УДК 62—233.3/9

Синтез приближенного внутреннего зацепления типа эвольвента — перициклоида

И.А. Казаков

КАЗАКОВ
Игорь Андреевич
аспирант
кафедры «Технология машиностроения»
(Ижевский государственный технический университет;
e-mail:
i.a.kazakov@gmail.com)

Рассмотрена геометрия неэвольвентного профиля зуба-перемычки, образованного нестандартным долбяком с внутренними зубьями. Приведены уравнения синтеза приближенного внутреннего зацепления типа эвольвента — перициклоида.

Ключевые слова: планетарная передача, приближенное зацепление, укороченная перициклоида, нестандартный долбяк, синтез зацепления.

Synthesis of approximate internal cogging of involute type — pericycloid

I.A. Kazakov

The geometry of a non-involute cog-crosspiece profile formed by a non-standard pinion cutter with internal tooth is considered. The equations of synthesis for the approximate internal gearing of an involute type — pericycloid are presented.

Keywords: planet gear, approximate cogging, truncated pericycloid, non-standard pinion cutter, cogging synthesis.

Планетарные передачи типа 3К (передачи, основными звеньями которых являются три центральных колеса) обладают большим передаточным отношением в одной ступени. Однако наличие сложного в изготовлении водила и большого числа подшипников сателлитов сдерживает широкое их применение в технике. Безводильные конструкции указанных передач лишены этих недостатков [1]. На рисунке 1 представлена одна из таких передач, в которой неподвижное колесо выполнено двухвенцовым, тихоходное — в виде барабана с зубьями-перемычками, сателлиты расположены в два ряда, а числа зубьев центральных колес подобраны так, что фазы их зацеплений с сателлитами в одном ряду отличаются на 0,5 шага от фазы зацеплений в другом ряду. Это позволяет обеспечить непрерывность передачи движения от быстроходного вала к тихоходному при коэффициенте перекрытия в зацеплении сателлита g с неподвижным колесом b $\varepsilon_{gb} \geq 0{,}5$, с тихоходным e — $\varepsilon_{ge} = 1$. При этом нагрузку несут поочередно то один, то другой ряд сателлитов.

Безводильные планетарные передачи типа 3К обладают хорошими массо-габаритными показателями, КПД передач составляет около 0,8; преимущественная область применения — тихоходные приводы (например лебедка).

В зависимости от применяемого режущего инструмента и способа формообразования профили зубьев-перемычек такой передачи могут

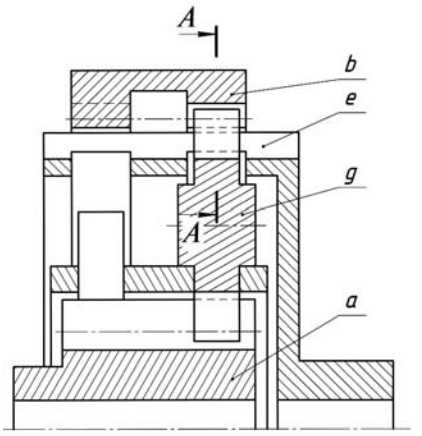

Рис. 1. Коаксиальная безводильная планетарная передача типа 3К с двухрядным расположением сателлитов

быть очерчены по удлиненной эвольвенте (используется нестандартная червячная фреза или рейка с близким к нулю углом профиля исходного контура), эпитрохоиде (нестандартный долбяк) или прямой (набор из дисковых фрез) [2]. Однако зубья-перемычки с такими очертаниями профилей не всегда удовлетворяют требованиям кинематической точности и изгибной прочности из-за большого отклонения их от обычной эвольвенты и большой глубины врезания нестандартного инструмента в заготовку колеса.

Решить данную проблему можно, используя другой способ профилирования зубьев-перемычек — зубодолбление нестандартным долбяком с внутренними зубьями (рис. 2). В этом случае кривой, очерчивающей профиль зуба-перемычки, является укороченная перициклоида или эквидистанта к ней. Данную линию описывает точка, взятая внутри производящей окружности радиуса $\tilde{r}_0$, перекатываемой без скольжения по неподвижной направляющей окружности радиуса $\tilde{r}$ при внутреннем касании, причем $\tilde{r}_0 > \tilde{r}$.

