



МАРЧЕВСКИЙ

Илья Константинович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

MARCHEVSKIY

Ilya Konstantinovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)



ЩЕГЛОВ

Георгий Александрович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

SHCHEGLOV

Georgiy Aleksandrovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

Моделирование динамики вихревых структур высокопроизводительным методом вихревых элементов*

И.К. Марчевский, Г.А. Щеглов

Вихревые бессеточные лагранжевы методы вычислительной гидродинамики эффективны при решении сопряженных задач аэрогидроупругости в случае обтекания тел потоком несжимаемой среды. Актуальной проблемой является квадратичный рост времени счета при увеличении числа вихревых элементов в расчетной схеме. В данном исследовании разработан алгоритм ускорения расчета поля скоростей, основанный на совместном использовании метода мультипольных разложений и параллельных вычислительных алгоритмов. Алгоритм протестирован на задаче моделирования эволюции вихревых колец. Исследование показало, что одновременное применение обоих подходов дает возможность достичь суммарного увеличения производительности в сотни раз при проведении расчета на 16-ядерном вычислительном кластере. Результатом работы является алгоритм, использование которого позволит решать актуальные инженерные задачи за приемлемое время.

Ключевые слова: метод вихревых элементов, несжимаемая среда, вихревое кольцо, параллельные вычисления, мультипольное разложение.

Modeling the dynamics of vortex structures by the vortex element method

I.K. Marchevskiy, G.A. Shcheglov

The vortex meshless Lagrangian methods of computational fluid dynamics are efficient when solving joint aerohydroelasticity problems in the case of an incompressible flow around bodies in a medium. The actual problem is a quadratic increase of the run time following the increase in the number of vortex elements in the design scheme. In this study, an algorithm for the velocity field calculation is developed on the basis of the multipole expansion method and parallel computing algorithms. The algorithm was evaluated and tested by solving the problem of evolution of vortex rings. The study showed that the combination of both approaches makes it possible to increase the simulation speed by hundreds of times with a 16-core compute cluster. The developed algorithm will allow us to solve topical engineering problems on a real time basis.

Keywords: vortex element method, incompressible medium, vortex ring, parallel computing, multipole expansion.

*Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-6482.2012.8), а также гранта РФФИ (проект 11-08-00699а).

Численное моделирование пространственных течений среды и определение нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на плохообтекаемые тела, — достаточно трудоемкая задача. В случае внешних течений с малыми дозвуковыми скоростями, когда сжимаемостью среды можно пренебречь, наиболее эффективны с вычислительной точки зрения бессеточные лагранжевы методы: метод дискретных вихрей, метод вихревых частиц, метод вихревых элементов [1, 2]. Первичной расчетной величиной в этих методах является завихренность, переносимая вихревыми элементами (ВЭ), а поля скоростей и давления восстанавливаются в соответствии с законом Био — Савара и аналогом интеграла Коши — Лагранжа [3]. Определение скоростей, необходимых для интегрирования уравнений движения ВЭ, основано на расчете парных взаимодействий всех ВЭ аналогично гравитационной задаче N тел. Очевидно, что с повышением точности моделирования при увеличении числа ВЭ вычислительная сложность возрастает пропорционально квадрату числа элементов.

Повышение производительности вычислений методом вихревых элементов рассмотрено в большом числе работ, в которых можно выделить два основных подхода: использование параллельных алгоритмов и применение приближенных быстрых алгоритмов решения задачи N тел. Для различных классов задач и используемых моделей ВЭ, как правило, применяется один из двух подходов.

В работе [4] рассмотрен параллельный алгоритм расчета пространственного обтекания тел методом вихревых элементов на основе модели симметричного вортон-отрезка. Анализ трудоемкостей всех операций алгоритма показал, что распараллеливание только одной операции вычисления парных влияний не позволяет получить существенного ускорения вычислений при проведении расчетов на многопроцессорных ЭВМ. Распараллеливание всех операций позволяет довести долю параллельного кода до 98...99%, что в соответствии с законом Амдала делает алгоритм решения задачи более масшта-

бируемым за счет сохранения относительных трудоемкостей всех операций алгоритма.

При решении практических задач этот подход позволил сократить время вычислений в 9—10 раз при проведении расчетов на 16-ядерном кластере. При этом около половины времени счета приходится на вычисление парных влияний ВЭ. Существенное сокращение времени выполнения данной операции, как представляется, может быть получено внедрением в параллельный алгоритм быстрого метода решения задачи N тел, вычислительная сложность которого пропорциональна $M \lg N$. Такой алгоритм применительно к расчету пространственной эволюции завихренности в методе ВЭ при использовании модели симметричного вортон-отрезка реализован авторами и рассмотрен в настоящей статье.

