

УДК 621.833.6

## Синтез плоских зацеплений по относительной скорости точки контакта

**В.П. Прохоров, Г.А. Тимофеев, И.Н. Чернышёва**

*Приведено обоснование актуальности постановки задачи. На базе математической модели плоских зацеплений с постоянным передаточным отношением рассмотрено решение задачи синтеза взаимоогibaемых профилей зубьев колеса и инструментальной рейки по критерию относительной скорости точки контакта. Подробно рассмотрены случаи линейной, постоянной и нулевой скоростей.*

**Ключевые слова:** плоские зацепления, сопряженные профили, точка контакта, алгоритм синтеза, относительная скорость.

## Synthesis of planar linkages by relative velocity of contact point

**V.P. Prokhorov, G.A. Timofeev, I.N. Chernyshova**

*The substantiation of the problem relevance has been carried out. On the basis of a mathematical model of planar linkages with constant gear ratio the solution of the synthesis problem of mutually tooth profiles of the wheel and the rail tool by the relative velocity of the contact point is discussed. The cases of linear, constant and zero velocities have been considered in detail.*

**Keywords:** flat mesh, associated structures, contact point, algorithm synthesis, relative velocity.

Данная работа является естественным продолжением изложенных в публикациях [1–8] общих концепций и методов. Известно, что величина и направление относительной скорости точки контакта по сопряженным профилям зубьев колес существенно влияет на условия образования и устойчивость масляного слоя в контактной зоне [9]. Возможна и другая интерпретация решаемой задачи. При постоянной скорости точка контакта  $M_j$  за равные угловые перемещения колеса проходит по профилю зуба  $F_j$  равные длины дуг, занимая положения 1–5 (рис. 1). Если в такой передаче с гидростатической смазкой каналы (маслопроводы) для подвода смазки в  $M_j$  на  $F_j$  расположить равноудаленными в точках 1–5, то каналы 1'–5' на ступице колеса, через которые поступает смазка от насосной станции и масло-распределителя  $M$ , также можно расположить равномерно по окружности радиуса  $O_1 - I'$ . Это позволяет существенно упростить конструкцию зубчатого колеса и повысить эффективность передачи с гидростатической смазкой и, например, повысить надежность и точность позиционирования привода стола делительного устройства.



**ПРОХОРОВ**  
Василий Петрович  
кандидат технических наук, профессор



**ТИМОФЕЕВ**  
Геннадий Алексеевич  
доктор технических наук, профессор



**ЧЕРНЫШЁВА**  
Ирина Николаевна  
кандидат технических наук, доцент  
кафедры  
«Теория механизмов и машин»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана;  
e-mail: timga@bmstu.ru)

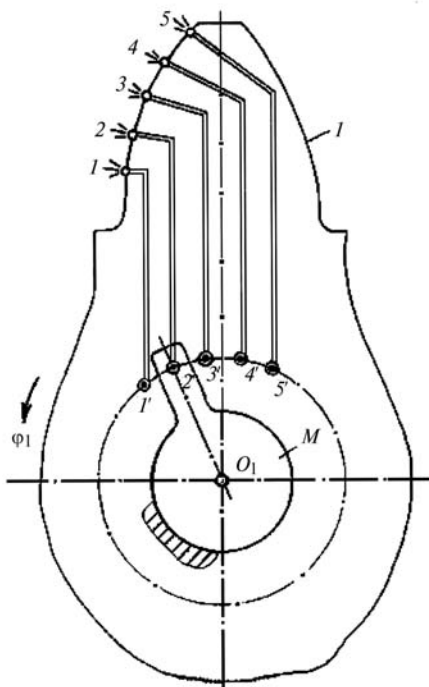


Рис. 1. Зубчатое колесо передачи с гидростатической смазкой и постоянной скоростью контактной точки по профилю зуба

**Математическая модель и алгоритм синтеза**

Математическую модель плоского зацепления с постоянным передаточным отношением представим в следующем виде [1]:

$$v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha + r(\dot{\alpha} - \omega_j); \tag{1}$$

$$\dot{r} + a_j \omega_j \cos \alpha = 0; \tag{2}$$

$$k_j = (\dot{\alpha} - \omega_j) / v_j, \tag{3}$$

где  $j=1, 2$  — индекс колеса;  $v_j$  — скорость точки контакта по профилю зуба;  $a_j$  — радиус центроиды;  $\omega_j$  — угловая скорость;  $\alpha$  — угол зацепления;  $r$  — расстояние от точки контакта до полюса зацепления;  $k_j$  — кривизна профиля зуба, точка над параметром означает его производную по времени  $t$ . Модель (1)–(3) эффективно применялась нами в [10–12] и других работах.