Уравнение укороченной перициклоиды представим в параметрическом виде, приняв в качестве параметра длину перпендикуляра I_y, опущенного из центра концентрической окружности нестандартного колеса *e* на профильную нормаль.

Тогда текущие значения модуля радиус-вектора r_{ye} и полярного угла Θ_{ye} точки кривой профиля зуба-перемычки могут быть найдены из следующих уравнений (рис. 3):

$$r_{ye}\left(I_y\right) = \left\{I_y^2 + \left[\left(\tilde{\rho}_0 + (U_0 - 1)\sqrt{\tilde{r}^{\,2} - I_y^2}\right.\right.\right. -$$
$$\left.\left.\left. - \left(U_0\sqrt{\left(\tilde{r} - \tilde{h}_0 / U_0\right)^2 - I_y^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}; \tag{1}$$

$$\Theta_{ye}\left(I_y\right) = \arccos\frac{I_y}{r_{ye}\left(I_y\right)} -$$
$$-\left(U_0 - 1\right)\arccos\frac{I_y}{\tilde{r}} + U_0\arccos\frac{I_y}{\tilde{r} - \tilde{h}_0 / U_0}, \tag{2}$$

где $\tilde{r}$ — радиус начальной окружности нестандартного колеса в станочном зацеплении; $\tilde{\rho}_0$ — радиус кривизны линии притупления продольной кромки зуба долбяка; $\tilde{h}_0$ — расстояние от центра кривизны линии притупления продоль-

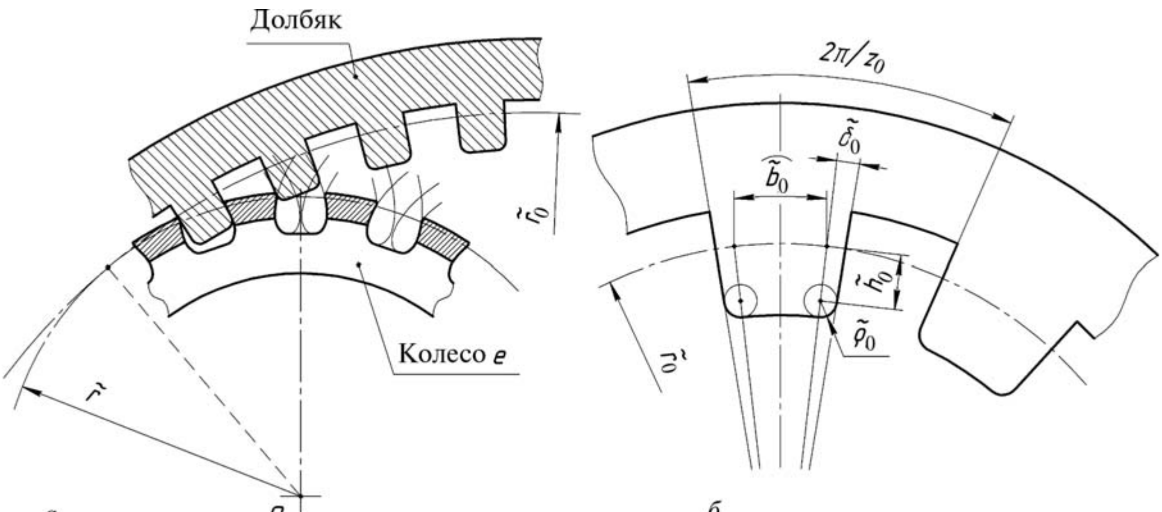

Рис. 2. Формирование зубьев-перемычек колеса (*а*) и профиль зубьев долбяка (*б*)

