



СОРОКИНА

Анастасия Германовна
старший преподаватель
кафедры «Прикладная
механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
e-mail:
sangerm25@gmail.com

Расчет упругой характеристики ленточной пружины (геликоидально симметричной оболочки открытого профиля) при больших перемещениях на основе теории чистого изгиба

А.Г. Сорокина

Рассмотрена методика исследования деформированного состояния ленточной пружины, основанная на предположении о чистом изгибании срединной поверхности пружины (геликоидальной оболочки). Параметры, определяющие деформированную геометрию оболочки, найдены прямой минимизацией полного потенциала оболочки. Для удобства записи энергии деформаций предварительно был выполнен переход в ортогональную систему гауссовых координат. Приведен пример построения упругой характеристики конической ленточной пружины с прямолинейным контуром.

Ключевые слова: ленточная пружина, чистое изгибание, большие перемещения, минимизация потенциала.

Calculation of tape spring elastic characteristic (helical symmetric shell of open profile) at large displacements based on pure bending theory

A.G. Sorokina

The article describes a method for investigation of the tape spring deformed state, based on the assumption of pure bending of the spring middle surface (helical shell). The parameters defining the deformed shell geometry were found from direct minimization of the shell potential. For convenience of the deformation energy recording the transition to Gaussian orthogonal system of coordinates has been previously made. An example of the elastic characteristics construction for a conical tape spring strip with a straight path is presented.

Keywords: tape spring, pure bending, large displacements, minimization of potential.

Ленточные пружины, применяемые в машиностроении в качестве упругих элементов [1–5], являются, по сути, геликоидально симметричными оболочками (ГСО) открытого профиля (рис. 1).

Вследствие характерных для пружин больших перемещений необходимо учитывать геометрическую нелинейность, а геликоидальная (винтовая) симметрия описывается уравнениями практически такой же сложности, как в общей теории оболочек. Именно поэтому теория ленточных пружин произвольного профиля практически не разработана.

В статье [6] предложена методика построения деформированной срединной поверхности ГСО, основанная на предположении о чистом изгибании срединной поверхности. Удалось показать, что форма деформированной поверхности ГСО определяется геометрией образующего контура исходного состояния $\mathbf{a}(\alpha)$ и всего двумя параметрами — деформацией оси ε и круткой ω^+ . Радиус-векторы исходной и деформированной срединных поверхностей определяются следующими соотношениями [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\alpha, z) &= \mathbf{k}z + [\mathbf{L}(\omega z)]\mathbf{a}(\alpha); \\ \mathbf{r}^+(\alpha, z) &= \mathbf{k}(1 + \varepsilon)z + [\mathbf{L}(\omega^+ z)]\mathbf{a}^+(\alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{k} — орт оси z ; $\omega = 2\pi/T$ — крутка винтовой поверхности в исходном состоянии; T — шаг винтовой поверхности; $[\mathbf{L}(\omega z)]$ — матрица поворота вокруг оси z на угол ωz ; $\mathbf{a}(\alpha)$ — радиус-вектор образующего контура; α — гауссова координата контура; индексом «+» отмечены величины в деформированном состоянии; ε — осевая деформация всей оболочки в целом.

Поверхность на рис. 1 построена при следующих значениях геометрических параметров:

$$\mathbf{a}(\alpha) = \begin{pmatrix} R + \alpha b \\ 0 \\ -\alpha b \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 3, \\ R = 2b, \\ T = 5b. \end{cases} \quad (2)$$

где b — характерный размер, м.

Исходным контуром поверхности на рис. 1 является отрезок прямой, лежащей в плоскости xOz . Все представленные расчеты выполнены для формы пружины, заданной соотношениями (2).

