \sqrt{2r_0(H-z) - (H-z)^2}. \quad (15)$$

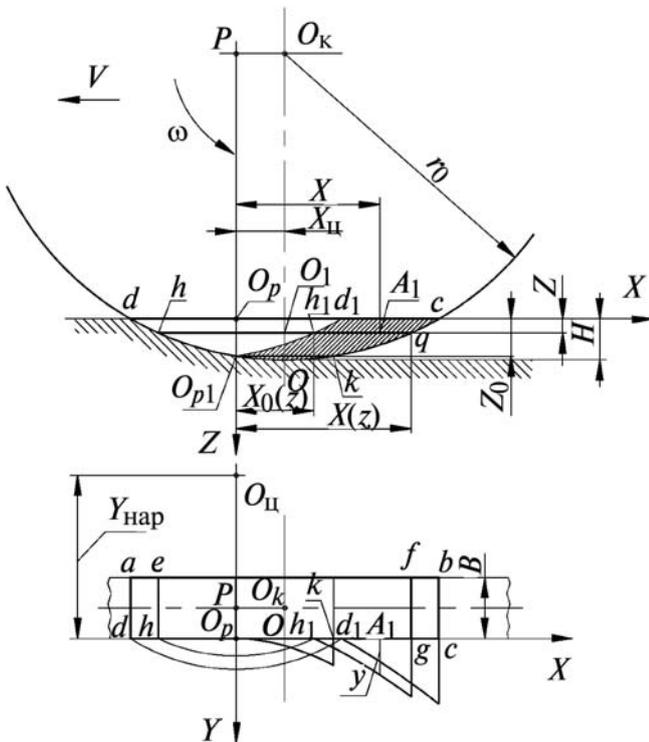


Рис. 5. Расчетная схема определения параметров объемной эпюры деформации грунта для наружной боковой поверхности колеса (вид на центр поворота)

Площадь эпюры деформации грунта в произвольной горизонтальной секущей плоскости определяется по формуле

$$F(x, z) = \int_{x_0(z)}^{X(z)} y(x, z) dx = \int_{x_0(z)}^{X(z)} \left[\sqrt{Y_{\text{нар}}^2 + x^2} - \sqrt{Y_{\text{нар}}^2 + x_0(z)^2} \right] dx, \quad (16)$$

причем для эпюр верхней части объема нижний предел интегрирования рассчитывается по выражению (14), а для нижней части объема — по выражению (15).

Объем эпюры деформации грунта наружной боковой поверхностью колеса является суммой объемов верхней и нижней частей разбиения:

$$V_{\text{нар}} = V_{\text{верх}} + V_{\text{низ}} = \int_0^{z_0} F_{\text{верх}}(x, z) dz + \int_{z_0}^H F_{\text{низ}}(x, z) dz. \quad (17)$$

Координаты центра объема эпюры деформации грунта по оси x и по оси z следующие:

$$\xi_{\text{нар}} = \frac{\xi_{\text{верх}} V_{\text{верх}} + \xi_{\text{низ}} V_{\text{низ}}}{V_{\text{нар}}}, \quad (18)$$

где

$$\xi_{\text{верх}} = \frac{\int_0^{z_0} dz \int_{x_0(z)}^{X(z)} y(x, z) x dx}{V_{\text{верх}}};$$

$$\xi_{\text{низ}} = \frac{\int_{z_0}^H dz \int_{x_0(z)}^{X(z)} y(x, z) x dx}{V_{\text{низ}}};$$

$$\eta_{\text{нар}} = \frac{\eta_{\text{верх}} V_{\text{верх}} + \eta_{\text{низ}} V_{\text{низ}}}{V_{\text{нар}}}. \quad (19)$$

где

$$\eta_{\text{верх}} = \frac{\int_0^{z_0} F_{\text{верх}}(x, z) z dz}{V_{\text{верх}}}; \quad \eta_{\text{низ}} = \frac{\int_{z_0}^H F_{\text{низ}}(x, z) z dz}{V_{\text{низ}}}.$$

Таким образом, боковая реакция грунта, действующая на наружную боковую поверхность колеса по направлению к центру поворота,

$$P_{нар} = c_0 V_{нар}. \quad (20)$$

Момент сопротивления повороту, создаваемый ею и направленный против направления поворота колеса,

$$M_{нар} = P_{нар} (\xi_{нар} - x_{ц}), \quad (21)$$

а момент трения $M_{тр. нар}$, возникающий в контакте наружной боковой поверхностью колеса с грунтом,

$$M_{тр. нар} = \left| \mu P_{нар} R_{тр. нар} \right| = \left| \mu P_{нар} \sqrt{(\xi_{нар} - x_{ц})^2 + (r_0 - H + \eta_{нар} - r_k)^2} \right|. \quad (22)$$