Рассмотрим алгоритм синтеза по заданной относительной скорости точки контакта в виде

$$v_j = F(\varphi_1), \tag{4}$$

где  $\varphi_1 = \omega_1 t$  — угол поворота первого колеса. Тогда уравнения (1), (2) с учетом (4) образуют систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega_j + \frac{a_j \omega_j \sin \alpha + F(\varphi_1)}{r}; \\ \dot{r} = -a_j \omega_j \cos \alpha. \end{cases} \tag{5}$$

Выразив  $r$  из уравнения (1), продифференцировав эту функцию по времени и воспользовавшись формулой (2), получим дифференциальное уравнение 2-го порядка, эквивалентное системе (5):

$$\frac{a_j \omega_j \cos \alpha \dot{\alpha} + \dot{F}(\varphi_1)}{\dot{\alpha} - \omega_j} - \frac{a_j \omega_j \sin \alpha + F(\varphi_1)}{(\dot{\alpha} - \omega_j)^2} \ddot{\alpha} = -a_j \omega_j \cos \alpha. \tag{6}$$

Это уравнение может быть решено относительно функции  $\alpha(t)$  с начальными условиями  $\alpha(0) = \alpha_0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$ . Функцию  $r(t)$  получим интегрированием (2).

Функции  $\alpha(t), r(t)$  определяют «размеченную» линию зацепления в полярных координатах. Переходя стандартным образом к координатным системам колес и рейки, получим соответствующие профили зубьев.

**Частные решения задачи**

Рассмотрим случай, когда скорость задается линейной функцией

$$F(\varphi_1) = b_0 + bt. \tag{7}$$

Определим решения системы (5) с конечной производной  $\dot{\alpha}$  для линий зацепления, проходящих через полюс. Без ограничения общности для линий зацепления можно в качестве начальной точки взять  $r = 0$ . Тогда условие конечности  $\dot{\alpha}$  при  $r = 0$  принимает вид

$$b_0 = -a_j \omega_j \sin \alpha_0.$$

Заметим, что частным случаем линейной функции (7) является скорость в классическом эвольвентном зацеплении ( $\alpha = \text{const}$ ):

$$V_j = -a_j \omega_j \sin \alpha_0 - \omega_j (r_0 - a_j \omega_j \cos \alpha_0 t).$$

Линии для внешнего зацепления с  $a_1 = 50$  мм для функции (7), проходящие через полюс, показаны на рис. 2, а профили зубьев — на рис. 3.

Рассмотрим подробнее случай  $F(\varphi_1) = V_0 = \text{const}$ . При этом дифференциальное уравнение (6) принимает вид

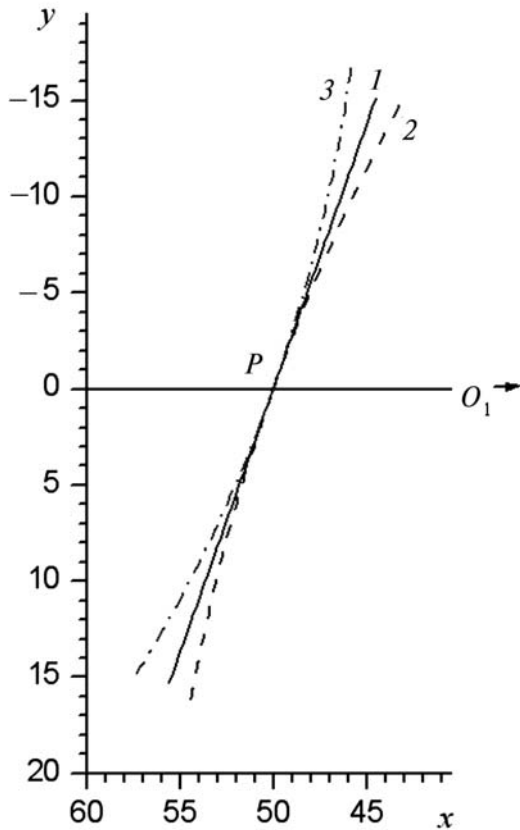


Рис. 2. Линии зацепления для  $V_j = b_0 + bt$ :  
 1 —  $b = 47$  (эвольвентное зацепление); 2 —  $b = 25$ ;  
 3 —  $b = 75$