Методика, предложенная в работе [6], не требует ортогональности исходного контура

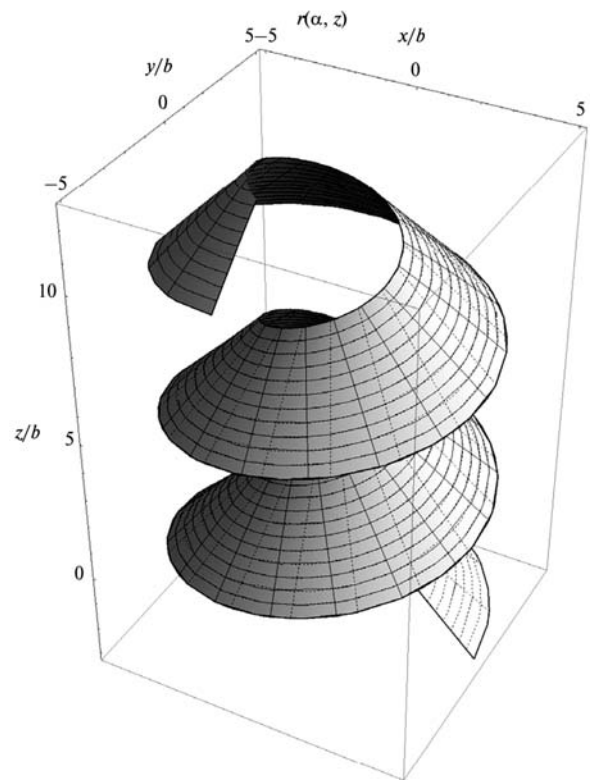


Рис. 1. Срединная поверхность ленточной пружины с нанесенными линиями исходного контура (штриховые линии) и нормального контура (сплошные линии, перпендикулярные к винтовым линиям)

к винтовым линиям. Контур может пересекать винтовые линии под любыми углами, отличными от нулевого. Это создает неудобства, так как вариационный метод, применяемый в данной статье, предполагает вычисление потенциальной энергии деформаций оболочки, формулы для которой записываются обычно в ортогональных гауссовых координатах.

Ортогональная система гауссовых координат восстанавливается на геликоидальной поверхности сравнительно просто. Линию, лежащую на геликоидальной поверхности и перпендикулярную винтовым линиям, назовем *нормальным контуром* (см. рис. 1). Если первое семейство координатных линий совпадает с линиями исходного контура, а вторым семейством координатных линий являются винтовые линии, то орт \mathbf{t} , касательный к нормальному контуру, расположен как показано на рис. 2.

Поскольку элемент нормального контура принадлежит поверхности, то

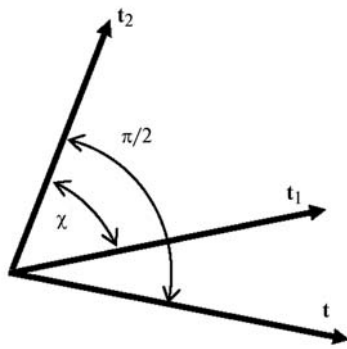


Рис. 2. Расположение орта t , касательного к нормальному контуру, по отношению к естественным ортам: t_1 — орт касательной к исходному контуру, t_2 — орт касательной к винтовой линии

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} A d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} B dz$$

или

$$t ds = t_1 A d\alpha + t_2 B dz, \tag{3}$$

где A, B — параметры Ламе; s — дуга нормального контура.

Проекция равенства (3) на орт t_2 описывается дифференциальным уравнением, связывающим приращения координаты λ и z при движении по нормальному контуру:

$$\frac{dz}{d\alpha} = - \frac{A \cos \chi}{B}. \tag{4}$$

Здесь χ — угол между координатными линиями (см. рис. 2).

В уравнении (4) производные обыкновенные, а не частные, так как ни один из параметров в правой части не меняется при движении по винтовым линиям. Таким образом, построение нормального контура свелось к вычислению квадратуры

$$z^*(\alpha) = z_0^* - \int_0^\alpha \frac{A \cos \chi}{B} d\alpha, \tag{5}$$

где z_0^* — постоянная интегрирования, изменение которой смещает и поворачивает винтовую поверхность как жесткое целое.

