Расчет и конструирование машин

УДК 539.376

Метод перемещений в задачах продольного изгиба нелинейно-вязких стержней

К.И. Романов

РОМАНОВ
Константин Игоревич
доктор технических наук,
профессор
кафедры
«Прикладная механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Предложена формулировка закона сохранения мощности при чистом прямом изгибе стержней на основе вычисления мощности рассеяния материала с помощью функции прогиба. Решен пример и показано, что методом перемещений может быть получена новая формула для критического времени в задачах выпучивания реономных стержней.

Ключевые слова: система, интеграл, баланс, стержень, сила.

The definition of the law of conservation of power under pure symmetrical bending of rods on the basis of calculating the material power dissipation by means of deflection has been proposed. The example has been solved and it has been shown that a new formula for critical time in the problems of rheonomic rods buckling can be obtained by the displacement method.

Keywords: system, integral, balance, core, strength.

В ряде работ, например [1, 2], предложен энергетический метод определения критического времени при ползучести стержней. В частности в статье [3], задачи выпучивания решались численно. Применялся энергетический метод в форме метода сил, когда мощность внутренних сил определяется с использованием изгибающего момента на основе метода сечений.

В данной статье показано, что энергетический метод может быть сформулирован в форме метода перемещений, связанного с вычислением мощности рассеяния материала с помощью скорости изменения кривизны изогнутой оси. При таком подходе снимается вопрос об отыскании лишних неизвестных в статически неопределимых системах и, кроме того, интеграл мощности внутренних сил оказывается инвариантом при определенных граничных условиях и любом внешнем воздействии.

Примем уравнение состояния материала стержней в виде

$$\xi = k\sigma^n,$$

где ξ — скорость деформации; σ — напряжение; k и n — постоянные материала при определенной температуре.

Уравнение баланса мощностей

$$P\dot{\lambda} = \int_0^l M\dot{\chi}dz, \tag{1}$$

где P — продольная сжимающая сила; $\dot{\lambda}$ — скорость перемещения точки приложения силы; l — длина стержня; z — осевая координата; M — изгибающий момент; χ — кривизна изогнутой оси.

При чистом изгибе [4]

$$\dot{\chi} = \left(\frac{M}{J_{nx}}\right)^n k.$$

Здесь J_{nx} — обобщенный момент инерции поперечного сечения.

Поэтому равенство (1) может быть представлено в форме метода перемещений ($J_{nx} = \text{const}$):

$$P\dot{\lambda} = \frac{J_{nx}}{k^{1/n}} \int_0^l \dot{\chi}^{(n+1)/n} dz\ , \tag{2}$$

являющемся источником получения новой формулы для критического времени в процессе выпучивания стержня. Например, в случае шарнирно закрепленного, нагруженного по концам стержня, функция прогибов может быть задана в виде $y = -A(t)\sin(\pi z / l)$, где $A(t)$ — функция времени. Тогда $\dot{\lambda} = \pi^2 A\dot{A} / (2l)$, $\dot{\chi} = \partial^2 \dot{y} / \partial z^2 = \dot{A}(\pi / l)^2 \sin(\pi z / l)$ и уравнение закона сохранения мощности преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} PA\dot{A}\frac{\pi^2}{l} = \frac{J_{nx}}{k^{1/n}} \dot{A}^{(n+1)/n} \times$$
$$\times (\pi / l)^{2(n+1)/n} \int_0^l \left(\sin\frac{\pi z}{l}\right)^{(n+1)/n} dz.$$

Интерпретация решения в виде зависимости $\dot{A}$ от A может быть дана на основе зависимости

$$\dot{A} = \frac{\pi^{n-2} k l^2 P^n A^n}{2^n J_{nx}^n} \left[\int_0^\pi (\sin x)^{(n+1)/n} dx\right]^{-n};$$

$$x = \frac{\pi z}{l}. \tag{3}$$

Аналогичное соотношение по методу сил [1] для данного примера приводит к соотношению

$$\dot{A} = \frac{2kl^2 P^n A^n}{\pi^3 J_{nx}^n} \int_0^\pi (\sin x)^{n+1} dx. \tag{4}$$

Поскольку отыскиваемое решение является приближенным, естественно существуют различия в решениях (3) и (4). Формула критического времени по методу сил [1] имеет вид

$$t_* = \frac{\pi^3 J_{nx}^n A_0^{1-n}}{2kP^n l^2 (n-1) I_1(n)};\ I_1(n) = \int_0^\pi (\sin x)^{n+1} dx,$$

где A_0 — начальное значение прогиба.

Для метода перемещений

$$t_* = \frac{2^n J_{nx}^n A_0^{1-n}}{\pi^{n-2} k l^2 P^{(n-1)}} I_2(n);$$
$$I_2(n) = \left[\int_0^\pi (\sin x)^{(n+1)/n} dx\right]^n.$$

Предложенная схема кинематического метода может быть уточнена путем использования точного выражения кривизны изогнутой оси [5]. Поскольку предлагаемый метод — приближенный, то рассматривались другие методы, например метод коллокаций [2]. Численное интегрирование показывает [3] существование критического времени в задаче с $n > 1$. Кроме того отметим, что вычисление интеграла в последней формуле может быть выполнено с помощью интеграла Эйлера первого рода.

Понятия критического времени и различные идеализации применялись в работе [1], где были определены аналитические комбинации параметров, в частности, безразмерное время. Относительно показателя ползучести известно [6] точное решение в виде экспоненты для $n=1$. Значения $n<1$ представляют теоретический интерес. Однако, экспериментальные данные о таких значениях, по-видимому, ограничены. Поэтому приведенные значения t_* соответствуют случаям $n>1$, и, к тому же, нечетным.

Отметим, что критерий $t \to t_*$ при $A \gg A_0$, естественно, является одним из возможных. Не исключено существование других подходов. Обоснованием указанного критерия являются численные эксперименты.

Метод перемещений приводит к аналогии инерционной нагрузки и реакции упругого основания. В прежней постановке метода перемещений рассмотрим балку в двух вариантах: 1) нагружение осуществляется с помощью вращения [7], когда $q=\rho F\omega^2 y$ (где ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения, ω — скорость вращения); 2) балка на упругом основании сжата силой P, как в предыдущем примере, в сочетании с $q=-cy$ (где c — коэффициент постели).

Баланс мощности в первом варианте имеет вид

$$\rho F\omega^2 y\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{J_{nx}}{k^{1/n}}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^2\partial t}\right)^{\frac{n+1}{n}},$$

для второго варианта

$$P\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial z\partial t}-cy\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{J_{nx}}{k^{1/n}}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial z^2\partial t}\right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

В последнем соотношении знак «–» соответствует схеме правки. С учетом этого единственного отличия обнаруживается аналогия двух нагрузок, вследствие отсутствия в правой части баланса мощности. Поэтому указанная аналогия может быть распространена на статически неопределимые системы, например на заделанную по концам балку.

Литература

1. *Романов К.И.* Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. 1993. Вып. 33. С. 139—151.
2. *Романов К.И.* Энергетический метод в теории выпучивания реономных стержней // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С. 125—134.
3. *Романов К.И., Чернецов А.А.* Анализ продольного изгиба стержня в условиях ползучести // Машиноведение. 1988. № 4. С. 33—35.
4. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 220 с.
5. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
6. *Романов К.И.* Выпучивание пластинок и оболочек по схеме Кармана в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 131—137.
7. *Романов К.И.* Ползучесть вращающейся балки // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 6. С. 146—148.

Статья поступила в редакцию 22.12.2011