УДК 539.4

Методы сглаживания траекторий случайных процессов

А.С. Гусев, С.О. Найденов

Описаны два метода сглаживания траекторий случайных процессов. Один метод основан на усреднении процесса на малом скользящем интервале времени, второй — на исключении белых шумов из квазиамплитудных спектров.

Ключевые слова: траектории, случайный процесс, белый шум, спектр.

Methods of flattening stochastic processes

A.S. Gusev, S.O. Naydenov

Two methods of flattening trajectories of stochastic processes are described. One of them is based on averaging the process in the small sliding time window, and the other — on rejection of white noises from quasi amplitude spectra.

Keywords: trajectories, stochastic process, white noise, spectrum.

ГУСЕВ
Александр Сергеевич
доктор технических наук, профессор

НАЙДЕНОВ
Сергей Олегович
кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
e-mail: sergeyn15@gmail.com

Структурный анализ случайных процессов, проводимый, например, с целью выявления амплитуд циклов, расчета надежности и ресурса конструкций часто требует сглаживания исходных траекторий [1]. Аналогичная ситуация возникает при анализе динамики мобильных машин типа автомобилей и тракторов, когда требуется учесть размеры колес и их упругие свойства на эффективность сглаживания неровностей пути, зависящую, в основном, от длин отпечатка шины [2].

Обозначив исходный случайный процесс $x(t)$, а интервал сглаживания a, получим для определения сглаженной траектории $\tilde{x}(t)$ следующее выражение:

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{a}\int_{t-a}^{t}x(z)dz. \qquad (1)$$

Здесь процесс сглаживания отождествляется с усреднением значений процесса на скользящем интервале (0, a).

После несложных преобразований из (1) следует, что спектральная плотность сглаженного процесса $S_{\tilde{x}}(\omega)$ определяется через спектральную плотность несглаженного процесса $S_x(\omega)$ по формуле [1]:

$$S_{\tilde{x}}(\omega)=\frac{2}{a^2\omega^2}\left(1-\cos(a\omega)\right)S_x(\omega). \qquad (2)$$

При $a\to 0$ $S_{\tilde{x}}(\omega)\to S_x(\omega)$ и сглаживания не происходит.

Для белого шума с интенсивностью K_0 и спектральной плотностью $S_x(\omega)=\frac{K_0}{2\pi}=\text{const}$ при $\omega\in(-\infty,+\infty)$ дисперсия процесса бесконечна, а дисперсия сглаженного на интервале (0, a) процесса

$$S_{\tilde{x}}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\tilde{x}}(\omega)d\omega. \qquad (3)$$

Подставив формулу (2) в (3) и вычислив интеграл, находим:

$$S_{\tilde{x}}^2=\frac{K_0}{2a}. \qquad (4)$$

При $a\to 0$ $S_{\tilde{x}}^2\to\infty$, а при $a\to\infty$ $S_{\tilde{x}}^2\to 0$.

Применение формулы (2) для других типов процессов связано с определенными вычислительными трудностями.

В исходном соотношении (1) вместо постоянной функции статистического веса $\frac{1}{a}$ можно использовать также переменную на интервале (0, a) функцию веса $\alpha(t)$ с нормировкой

$$\int_{t-a}^{t}\alpha(z)dz=1. \qquad (5)$$

Тогда сглаженный процесс определяется по формуле

$$\tilde{x}(t)=\int_{x-a}^{x}\alpha(z)x(z)dz. \qquad (6)$$

Существенно упростить расчеты можно, если видоизменить соотношение (6) так, чтобы учесть и все предшествующие значения процесса и, в тоже время, процесс усреднения сделать эффективным в основном на интервале (0, a). Этим условиям отвечает функция веса вида

$$\alpha(z)=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-\frac{t-z}{a}},\ -\infty\le z\le t.$$

При этом условие нормировки (5) выполняется, а сглаженный процесс описывается формулой

$$\tilde{x}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{t-z}{a}}x(z)dz. \qquad (7)$$

Дифференцируя выражение (7) приходим к уравнению

$$a\dot{\tilde{x}}(t)+\tilde{x}(t)=x(t) \qquad (8)$$

с передаточной функцией

$$H(i\omega)=\frac{1}{ia\omega+1}. \qquad (9)$$

В соответствии с функцией (9) спектральная плотность сглаженного процесса определяется по спектральной плотности исходного процесса по отличной от (2), но более простой формуле:

$$S_{\tilde{x}}(\omega)=\frac{S_x(\omega)}{a^2\omega^2+1}. \qquad (10)$$

Из соотношения (10) следует, что эффективность сглаживания зависит от значения a и при a = 0 сглаживания не происходит.