Из формул (1)–(4) следует, что нормальный контур может быть задан соотношением

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^*(\alpha) &= \mathbf{r}(\alpha, z) \Big|_{z=z^*(\alpha)} = \\ &= \mathbf{k} z^*(\alpha) + [\mathbf{L}(\omega z^*(\alpha))] \mathbf{a}(\alpha), \end{aligned} \tag{6}$$

где индексом «*» обозначен нормальный контур.

В некоторых случаях квадратуру (5) удается вычислить аналитически. В частности для поверхности, заданной соотношениями (2), нормальный контур определяется следующими формулами:

$$\mathbf{a}^*(\alpha) = b \begin{pmatrix} \frac{5(2+\alpha)}{\sqrt{25+4\pi^2(2+\alpha)^2}} \\ \frac{2\pi(2+\alpha)^2}{\sqrt{25+4\pi^2(2+\alpha)^2}} \\ -\alpha + \frac{5}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi + (2+\alpha)}{5} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В общем случае нормальный контур находится численным интегрированием. После вычисления нормального контура его можно использовать в качестве исходного, т. е. вместо соотношений (1) исходная и деформированная срединная поверхность ГСО может быть задана соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^*(\alpha, z) &= \mathbf{k} z + [\mathbf{L}(\omega z)] \mathbf{a}^*(\alpha); \\ \mathbf{r}^{*+}(\alpha, z) &= \mathbf{k}(1+\varepsilon)z + [\mathbf{L}(\omega^+ z)] \mathbf{a}^{*+}(\alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

где индексом «*» отмечено то, что образующий контур является нормальным контуром. При этом получается та же самая геликоидальная поверхность (см. рис. 1). Нормальные контуры показаны на рис. 1 сплошными линиями, перпендикулярными винтовым линиям. Один из этих контуров построен по формулам (7), а остальные получены винтовым движением этого же контура. Винтовые линии и нормальные контуры образуют на геликоидальной поверхности ортогональную координатную сетку (нормальные координаты).

Нормаль к поверхности определялась через векторное произведение касательных ортов, при этом учитывалась ортогональность новой координатной сетки, т. е. то, что $\chi^* = 0$:

$$\mathbf{n}^* = \begin{pmatrix} n_x^* \\ n_y^* \\ n_z^* \end{pmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{A^* \partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{r}^*}{B^* \partial z} = \frac{1}{A^* B^*} \begin{pmatrix} \frac{\partial r_y^*}{\partial \alpha} \frac{\partial r_z^*}{\partial z} - \frac{\partial r_z^*}{\partial \alpha} \frac{\partial r_y^*}{\partial z} \\ \frac{\partial r_z^*}{\partial \alpha} \frac{\partial r_x^*}{\partial z} - \frac{\partial r_x^*}{\partial \alpha} \frac{\partial r_z^*}{\partial z} \\ \frac{\partial r_x^*}{\partial \alpha} \frac{\partial r_y^*}{\partial z} - \frac{\partial r_y^*}{\partial \alpha} \frac{\partial r_x^*}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Кривизны и кручение срединной поверхности оболочки рассчитывались по обычным формулам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1^*} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{r}^*}{(A^*)^2 \partial \alpha^2} \mathbf{n}^* = \\ &= -\frac{1}{(A^*)^2} \left(\frac{\partial^2 r_x^*}{\partial \alpha^2} n_x^* + \frac{\partial^2 r_y^*}{\partial \alpha^2} n_y^* + \frac{\partial^2 r_z^*}{\partial \alpha^2} n_z^* \right); \\ \frac{1}{R_2^*} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{(B^*)^2 \partial z^2} \mathbf{n} = \\ &= -\frac{1}{(B^*)^2} \left(\frac{\partial^2 r_x^*}{\partial z^2} n_x^* + \frac{\partial^2 r_y^*}{\partial z^2} n_y^* + \frac{\partial^2 r_z^*}{\partial z^2} n_z^* \right); \\ \frac{1}{R_{12}^*} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{A^* B^* \partial \alpha \partial z} \mathbf{n}^* = \\ &= \frac{1}{A^* B^*} \left(\frac{\partial^2 r_x^*}{\partial \alpha \partial z} n_x^* + \frac{\partial^2 r_y^*}{\partial \alpha \partial z} n_y^* + \frac{\partial^2 r_z^*}{\partial \alpha \partial z} n_z^* \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Хотя и радиус-вектор \mathbf{r}^* , и нормаль \mathbf{n}^* зависят от винтовой координаты z , кривизны и кручение от координаты z не зависят, что является следствием геликоидальной симметрии. Вычисление кривизны и кручения сводилось к последовательным подстановкам, с помощью компьютерной аналитики выполнялось довольно просто, причем формулы получились вполне обозримыми.