ной кромки зуба долбяка до его начальной окружности в станочном зацеплении; U_0 — передаточное число станочного зацепления, $U_0 = \tilde{r}_0 / \tilde{r} = z_0 / z_e > 1$; $\tilde{r}_0$ — радиус начальной окружности долбяка в станочном зацеплении; z_0, z_e — числа зубьев долбяка и нестандартного колеса; I_y — длина перпендикуляра, опущенного из центра концентрической окружности нестандартного колеса *e* на профильную нормаль в произвольной точке профиля зуба-перемычки; r_{ye} — текущее значение модуля радиус-вектора точки кривой профиля зуба-перемычки; Θ_{ye} — текущее значение полярного угла точки кривой профиля зуба-перемычки.

Как следует из выражений (1), (2), вид перициклоиды определяется параметрами $\tilde{r}$, $\tilde{h}_0$, $\tilde{\rho}_0$ и U_0, варьирование которых позволяет приближать профиль зубьев-перемычек к эвольвентному.

При отсутствии притупления кромки зуба долбяка ($\tilde{\rho}_0 = 0$) уравнения (1), (2) определяют укороченную перициклоиду, в противном случае — наружную эквидистанту к ней. Величину $\tilde{\rho}_0$ рекомендуется принимать равной примерно $0{,}25m$ (m — модуль эвольвентных зубьев), так как при увеличении его возрастает глубина врезания инструмента в заготовку колеса, что ведет к снижению изгибной прочности зуба-перемычки, а при уменьшении снижается стойкость инструмента [3]. Притупление кромки зуба долбяка можно осуществить непосредственно при изготовлении самого инструмента на долбежном станке специальным фасонным резцом, который будет формировать впадину между зубьями и линию притупления.

Граничная точка l профиля зуба-перемычки является точкой пересечения укороченной перициклоиды и огибающей прямой бокового профиля зуба долбяка. Примем боковой профиль зуба долбяка в виде отрезка прямой, проведенной из центра концентрической окружности этого инструмента касательно к окружности притупления продольной кромки зуба (см. рис. 2, *б*).

Положение граничной точки l зависит от передаточного числа U_0. При $U_0 > 2$ модуль радиус-вектора и полярный угол данной точки определяют из следующих уравнений (см. рис. 3, *а*):

$$r_{le}(\psi_l^*) = \tilde{r}\sqrt{(U_0 - 1)^2 + U_0(2 - U_0)\cos^2(\psi_l^* - \tilde{\delta}_0)}; \quad (3)$$

$$\Theta_{le}(\psi_l^*) = \psi_l^*(U_0 - 1) - \arccos\frac{\tilde{r}\cos(\psi_l^* - \tilde{\delta}_0)}{r_{le}(\psi_l^*)} + \tilde{\delta}_0, \quad (4)$$

где $\tilde{\delta}_0$ — угол между прямой бокового профиля зуба долбяка и прямой, проведенной из центра концентрической окружности этого инструмента в центр кривизны линии притупления продольной кромки зуба,

$$\tilde{\delta}_0 = \arcsin\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{r}U_0 - \tilde{h}_0}.$$

Используя уравнения (1), (2) и выражая угол ψ_l^* через параметры, входящие в уравнение (3), можно, при равенстве $r_{le}(\psi_l^*) = r_{ye}(I_y)$, перейти к одному уравнению $\Theta_{le}(\psi_l^*) = \Theta_{ye}(I_y)$, из которого находим значение I_{le}, соответствующее граничной точке профиля зуба-перемычки.

При $U_0 > 2$ граничная точка l находится выше начальной окружности $\tilde{r}$ колеса. При $U_0 = 2$ точка l лежит на самой окружности $\tilde{r}$:

$$r_{le} = \tilde{r};\ \Theta_{le} = 2\tilde{\delta}_0;\ I_{le} = \sqrt{\left(\tilde{r}U_0 - \tilde{h}_0\right)^2 - \tilde{\rho}_0^2} / U_0. \quad (5)$$

При $U_0 < 2$ происходит срезание верхней части профиля укороченной перициклоиды той же кромкой зуба долбяка, которая при дальнейшем углублении в заготовку колеса формирует рабочий профиль, и точка l лежит ниже окружности $\tilde{r}$.