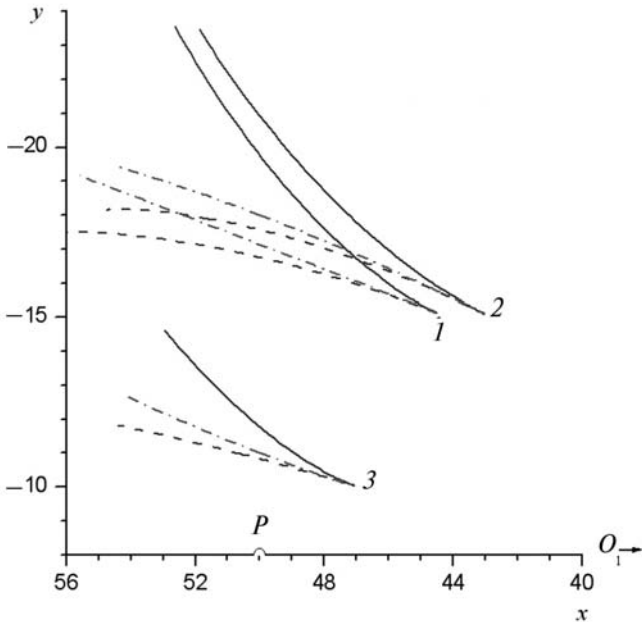


Рис. 3. Профили звеньев для  $V_j = b_0 + bt$ :  
 1 —  $b = 47$  (эвольвентное зацепление); 2 —  $b = 25$ ;  
 3 —  $b = 75$ ; — — профиль первого звена;  
 - - - - - профиль второго звена;  
 - · - - - профиль рейки

$$\ddot{\alpha} = \frac{\cos \alpha (\dot{\alpha} - \omega_j)(2\dot{\alpha} - \omega_j)}{\sin \alpha + \eta_0}, \quad (8)$$

где  $\eta_0 = \frac{V_0}{a_j \omega_j} = \text{const}$ . Линию зацепления  $r(\alpha)$  можно получить, не прибегая к решению дифференциального уравнения (8). Действительно, из (1), (2) следует

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{r}} = \frac{\omega_j + \frac{v_j + a_j \omega_j \sin \alpha}{r}}{-a_j \omega_j \cos \alpha}. \quad (9)$$

Введем функцию  $s = \sin \alpha$ . Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{s}{r} - \frac{\eta_0}{r} - \frac{1}{a_j}.$$

Положим  $s = u / r$ . Тогда

$$\frac{du}{dr} = -\eta_0 - \frac{r}{a_j}.$$

Решение этого уравнения запишем в форме

$$u = u_0 - \eta_0 r - \frac{r^2}{2a_j}.$$

Таким образом,

$$\sin \alpha = \frac{u_0}{r} - \eta_0 - \frac{r}{2a_j}. \quad (10)$$

Отсюда получаем

$$r^2 + 2a_j(\sin \alpha + \eta_0)r - 2a_j u_0 = 0. \quad (11)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$r = -a_j(\sin \alpha + \eta_0) \pm a_j \sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}. \quad (12)$$

Параметр  $c_0$  можно выразить из начальных условий по формуле (10):

$$c_0 = \frac{2u_0}{a_j} = \frac{2r_0}{a_j} \left( \eta_0 + \frac{r_0}{2a_j} + \sin \alpha_0 \right) = \frac{r_0^2}{a_j^2 \omega_j} (2\dot{\alpha}_0 - \omega_j).$$

Дифференцируя по времени формулу для линии зацепления (12) с учетом (2), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\alpha} = \pm \frac{\omega_j \sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}}{-(\sin \alpha + \eta_0) \pm \sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}} = \frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha + \eta_0}{\sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}}}, \quad (13)$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi_j = (\alpha - \alpha_0) \mp \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\sin \alpha + \eta_0)}{\sqrt{(\sin \alpha + \eta_0)^2 + c_0}} d\alpha.$$

Запишем линию зацепления (12) в декартовых координатах:

$$x = a_1 + r \sin \alpha; \quad y = -r \cos \alpha.$$

С учетом (11) имеем

$$(x - a_1)^2 + y^2 = r^2 = -2a_j(x - a_1) - 2a_j\eta_0 r + a_j^2 c_0.$$

Перепишем это равенство в переменных  $\tilde{x} = x - a_1, \tilde{y} = y$ :

$$\left( (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 2a_j\tilde{x}) - a_j^2 c_0 \right)^2 = 4a_j^2 \eta_0^2 (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2). \quad (14)$$

Уравнение (14) при  $c_0 = 0$  описывает улитку Паскаля, а при  $\eta_0 = 0 (V_j = 0)$  — окружность с центром  $(x_0 = a_1 - a_j, y_0 = 0)$  и радиусом  $R_0 = a_j \sqrt{c_0 + 1}$ .

