

УДК 621.833

## Исследование динамики линеаризованной модели привода с волновой зубчатой передачей внешнего деформирования

Г.А. Тимофеев, В.В. Кузенков

*Рассмотрена динамика линеаризованной модели электромеханического привода с волновой зубчатой передачей с генератором волн внешнего деформирования. Получены переходные характеристики по управлению и по возмущению.*

**Ключевые слова:** электромеханический привод, волновая зубчатая передача, генератор волн внешнего деформирования, линеаризованная модель.

## Investigation of linearized model dynamics of electromechanical actuator with external strain wave gear

G.A. Timofeev, V.V. Kuzenkov

*The dynamics of the linearized model of the electromechanical actuator with the wave gear with an external strain wave generator is considered. Transient response and management in the perturbation are obtained.*

**Keywords:** electromechanical actuator, wave gear, generator waves of external strain, linearized model.

В работе [1] проведено моделирование динамики следящего привода с волновой зубчатой передачей (ВЗП) внешнего деформирования. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако, для использования в составе системы автоматического управления приводом представленная модель слишком громоздка и не позволяет обеспечить моделирование в реальном масштабе времени. В связи с изложенным представляет интерес упрощенная линеаризованная модель, приведенная на рис. 1.

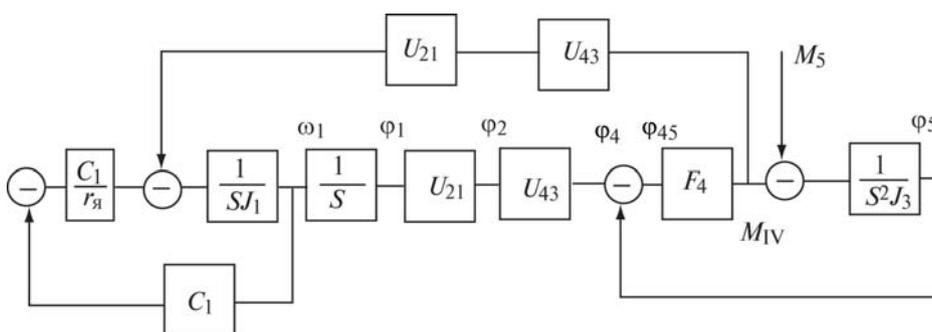


Рис. 1. Линеаризованная структурная схема привода с ВЗП



ТИМОФЕЕВ

Геннадий Алексеевич  
доктор технических наук,  
профессор



КУЗЕНКОВ

Владимир Васильевич  
доцент, кандидат  
технических наук  
кафедры «Теория  
механизмов и машин»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)  
e-mail: timga@bmstu.ru

Изображенная схема получена путем структурных преобразований, представленной на рис. 1 работы [1] и исключением инерционных элементов с малыми постоянными времени. Это вполне допустимо, так как именно элементы с большими постоянными времени, главным образом, определяют динамические свойства привода. Кроме того, высокочастотные составляющие сигналов обычно имеют малые амплитуды и быстро затухают. В схеме, приведенной на рис. 1, исключены также и некоторые диссипативные силы, существенно меньшие соответствующих потенциальных сил. Линеаризация нелинейного элемента проводится методом гармонической линеаризации [2, 3].

Представим выходной сигнал элемента  $F_4$  в виде

$$M_{IV} = A(a, \omega)\varphi_{45} + B(a, \omega) \frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_{45}}{\omega} \right). \quad (1)$$

Здесь  $a$  — амплитуда на входе в нелинейное звено;  $\omega$  — частота колебаний;  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования;  $A$  и  $B$  — коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые по формулам:

$$A = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_4(a \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad (2)$$

$$B = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_4(a \sin \psi) \cos \psi d\psi; \quad (3)$$

$$\varphi = a \sin \psi; \quad (4)$$

где  $a$  — амплитудное значение  $\varphi_{45}$  при его гармоническом изменении.

Ниже исследуются переходные характеристики системы по управляющим и возмущающим воздействиям.

Переходная характеристика привода с ВЗП рассчитывается при подаче ступенчатого сигнала на вход, т. е. при скачкообразном изменении напряжения питания якорной цепи электродвигателя. Возмущающее воздействие ( $M_5 = M_H$ ) полагается равным нулю, так как оно влияет только на значение установившейся угловой скорости движения и не влияет на характер переходной характеристики по управлению.