Суммарные реакции, действующие на боковые поверхности колеса при криволинейном движении. При определении суммарных реакций грунта примем за положительное направление боковой реакции грунта направление от центра поворота, а за положительное направление момента сопротивления повороту — направление, противоположное направлению поворота колеса. Кроме того, по рис. 4 находим:

$$Y_{вн} = \sqrt{R_{ок}^2 - x_{ц}^2} - \frac{B}{2}; \quad (23)$$

$$Y_{нар} = \sqrt{R_{ок}^2 - x_{ц}^2} + \frac{B}{2}. \quad (24)$$

Тогда суммарная боковая реакция грунта

$$P_{бок} = P_{вн} - P_{нар}. \quad (25)$$

Суммарный момент сопротивления повороту

$$M_{f пов} = M_{вн} + M_{нар}. \quad (26)$$

Суммарный момент трения колеса о грунт

$$M_{тр} = M_{тр. вн} + M_{тр. нар}. \quad (27)$$

Результаты проведенного аналитического исследования представим графически в виде зависимостей относительных величин. На рисунке 6 представлена зависимость боковой силы, действующей на колесо при криволи-

нейном движении, от расположения полюса поворота относительно центра колеса $\frac{PR}{c_0 r_0^4} = f\left(\frac{x_{ц}}{r_0}\right)$ при различных значениях относительной величины глубины колеи H/r_0 .

Следует обратить внимание на то, что, во-первых, примерно линейный характер изменения боковой силы от положения полюса поворота искажается при расположении полюса поворота в зоне отпечатка колеса. Во-вторых, нулевое значение боковой силы достигается при расположении полюса поворота в пределах отпечатка колеса за его центром (при $x_{ц}/r_0 = -0,15 \dots -0,2$). Нулевое значение боковой силы вовсе не означает отсутствия реакции грунта на боковые поверхности колеса. В этом случае реакция грунта на внутреннюю боковую поверхность колеса уравновешивается реакцией грунта на внешнюю боковую его поверхность.

На рисунке 7 приведена зависимость момента сопротивления повороту колеса при криволинейном движении по грунту, создаваемого вследствие боковой деформации грунта, от расположения полюса поворота относительно центра колеса $\frac{MR}{c_0 r_0^5} = f\left(\frac{x_{ц}}{r_0}\right)$ при различных зна-

чениях относительной величины глубины колеи H/r_0 . На рисунке отчетливо видно искажение линейной зависимости момента сопротивления повороту от положения полюса поворота при его нахождении в пределах отпечатка колеса.

На рисунке 8 представлена зависимость относительной величины момента сопротивления повороту от боковой силы $\frac{M_{пов. отн}}{r_0} = f(P_{отн})$

при различной глубине колеи. Кроме уже отмеченного выше нелинейного характера этой зависимости при нахождении полюса поворота в пределах отпечатка колеса, необходимо обратить внимание на следующее. В отличие от характера такой зависимости при криволинейном качении колеса по недеформируемой поверхности, при движении по грунту нулевое значение момента сопротивления повороту достигается в том случае, когда боковая сила не

равна нулю. И наоборот — при боковой силе, равной нулю, момент сопротивления повороту не равен нулю.

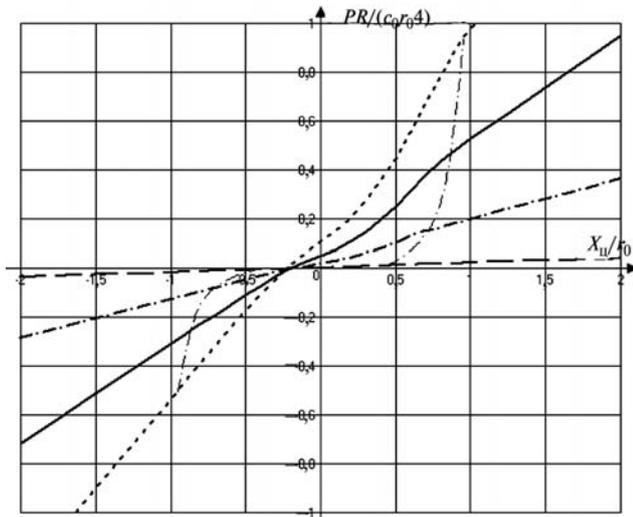


Рис. 6. Зависимость боковой силы от положения полюса поворота (в относительных величинах) при различной глубине колеи:

— — — — $H / r_0 = 0,1$; - · - · - $H / r_0 = 0,3$;
 - - - $H / r_0 = 0,5$; - - - - $H / r_0 = 0,7$

Штрихпунктирными линиями обозначены границы отпечатка колеса при разной глубине колеи

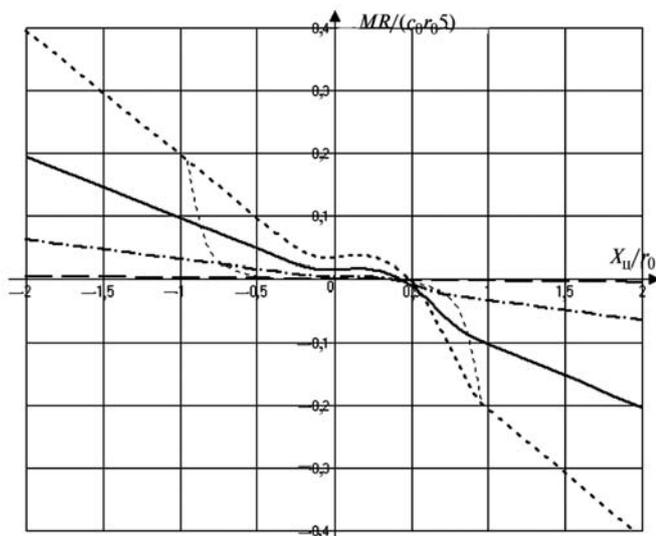


Рис. 7. Зависимость момента сопротивления повороту колеса от расположения полюса поворота при различной глубине колеи:

— — — — $H / r_0 = 0,0$; - · - · - $H / r_0 = 0,3$;
 - - - $H / r_0 = 0,5$; - - - - $H / r_0 = 0,7$

Штрихпунктирными линиями обозначены границы отпечатка колеса при разной глубине колеи

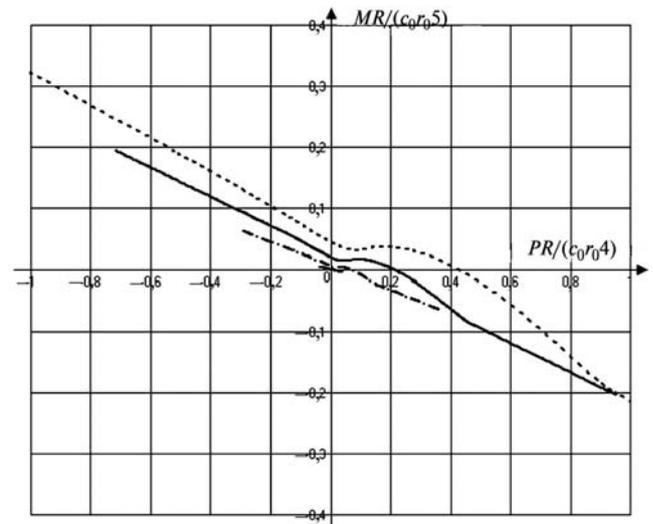


Рис. 8. Зависимость момента сопротивления повороту от боковой силы при различной глубине колеи:

— — — — $H / r_0 = 0,1$; - · - · - $H / r_0 = 0,3$;
 - - - $H / r_0 = 0,5$; - - - - $H / r_0 = 0,7$

Аналогичные аналитические исследования могут быть проведены и для иного расположения полюса поворота относительно центра колеса.

Выводы

Рассматривая криволинейное движение колесной машины по грунту, в отличие от движения по твердой дороге, необходимо в расчетах учитывать нелинейность зависимости момента сопротивления повороту от боковой силы, а также то, что нулевое значение момента сопротивления повороту не совпадает с нулевым значением боковой силы.

Литература

1. Шухман С.Б., Соловьев В.И., Прочко Е.И. Теория силового привода колес автомобилей высокой проходимости. М.: Агробизнесцентр, 2007. 336 с.
2. Агейкин Я.С. Проходимость автомобилей. М.: Машиностроение, 1981. 232 с.
3. Ларин В.В. Методы прогнозирования опорной проходимости многоосных колесных машин на местности. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 224 с.
4. Теория движения боевых колесных машин / С.И. Беспалов, Д.А. Антонов, В.П. Лазаренко и др. М.: Изд-во Министерства обороны, 1993. 385 с.

Статья поступила в редакцию 15.06.2012