Координаты профилей звеньев определяют по формулам

$$\begin{aligned} x_j &= a_j \cos \varphi_j + r \sin(\alpha - \varphi_j); \\ y_j &= -a_j \sin \varphi_j - r \cos(\alpha - \varphi_j), \end{aligned} \quad (15)$$

а для поступательно движущегося звена 2' (рейки) по формулам

$$\begin{aligned} x'_2 &= r \sin \alpha; \\ y'_2 &= -a_j \varphi_j - r \cos \alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее отмеченные частные случаи.

Если  $r_0 = 0$  либо  $\dot{\alpha}_0 = \frac{\omega_j}{2}$ , то  $c_0 = 0$  и для линии зацепления (12)

$$r = -2a_j \sin \alpha - 2a_j \eta_0 = R_j - 2a_j \sin \alpha,$$

где  $R_j = -\frac{2V_0}{\omega_j} = \text{const}$  — радиус кривизны. Таким образом, случай  $c_0 = 0$  соответствует постоянной кривизне. При этом из (13) следует

$$\dot{\alpha} = 0,5\omega_j.$$

Отсюда

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{\omega_j}{2} t; \quad (16)$$

$$r = R_j - 2a_j \sin\left(\alpha_0 + \frac{\omega_j}{2} t\right). \quad (17)$$

Уравнение (17) — полярное уравнение улитки Паскаля. Таким образом, как было показано, линией зацепления для критерия  $v_j = \text{const}, k_j = \text{const} (j = 1 \text{ либо } j = 2)$  является улитка Паскаля.

Пусть  $k_1 = \text{const}$ . Найдем выражение для профиля первого звена. Подставляя в (15) выражения (16), (17) при  $j = 1$ , получим

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos \varphi_1 + (R_1 - 2a_1 \sin \alpha) \sin(\alpha - \varphi_1) = \\ &= R_1 \sin(\alpha - \varphi_1) + a_1 \cos 2\alpha_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_1 \sin \varphi_1 - (R_1 - 2a_1 \sin \alpha) \cos(\alpha - \varphi_1) = \\ &= -R_1 \cos(\alpha - \varphi_1) + a_1 \sin 2\alpha_0. \end{aligned}$$

Следовательно, профиль первого звена с постоянной кривизной является окружностью с центром в точке с координатами  $x_c = a_1 \cos 2\alpha_0, y_c = a_1 \sin 2\alpha_0$  и радиусом  $R_1$ :

$$(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 = R_1^2.$$

Рассмотрим случай, когда  $V_0 = 0$ . При  $\eta_0 = 0$  линия зацепления определяется формулой (12):

$$r = -a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}, \quad (18)$$

где параметр  $c_0$  описывается выражением

$$c_0 = \frac{r_0}{a_j^2} (r_0 + 2a_j \sin \alpha_0).$$

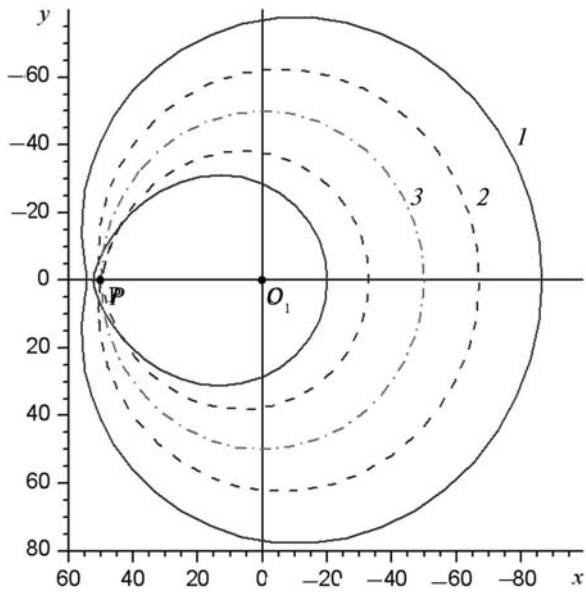


Рис. 4. Линии зацепления для  $V_j = \text{const}$ :  
 1 —  $c_0 > 0$  (эвольвентное зацепление); 2 —  $c_0 = 0$ ;  
 3 —  $c_0 = 0, V_j = 0$