Линеаризованная схема системы (см. рис. 1) после структурных преобразований представлена на рис. 2. Передаточную функцию можно выразить через параметры системы следующим образом:

$$W_1(s) = \frac{K_3(1 + sT_2)}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2 + s^2T_3^2)}, \quad (5)$$

где

$$K_3 = \frac{U_{21}U_{43}}{C_1}; \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{B^*}{A}; \quad (7)$$

$$T_1 = \frac{r_{я}J_1}{C_1^2}; \quad (8)$$

$$T_3^2 = \frac{J_3}{A}. \quad (9)$$

Коэффициент  $B^*$  определяется через коэффициент гармонической линеаризации нели-

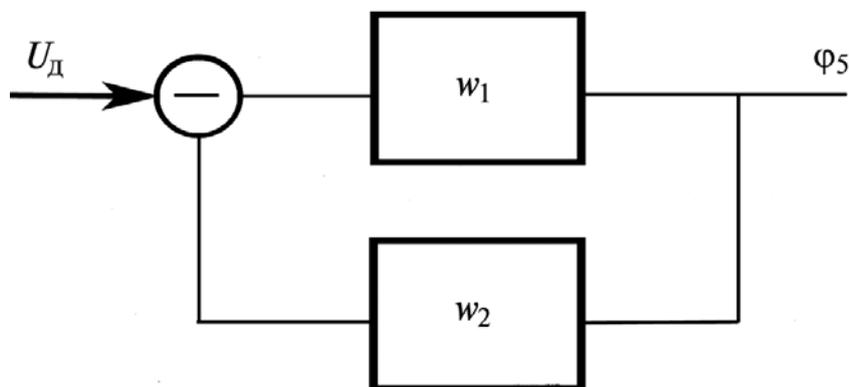


Рис. 2. Структурная схема привода для управляющего воздействия

нейности путем задания вероятной частоты колебаний выходного параметра  $\omega^*$ :

$$B^* = \frac{B}{\omega^*}. \quad (10)$$

Передаточная функция цепи обратной связи

$$W_2(s) = K_4 s^2, \quad (11)$$

где

$$K_4 = \frac{r_{\text{я}}}{C_1} U_{21} U_{43} J_3. \quad (12)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_3(s) = \frac{\varphi_5(s)}{U_{\text{д}}(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) + W_2(s)}. \quad (13)$$

После подстановки значений  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  в формулу (13) получаем

$$W_3(s) = \frac{K_3(1 + sT_2)}{s(1 + sT_4 + s^2T_5 + s^3T_6)}, \quad (14)$$

где

$$T_4 = T_1 + T_2 + K_3 K_4; \quad (15)$$

$$T_5 = T_3^2 + T_1 T_2 + K_3 K_4 T_2; \quad (16)$$

$$T_6 = T_1 T_3^2. \quad (17)$$

Поскольку начальные условия приняты нулевыми, изображение выходной величины  $\varphi_5(s)$  определяется выражением

$$\varphi_5(s) = W_3(s) U_{\text{д}}(s) = \frac{U_{\text{д}} K_3 (1 + sT_2)}{s^2 (1 + sT_4 + s^2T_5 + s^3T_6)}. \quad (18)$$

Здесь  $U_{\text{д}}$  — напряжение питания цепи якоря двигателя после скачка.

Ввиду того, что угол поворота выходного вала после подачи напряжения на двигатель непрерывно возрастает, примем в качестве выходного параметра угловую скорость выходного вала

$$\omega_5(s) = s\varphi_5(s). \quad (19)$$

Подставив в формулу (19) выражение (18), получим изображение скорости по Лапласу

$$\omega_5(s) = \frac{U_{\text{д}} K_3 (1 + sT_2)}{s(1 + sT_4 + s^2T_5 + s^3T_6)}. \quad (20)$$

Для определения переходной характеристики  $\omega_5(t)$  необходимо найти корни знаменателя выражения (20). После подстановки численных значений параметров привода получим

$$\omega_5(s) = \frac{U_{\text{д}} K_3 (1 + 1,22 \cdot 10^{-3} s)}{s(1 + 0,225s + 5,88 \cdot 10^{-4} s^2 + 6,78 \cdot 10^{-5} s^3)}. \quad (21)$$

Знаменатель выражения (21) имеет два действительных корня  $s_1 = 0$  и  $s_2 = 3,95$  и два мнимых, т. е. его можно представить в следующем виде:

$$\omega_5(s) = \frac{U_{\text{д}} K_3 (1 + 1,22 \cdot 10^{-3} s)}{s(s + 3,95)(6,78 \cdot 10^{-5} s^2 + 2,2 \cdot 10^{-4} s + 0,254)}. \quad (22)$$

Таким образом, изображение скорости можно представить в виде суммы элементарных дробей:

$$\omega_5 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 3,95} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4,72s + 3760}, \quad (23)$$

где  $A = 0,0552$ ,  $B = -0,0551$ ,  $C = -2,28 \cdot 10^{-4}$ ,  $D = -0,217$ .