Сглаженный на интервале (a, 0) белый шум с интенсивностью K_0 имеет спектральную плотность

$$S_{\tilde{x}}^2=\frac{K_0}{2\pi}\frac{1}{a^2\omega^2+1} \qquad (11)$$

и такую же, что и в формуле (4) дисперсию.

Оценки дисперсий производных белого шума можно определить только при повторных сглаживаниях. Так, оценку дисперсий первой производной получаем в виде

$$S_{\dot{\tilde{x}}}^2=\frac{K_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2d\omega}{\left(a^2\omega^2+1\right)^2}=\frac{K_0}{4a^3}. \qquad (12)$$

Рассмотрим сглаживание непрерывного недифференцируемого процесса с корреляционной функцией $K_x(\tau)=\mathrm{e}^{-|\tau|}$, спектральной плотностью $S_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$ и единичной дисперсией.

Для получения оценки производных этого процесса необходимо выполнить операцию сглаживания. Спектральная плотность первой производной сглаженного на интервале (0, a) процесса будет определяться как

$$S_{\dot{\tilde{x}}}^2(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\omega^2}{\left(1+\omega^2\right)\left(1+a^2\omega^2\right)}, \qquad (13)$$

а дисперсия

$$S_{\dot{\tilde{x}}}^2=\frac{\pi}{a(a+1)}.$$

Производных процесса со спектральной плотностью (13) не существует и для определения соответствующих оценок необходимо выполнение повторных операций сглаживания.

Рассмотрим другой способ получения сглаженных траекторий случайных процессов. Отметим, что спектральные плотности процессов (кроме специального случая белого шума) можно представить в виде произведения двух комплексно сопряженных функций (квазиспектров):

$$S_x(\omega) = C\Phi_x(\omega)\Phi_x^*(\omega), \tag{14}$$

где C — константа.

Из квазиспектров в (14) исключим белые шумы путем их замены на выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_x(\omega) &= \Phi_x(\omega) - \lim_{\omega\to\infty}\Phi_x(\omega); \\ \Phi_x^*(\omega) &= \Phi_x^*(\omega) - \lim_{\omega\to\infty}\Phi_x^*(\omega). \end{aligned} \tag{15}$$

Подставив выражение (15) в (14), получим спектральную плотность сглаженного процесса. При

$$S_x(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

имеем

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{\alpha}{\pi}\frac{i\omega}{\alpha+i\omega}\frac{-i\omega}{\alpha-i\omega};$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{i\omega}{\alpha+i\omega} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{-i\omega}{\alpha+i\omega} = 1.$$

Спектральную плотность сглаженного процесса и его дисперсию определяют по следующим формулам:

$$S_{\dot{\tilde{x}}}(\omega) = \frac{\alpha^3}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}; \; S_{\dot{\tilde{x}}}^2 = \alpha^2.$$

Применительно к недифференцируемому процессу с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau,$$

где α и β — параметры, получаем:

$$S_{\dot{\tilde{x}}}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2 + \omega^2\left(2\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2}{\left(\alpha^2-\beta^2-\omega^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2};$$

$$S_{\dot{\tilde{x}}}^2 = 3\alpha^2 + \beta^2 2\alpha - 2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Аналогично можно провести сглаживание и других недифференцируемых процессов.

Возникающая в статической динамике задача структурного анализа траекторий недифференцируемых случайных процессов в прямую не может быть решена. Необходимо сглаживание исходных траекторий, это можно сделать либо методом усреднения на малом скользящем интервале времени, либо путем исключения из квазиамплитудных спектров белых шумов.

Литература

1. *Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 223 с.

2. Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, С.А. Стародубцева и др. М.: Изд-во МГТУ МАМИ, 2000. 283 с.

Статья поступила в редакцию 01.06.2012