В данном случае линия зацепления (18) является окружностью и дифференциальное уравнение (13) принимает вид

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}}}$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$\varphi_1 = \alpha - \alpha_0 \pm \left[ \arcsin\left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{c_0 + 1}}\right) - \arcsin\left(\frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{c_0 + 1}}\right) \right]$$

Для начальных условий  $r_0 = -2a_1 \sin \alpha_0$  имеем  $c_0 = 0$  — случай постоянной кривизны  $k_1 = \infty$ .

На рисунке 4 показаны линии внешнего зацепления с  $a_1 = 50$  мм и передаточным отношением  $i_{12} = 2$ . Профили звеньев для постоянной скорости и кривизны представлены на рис. 5 и рис. 6.

Рассмотрим, наконец, случай  $V_1 = \text{const}$ ,  $V_2 = \text{const}$ . Поскольку из (1) следует соотношение

$$V_2 = V_1 + r(\omega_1 - \omega_2)$$

то отсюда сразу получаем

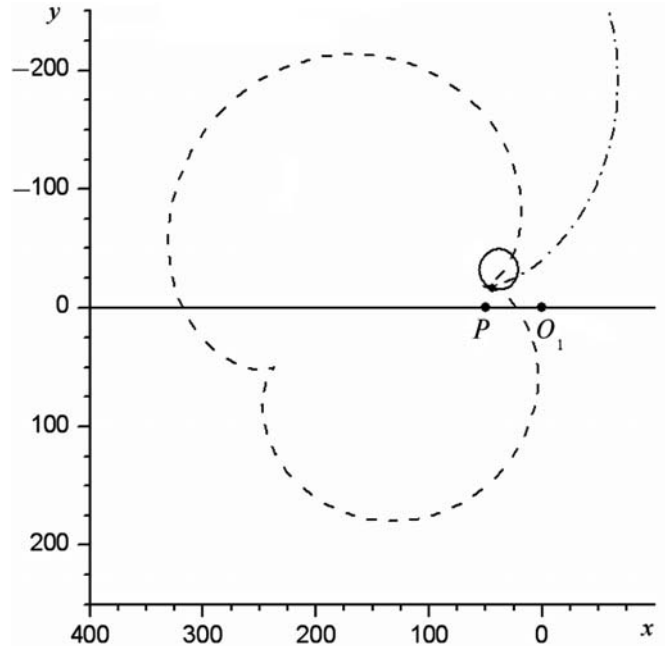


Рис. 5. Профили звеньев для  $V_j = \text{const} \neq 0, k_j = \text{const}$ :  
 — — профиль первого звена; - - - — профиль второго звена; - · - · - — профиль третьего звена

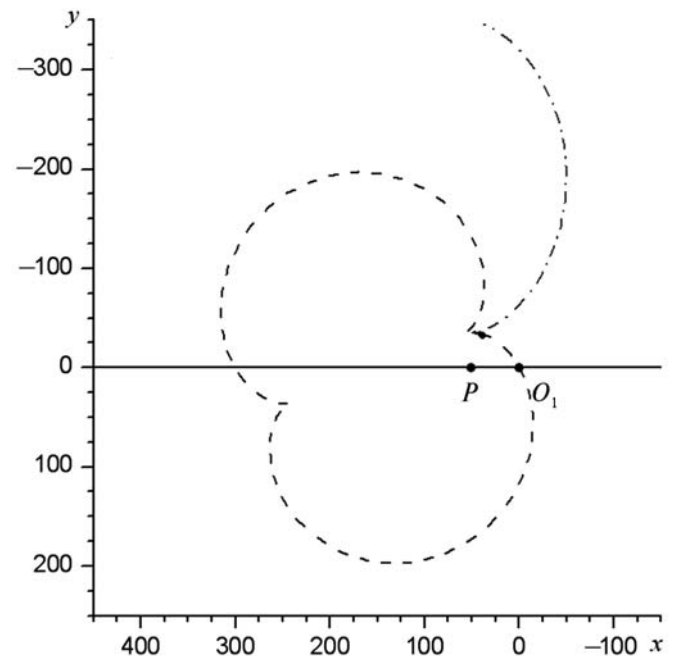


Рис. 6. Профили звеньев для  $V_j = 0, k_j = \text{const}$ :  
 - - - — профиль второго звена;  
 - · - · - — профиль рейки

$$r = \frac{V_2 - V_1}{\omega_1 - \omega_2} = R = \text{const.}$$

Далее из (2) находим

$$\dot{r} = -a_j \omega_j \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 90^\circ,$$