Переходя во временную область, в соответствии с обратным преобразованием Лапласа, получаем:

$$\omega_5(t) = U_{\text{д}} K_3 [0,994 - 0,992e^{-3,95t} - 4,1 \cdot 10^{-3} e^{-2,36t} (\cos 61,3t + 15,5 \sin 61,3t)]. \quad (24)$$

На рисунке 3 представлен переходный процесс, построенный по уравнению (24). На рисунке видно что переходный процесс носит в основном апериодический характер с постоянной времени  $t_1 = 0,253$  с. На апериодический процесс наложены затухающие колебания с частотой  $\omega_1 = 61,3$  рад / с и логарифмическим декрементом колебаний  $b_1 = 0,242$ . Начальная амплитуда колебаний скорости  $a_1 = 0,0636$  зависит от установившегося значения скорости.

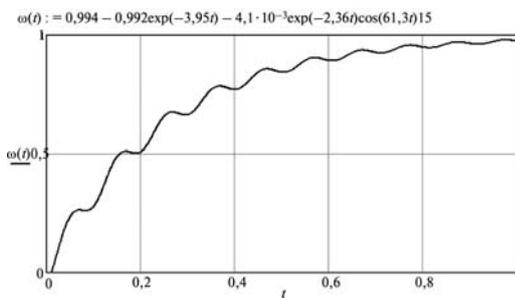


Рис. 3. Переходный процесс при подаче управляющего воздействия

Таким образом, апериодическая составляющая переходного процесса определяется в основном параметрами электродвигателя (электромеханической постоянной времени), а колебательная составляющая — в основном параметрами волновой передачи.

В данном случае быстродействие привода с ВЗП определяется электродвигателем, а влияние ВЗП незначительно.

Следует отметить, что полученный характер переходного процесса (незначительные колебания на фоне меняющейся постоянной составляющей) могут привести к существенной ошибке в расчете коэффициентов гармонической линеаризации.

Переходную характеристику по возмущению обычно используют при экспериментальных исследованиях привода с ВЗП. При этом якорь электродвигателя затормаживают, а приложенный к выходному валу номинальный момент скачком уменьшают до нуля. Получим эту характеристику, используя приведенную выше линеаризованную структурную схему (см. рис. 1). Учитывая, что якорь электродвигателя заторможен, получим эквивалентную схему для рассматриваемого случая (рис. 4). Нелинейный элемент, как и ранее представляем в виде (1).

Передаточная функция схемы (см. рис. 4) имеет вид

$$W(s) = \frac{\varphi_5(s)}{M_c(s)} = \frac{1}{s^2 + 2bs + K^2}, \quad (25)$$

где  $2b = B^* / J_3$ ,  $K^2 = A / J_3$ .

Значение  $\varphi_5(s)$  определяется по формуле

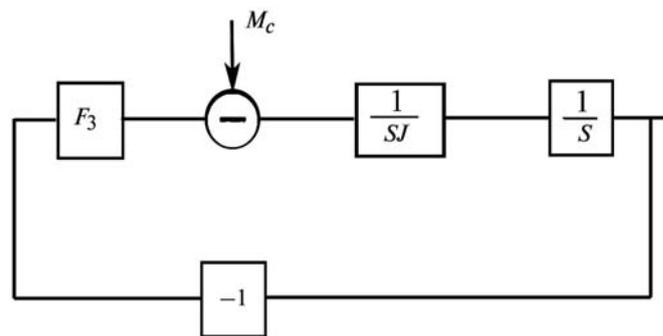


Рис. 4. Структурная схема привода для возмущающего воздействия

$$\varphi_5(s) = W(s)M_c(s) + \frac{D_0(s)}{D(s)}. \quad (26)$$

Здесь  $M_c(s)$  — изображение момента нагрузки;  $D_0(s)$  — многочлен, учитывающий начальные условия в системе;  $D(s)$  — многочлен знаменателя передаточной функции  $W(s)$ .