В качестве примера ниже приведен график кручения поверхности (рис. 3), построенный по формулам (7)–(10), и соответствующее ему аналитическое выражение.

Контур деформированной срединной поверхности $\mathbf{a}^{*+}(\alpha)$ в зависимости от значения ε и ω^+ и в предположении о чистом изгибании

поверхности находился по методике, предложенной в работе [6]. Указанный контур вместе с параметрами ε и ω^+ согласно соотношениям (8) полностью определяет радиус-вектор деформированной поверхности $\mathbf{r}^{*+}(\alpha, z)$. Подстановка найденного $\mathbf{r}^{*+}(\alpha, z)$ в формулы (9), (10) вместо радиус-вектора исходного состояния $\mathbf{r}^*(\alpha, z)$ дает кривизны и кручение деформированной поверхности. Через кривизну и кручение исходного и деформированного состояния находились компоненты приращений кривизны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1^{*+}} - \frac{1}{R_1^*}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R_2^{*+}} - \frac{1}{R_2^*}; \\ \varepsilon_{12} &= -\left(\frac{1}{R_{12}^{*+}} - \frac{1}{R_{12}^*} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (11) не содержат деформаций и сдвигов, так как срединная поверхность была принята нерастяжимой.

Потенциальная энергия деформаций в одном витке ленточной пружины вычислялась по классической формуле

$$\begin{aligned} U &= \frac{T}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} D \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \mu)(\varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \right\} A^* B^* d\alpha, \end{aligned} \quad (12)$$

где D — цилиндрическая жесткость; μ — коэффициент Пуассона. Интегрирование по z в формуле (12) заменено умножением на период T .

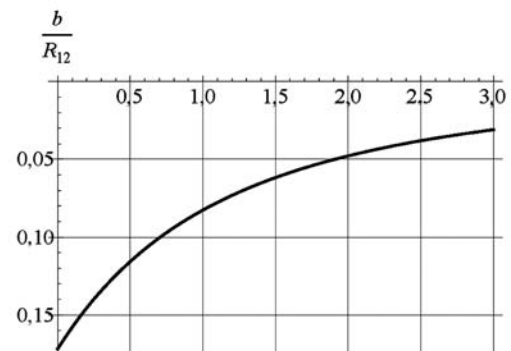


Рис. 3. Кручение поверхности, изображенной на рис. 1, в нормальных координатах:

$$\frac{1}{R_{12}^*}(\alpha) = -\frac{10\pi}{b(25 + 4\pi^2(2 + \alpha)^2)}$$

Потенциал внешних сил для практически важного случая растяжения вдоль оси z и кручения вокруг оси z рассчитывался по формуле

$$V = -P\varepsilon T - M(\omega^+ - \omega)T, \quad (13)$$

где P — осевая сила; M — крутящий момент.