Синтез приближенного зацепления передачи целесообразно осуществлять из условия совпадения граничных точек однопарного зацепления с граничными точками профилей зубьев сателлита и колеса, что позволяет получить минимальную высоту (максимальную изгибную прочность) зуба-перемычки колеса и достичь того, чтобы верхний наиболее близкий по очертаниям к эвольвенте участок профиля являлся активным [3].

Рассмотрим приближенное зацепление (рис. 3, *б*) сателлита *g* с нестандартным колесом *e*, задавшись углом зацепления α_{we} в точке контакта, соответствующей среднему значению передаточного отношения.

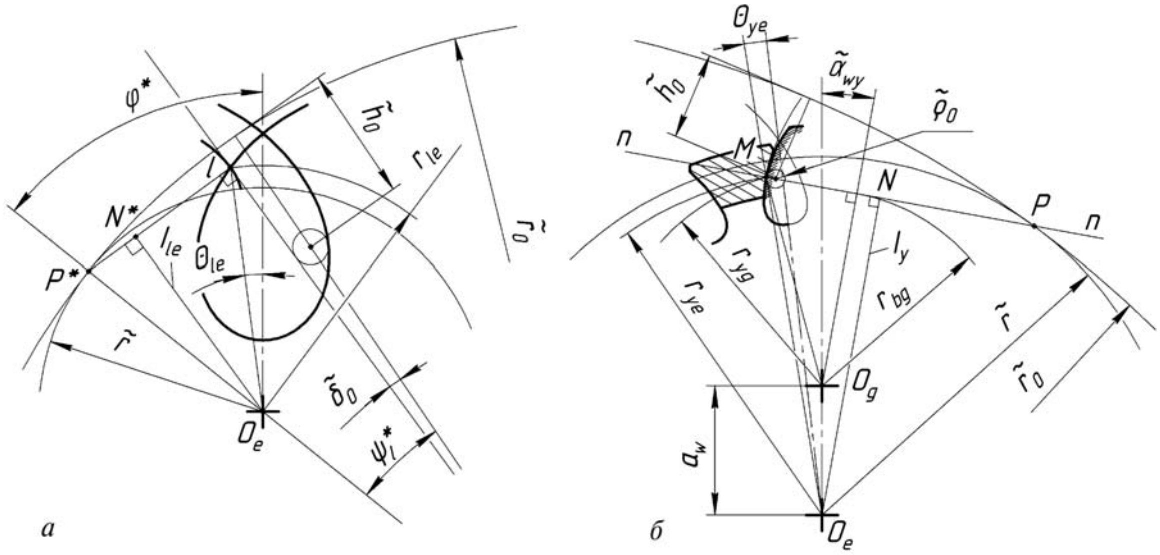

Рис. 3. Очертания профиля зуба-перемычки (*а*) и схема приближенного зацепления типа эвольвента-укороченная перициклоида (*б*)

Условие некромочного контакта эвольвентного профиля зуба сателлита с профилем зуба-перемычки имеет вид

$$\sqrt{r_{ye}^2 - I_y^2} = \sqrt{r_{yg}^2 - r_{bg}^2} + a_w \sin\tilde{\alpha}_{wy};$$
$$I_y = r_{bg} + a_w \cos\tilde{\alpha}_{wy},$$

где a_w — межосевое расстояние зубчатой пары; r_{bg} — радиус основной окружности сателлита.