Учитывая, что при  $t > 0$ ,  $M_c(s) \equiv 0$ ,

$$\varphi_5(s) = \frac{D_0(s)}{s^2 + 2bs + K^2}. \quad (27)$$

Многочлен, учитывающий начальные условия в рассматриваемом случае, имеет вид

$$D_0(s) = s\varphi_5(0) + \dot{\varphi}_5(0) + 2b\varphi_5(0), \quad (28)$$

где  $\varphi_5(0)$  — начальное значение угла поворота выходного вала;  $\dot{\varphi}_5(0)$  — начальная угловая скорость выходного вала. Причем

$$\varphi_5(0) = \frac{M_{5НОМ}}{A}; \quad (29)$$

$$\dot{\varphi}_5(0) = 0. \quad (30)$$

Подставив формулы (29) и (30) в (27) получим

$$\varphi_5(s) = \frac{M_{5НОМ}}{A} \frac{s + 2b}{s^2 + 2bs + K^2}. \quad (31)$$

После разложения на элементарные дроби стандартного вида

$$\varphi_5(s) = \frac{M_{5НОМ}}{A} \left[ \frac{s + b}{s^2 + 2bs + K^2} + \frac{b}{K_1} \frac{K_1}{s^2 + 2bs + K^2} \right], \quad (32)$$

где

$$K_1 = \sqrt{K^2 - b^2}. \quad (33)$$

Применив к выражению (32) обратное преобразование Лапласа, получим переходную характеристику по возмущению:

$$\varphi_5(t) = \frac{M_{\text{НОМ}}}{A} e^{-bt} \left( \cos K_1 t + \frac{b}{K_1} \sin K_1 t \right). \quad (34)$$

Продифференцировав выражение (34) дважды по времени, находим переходную характеристику для ускорения выходного вала:

$$\omega_5 = \dot{\varphi}_5 = -\frac{M_{\text{НОМ}}}{J_3 K_1} e^{-bt} \sin K_1 t; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_5 &= \ddot{\varphi}_5 = \\ &= -\frac{M_{\text{НОМ}}}{J_3 K_1} e^{-bt} (K_1 \cos K_1 t - b \sin K_1 t). \end{aligned} \quad (36)$$

Подставив значение параметров привода, получим

$$\varepsilon_5 = -0,12e^{-2,2t} (59,8 \cos 59,8t - 2,2 \sin 59,8t). \quad (37)$$

На рисунке 5 представлен переходный процесс, построенный по формуле (37).

### Выводы

1. В рассмотренных режимах работы привод с ВЗП достаточно хорошо описывается линеаризованной динамической моделью.

2. Результаты моделирования процесса движения нелинейной модели привода при гармоническом внешнем возмущении показали [4], что величина нелинейных искажений в движении выходного вала не превышает 10%, что

$$\varepsilon(t) = -0,12 \exp(-2,2t) (59,8 \cos(59,8t) - 2,2 \sin(59,8t))$$

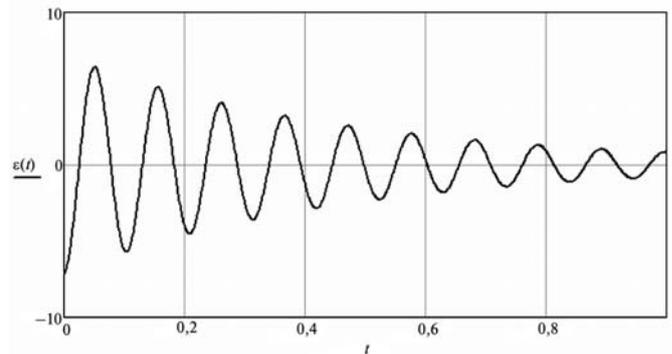


Рис. 5. Переходный процесс при подаче возмущающего воздействия

свидетельствует о незначительном влиянии нелинейностей на динамические свойства рассматриваемого привода.

3. С достаточной для практики точностью в системах автоматического управления привод с ВЗП, имеющей генератор волн внешнего деформирования, можно рассматривать как линейную систему.

### Литература

1. Кузенков В.В., Тимофеев Г.А. Динамика следящего привода с волновой зубчатой передачей // Известия вузов. Машиностроение. 2012. № 3. С. 30–34.
2. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960. 792 с.
3. Следящие приводы / Под ред. Б.К. Чемоданова. В 3 т. Т. 1: Теория и проектирование следящих приводов; Е.С. Блейз, А.В. Зимин, Е.С. Иванов и др. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 904 с.
4. Кузенков В.В., Тимофеев Г.А. Моделирование динамики привода с волновой зубчатой передачей // Известия вузов. Машиностроение. 2012 № 5. С. 17–22.

Статья поступила в редакцию 02.05.2012