Согласно принципу Лагранжа, полный потенциал системы в положении равновесия минимален

$$\Pi = U + V \rightarrow \min. \quad (14)$$

Из формулы (14) следует система нелинейных алгебраических уравнений для определения ω^+ и ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{T \partial \varepsilon} = P; \\ \frac{\partial U}{T \partial \omega^+} = M. \end{cases} \quad (15)$$

Наличие удобных процедур минимизации делает построение и решение системы (15) излишним, так как значения ω^+ и ε при наличии таких процедур могут быть найдены непосредственно из принципа Лагранжа. Для прямой минимизации полного потенциала пружины, рассматриваемого как функция двух переменных $\Pi(\varepsilon, \omega^+)$, применялась процедура FindMinimum из пакета Mathematica. Вычисления при этом сводились к последовательному заданию различных значений нагрузок P , M и считыванию результатов минимизации потенциала $\Pi(\varepsilon, \omega^+)$, выводимых функцией FindMinimum. При построении упругой характеристики пружины крутящий момент задавался равным нулю ($M = 0$). Результаты расчета представлены на рис. 4, 5.

Следует отметить, что при увеличении силы P крутка сначала уменьшается, а затем увеличи-

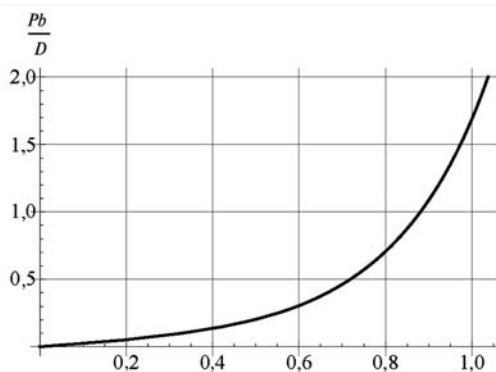


Рис. 4. Упругая характеристика ленточной пружины

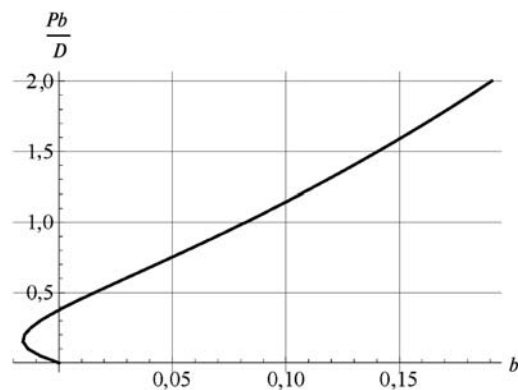


Рис. 5. Зависимость приращения крутки ($\Delta\omega = \omega^+ - \omega$) от осевой силы

вается. Это означает, что при растяжении пружина сначала незначительно раскручивается, а только потом начинает закручиваться. Очевидно, что такое поведение пружины является следствием геометрической нелинейности.

Выводы

1. Предложена методика построения упругой характеристики ленточной пружины, основанная на прямой минимизации полного потенциала пружины.
2. Показано, что использование нормального контура, т. е. контура перпендикулярного винтовым линиям, позволяет использовать классическое выражение для энергии изгиба оболочки в ортогональных гауссовых координатах.
3. Представлен пример расчета упругой характеристики и зависимости крутки от осевой силы для конической ленточной пружины с прямолинейным исходным контуром.

Литература

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
2. Пономарев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. 326 с.
3. Александрова А.Т. Новые способы передачи и формирования движения в вакууме. М.: Высшая школа, 1979. 69 с.
4. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
5. Бидерман В.Л., Шитиков В.Н. Растяжение и кручение ленточных цилиндрических пружин при больших перемещениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 1. С. 137—141.
6. Сорокина А.Г. Расчет формы деформированной срединной поверхности геликоидально симметричной оболочки открытого профиля при больших перемещениях на основе теории чистого изгиба // Известия вузов. Машиностроение. 2011. № 11. С. 8—13.

Статья поступила в редакцию 05.05.2012