Условия синтеза приближенного зацепления:

1) контакт в нижней граничной точке d зацепления, совпадающей с граничной точкой профиля зуба сателлита:

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{r_{lg}^2 - r_{bg}^2} = \tilde{\rho}_0 + (U_0 - 1)\sqrt{\tilde{r}^2 - I_d^2} - \\ &-U_0\sqrt{\left(\tilde{r} - {}^{\tilde{h}_0}/_{U_0}\right)^2 - I_d^2} - a_w \sin\tilde{\alpha}_{wd}, \\ &I_d = r_{bg} + a_w \cos\tilde{\alpha}_{wd}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Здесь r_{lg} — радиус окружности граничных точек профиля зуба сателлита,

$$r_{lg} = \frac{mz_g \cos\alpha}{2\cos\alpha_{lg}};$$

α_{lg} — угол профиля в граничной точке, определяемый при нарезании сателлита инструментом реечного типа,

$$\alpha_{lg} = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\alpha - \frac{4(h_a^* - x_g)}{z_g \sin 2\alpha}\right),$$

где h_a^* — коэффициент высоты головки зуба; x_g — коэффициент смещения исходного контура сателлита;

2) контакт в верхней граничной точке u зацепления, совпадающей с граничной точкой профиля зуба-перемычки:

$$\left.\begin{aligned} &\arccos\frac{I_u}{r_{ue}(I_u)} - (U_0 - 1)\arccos\frac{I_u}{\tilde{r}} + \\ &+U_0 \arccos\frac{I_u}{\tilde{r} - \tilde{h}_0/U_0} = \psi_l^*(U_0 - 1) - \\ &-\arccos\frac{\tilde{r}\cos\left(\psi_l^* - \tilde{\delta}_0\right)}{r_{ue}(I_u)} + \arcsin\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{r}U_0 - \tilde{h}_0}, \\ &\psi_l^* = \arccos\sqrt{\frac{1}{U_0(2 - U_0)}\left[\left(\frac{r_{ue}(I_u)}{\tilde{r}}\right)^2 - (U_0 - 1)^2\right]} + \\ &+\arcsin\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{r}U_0 - \tilde{h}_0}, \\ &r_{ue}(I_u) = \sqrt{I_u^2 + \left(\tilde{\rho}_0 + (U_0 - 1)\sqrt{\tilde{r}^2 - I_u^2} - \right.} \\ &\sqrt{\left. -U_0\sqrt{\left(\tilde{r} - \tilde{h}_0/U_0\right)^2 - I_u^2}\right)^2}, \\ &I_u = r_{bg} + a_w \cos\tilde{\alpha}_{wu}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Данные уравнения справедливы при $U_0 > 2$. Для случая $U_0 \le 2$ система уравнений (7) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} I_u &= \sqrt{\left(\tilde{r} U_0 - \tilde{h}_0\right)^2 - \tilde{\rho}_0^2} \,/\, U_0, \\ I_u &= r_{bg} + a_w \cos\tilde{\alpha}_{wu}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

3) равенство коэффициента перекрытия единице: повороту сателлита на величину углового шага его зубьев соответствует поворот колеса на величину углового шага зубьев последнего, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{z_g} &= \tilde{\alpha}_{wd} - \tilde{\alpha}_{wu} + \\ &+ \frac{1}{r_{bg}}\Bigg[(U_0 - 1)\left(\sqrt{\tilde{r}^2 - I_u^2} - \sqrt{\tilde{r}^2 - I_d^2}\right) - \\ &- U_0\left(\begin{aligned} &\sqrt{\left(\tilde{r} - \tilde{h}_0/U_0\right)^2 - I_u^2} - \\ &- \sqrt{\left(\tilde{r} - \tilde{h}_0/U_0\right)^2 - I_d^2} \end{aligned}\right) + \\ &+ a_w\left(\sin\tilde{\alpha}_{wd} - \sin\tilde{\alpha}_{wu}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{z_e} &= \tilde{\alpha}_{wd} - \tilde{\alpha}_{wu} + (U_0 - 1)\times \\ &\times\left(\arccos\frac{I_u}{\tilde{r}} - \arccos\frac{I_d}{\tilde{r}}\right) + \\ &+ U_0\left(\arccos\frac{I_d}{\tilde{r} - \tilde{h}_0/U_0} - \arccos\frac{I_u}{\tilde{r} - \tilde{h}_0/U_0}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, получены четыре уравнения (6), (7), (9), (10) с неизвестными $\tilde{r}$, $\tilde{h}_0$, $\tilde{\alpha}_{wu}$, $\tilde{\alpha}_{wd}$. Радиус $\tilde{r}$ можно выразить через нестандартный модуль: $\tilde{r} = 0{,}5\tilde{m}z_e$.