т. е. линия зацепления вырождается в две точки с декартовыми координатами

$$x = a_1 + r \sin \alpha = a_1 \pm R, \quad y = -r \cos \alpha = 0. \quad (19)$$

Координаты профилей зубьев колес:

$$\begin{aligned} x_j &= a_j \cos \varphi_j + r \sin(\alpha - \varphi_j) = \\ &= (a_j \pm R) \cos \varphi_j; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} y_j &= -a_j \sin \varphi_j - r \cos(\alpha - \varphi_j) = \\ &= -(a_j \pm R) \sin \varphi_j. \end{aligned} \quad (21)$$

т. е. профилем  $j$ -го звена является окружность радиуса  $(a_j \pm R)$ :

$$x_j^2 + y_j^2 = (a_j \pm R)^2. \quad (22)$$

Для профиля зуба рейки имеем

$$x'_2 = r \sin \alpha = \pm R; \quad (23)$$

$$y'_2 = -a_1 \omega_1 - r \cos \alpha = -a_1 \omega_1 t = -u_2 t, \quad (24)$$

т. е. профиль зуба рейки — вертикальные прямые  $x = \pm R$ ,  $u_2 = a_1 \omega_1$  — скорость рейки.

Случаю  $V_1 = V_2 = \text{const}$  соответствуют приведенные выше отношения (19)–(24) с  $R = 0$ , т. е. линия зацепления вырождается в точку с координатами  $(a_1, 0)$ .

## Литература

1. Ленский М.Ф. Инвариантная теория плоских кинематических пар с точечным касанием // *Машиноведение*. 1967. № 5. С. 32–36.

2. Ленский М.Ф., Прохоров В.П. Обобщенные показатели зубчатых зацеплений с параллельными осями // *Машиноведение*. 1971. № 5. С. 67–73.

3. Прохоров В.П., Прохорова Н.И. Об относительном движении звеньев в пространственном зацеплении // *Машиноведение*. 1978. № 9. С. 36–41.

4. Прохоров В.П. Аналитическая модель системы твердых тел произвольной структуры // *Изв. АН ССР. Механика твердого тела*. 1986. № 2. С. 94–98.

5. Frolov L.V., Prokhorov V.P. System concept and algorithms of design of mechanisms of unrestricted structure // *Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Proceedings*. V. 7. Oulu, Finland. 1999. P. 689–694.

6. Фролов К.В., Прохоров В.П. Системный подход в исследовании механизмов произвольной структуры. Проблемы механики современных машин // *Материалы международной конференции*. Т. 3. Улан-Удэ. 2000. С. 78–84.

7. Frolov L.V., Prokhorov V.P. Structurization of the Basis of Knowledge in the Mechanisms of Machines and the Choice of Optimal Strategies of Research // *11<sup>th</sup> World Congress in Mechanisms and Machine Science*, Tianjin, China. 2004. P. 308–311.

8. Frolov L.V., Prokhorov V.P. Systems Engineering Frame Concept // *Russian Academy of Sciences. IFToMM-2007 World Congress*, Besancon, France. V. 6. 2007. P. 388–393.

9. Prokhorov V.P. Kinematic Pairs With A Concave Line Of Contact // *IFToMM-2011, 13<sup>th</sup> World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico. 2011. Официальный сайт: <http://www.iftomm.org>

10. Чернышева И.Н., Прохоров В.П. Исследование качественных показателей и выбор постоянных параметров циклоидальных зацеплений // *Изв. вузов. Машиностроение*. 1978. № 12.

11. One-Criterion Efficiency Optimization of Flat Engagements // *IFToMM-2011, 13<sup>th</sup> World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, 2011, Paper A9–373. Официальный сайт: <http://www.iftomm.org>

12. Прохоров В.П., Щипаков В.А. Синтез и однокритериальная оптимизация плоских зацеплений по коэффициенту полезного действия // В кн.: *Вісник СевНТУ, випуск 120. Збірник наукових праць, серія: Механіка, енергетика, екологія*, Севастополь, 2011. С. 87–94.

Статья поступила в редакцию 30.03.2012