На рисунках 4, 5 представлены графики зависимостей $\tilde{h}_0/\tilde{h}_0$ и $\tilde{m}/m$ от числа зубьев колеса z_e и угла теоретически точного зацепления α_{we}, построенные для планетарной передачи 3К при числе зубьев солнечной шестерни $z_a = 9$. Коэффициент смещения исходного контура сателлита при $z_g \le 17$ принимался из условия отсутствия подрезания, а при $z_g > 17$ равным нулю. Число зубьев сателлита $z_g = 0{,}5\left(z_e - z_a\right) - \Delta$, где $\Delta = 0{,}5$ при нечетной разности $z_e - z_a$, $\Delta = 1$ — при четной [2]. Передаточное число станочного зацепления $U_0 = 2$. Радиус кривизны линии притупления продольной кромки зуба долбяка $\tilde{\rho}_0 = 0{,}25m$.

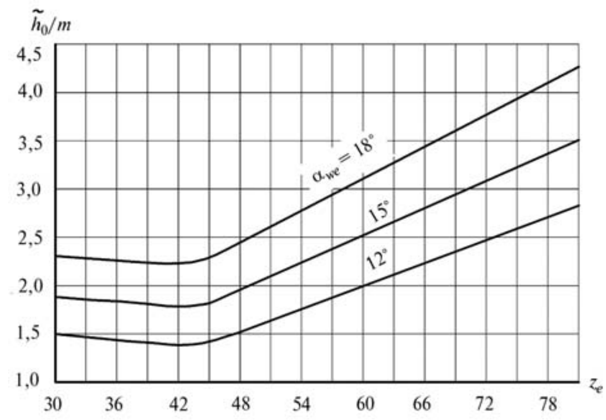

Рис. 4. Зависимость параметра $\tilde{h}_0$ от числа зубьев-перемычек колеса и угла теоретически точного зацепления

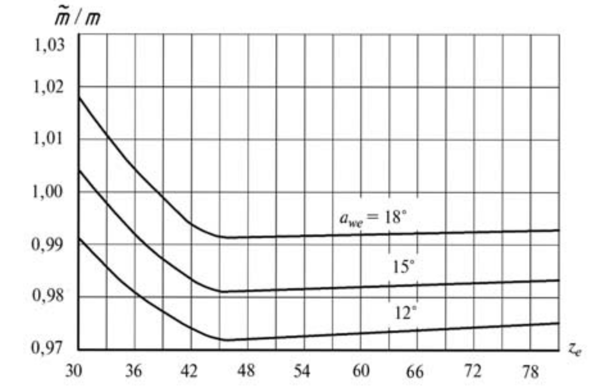

Рис. 5. Зависимость нестандартного модуля $\tilde{m}$ от числа зубьев-перемычек колеса и угла теоретически точного зацепления

Приведенные графики позволяют определить рациональные значения параметров приближенного внутреннего зацепления и нестандартного долбяка.

Литература

1. *Плеханов Ф.И.* Исследование влияния параметров приближенного зацепления на распределение нагрузки по длине зубьев колес // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 1. С. 11—13.

2. *Плеханов Ф.И.* Зубчатые планетарные передачи. Типы, основы кинематики, геометрии и расчета на прочность. Ижевск: Удмуртия, 2003. 200 с.

3. *Плеханов Ф.И.* Теоретические основы проектирования и принципы конструирования нетрадиционных планетарных передач типа 3К: Автореф. дис. ... д-ра. техн. наук / ИжГТУ. Ижевск, 1996. 34 с.

Статья поступила в редакцию 02.04.2012