Описание модельной задачи. В качестве тестовой задачи вычислительной гидродинамики рассматривается эволюция вихревых структур в безграничном объеме идеальной жидкости, описываемая уравнением неразрывности и уравнением сохранения импульса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = - \frac{\nabla p}{\rho_\infty},$$

где \mathbf{V} — поле скоростей, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$; p — поле давления, $p = p(\mathbf{r}, t)$; ρ_∞ — плотность среды; \mathbf{r} — радиус-вектор в неподвижной декартовой системе координат; ∇ — оператор Гамильтона, $\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z$. В качестве граничных условий используется условие затухания возмущений на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p = p_\infty.$$

В качестве начального условия задается поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{V}_0$, индуцируемое начальным распределением завихренности $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t_0) = \nabla \times \mathbf{V}_0$.

Использование для решения поставленной задачи лагранжева метода вихревых элементов позволяет обеспечить тождественное выполнение уравнения неразрывности, а уравнение Эйлера записать в форме Лагранжа:

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \mathbf{V}; \quad \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V}, \quad (1)$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$ — субстанциональная (материальная) производная.

Вихревые структуры, образующие поле завихренности $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$, в формуле (1) могут быть приближенно представлены в виде суперпозиции N_V элементарных полей завихренности ВЭ:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_V} \boldsymbol{\Omega}_{0i}.$$

В этом случае дифференциальные уравнения в частных производных (1) могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров ВЭ [1]. При моделировании пространственного течения выбор ВЭ представляет собой нетривиальную задачу, поскольку возникает необходимость моделирования эволюции вихревых линий (их растяжения, перезамыкания и пр.). В данной работе в качестве модели ВЭ используется модель симметричного вортон-отрезка [5], который можно рассматривать как цепочку, составленную из точечных вортон-отрезков [6].

Симметричный вортон-отрезок, как показано на рис. 1, представляет собой отрезок вихревой линии циркуляции Γ длиной $2h$ с заданным

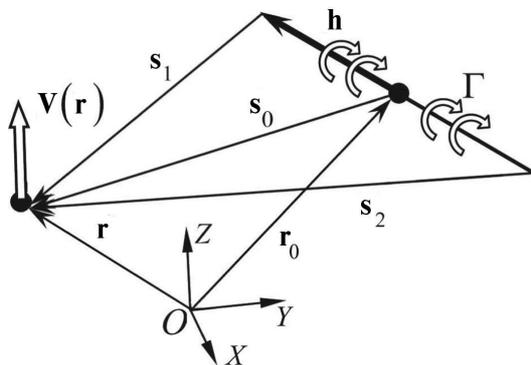


Рис. 1. Симметричный вортон-отрезок:

$\mathbf{s}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ — вектор, соединяющий центр вортон-отрезка и точку наблюдения, т. е. точку, в которой вычисляется индуцированная им скорость; $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 - \mathbf{h} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{h})$ — вектор, соединяющий конец вортон-отрезка с точкой наблюдения; $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{h} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 - \mathbf{h})$ — вектор, соединяющий начало вортон-отрезка и точку наблюдения

центром \mathbf{r}_0 и вектором \mathbf{h} , определяющим его «полуразмах». Вектор вортон-отрезка может быть представлен в виде $\mathbf{h} = h\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$ — направляющий вектор вортон-отрезка.

Система уравнений, описывающая эволюцию параметров ВЭ, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_{0i}}{dt} &= \mathbf{V}(\mathbf{r}_{0i}, t); \quad \frac{d\mathbf{h}_i}{dt} = [H]\mathbf{h}_i; \\ \frac{d\Gamma_i}{dt} &= 0, \quad i=1, \dots, N_V. \end{aligned} \quad (2)$$

Поле скоростей \mathbf{V} в (2) определяется суммарным влиянием всех ВЭ:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_V} \Gamma_i \int_{-1}^1 \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0i} + s\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i, \varepsilon) ds, \quad (3)$$

вычисляемым по закону Био — Савара с учетом цилиндрически симметричной функции сглаживания:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \mathbf{h}_i, \varepsilon) &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi} c_v \mathbf{a}_v, & R \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\varepsilon} c_v^* \mathbf{a}_v^*, & R < \varepsilon; \end{cases} \\ \mathbf{r}^* &= \mathbf{r} + \left(\frac{\varepsilon}{R} - 1\right) \left(\mathbf{h}_i \frac{s_0 \mathbf{h}_i}{h_i^2} - \mathbf{s}_0\right); \quad R = |\mathbf{e} \times \mathbf{s}_0|; \\ \mathbf{a}_v &= \mathbf{h} \times \mathbf{s}_0, \quad c_v = |\mathbf{a}_v|^{-2} \left[\left(\frac{\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_2|} - \frac{\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1|} \right) \mathbf{h} \right]; \\ \mathbf{a}_v^* &= \mathbf{h} \times (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_i); \\ c_v^* &= |\mathbf{a}_v^*|^{-2} \left[\left(\frac{\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_i + \mathbf{h}}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_i + \mathbf{h}|} - \frac{\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_i - \mathbf{h}}{|\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_i - \mathbf{h}|} \right) \mathbf{h}_i \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где ε — радиус сглаживания поля скоростей вортон-отрезка.

Тензор деформации вектора ВЭ в формуле (2) вычисляется по симметричной схеме [7]:

$$[H] = \frac{[\mathbf{B}(\mathbf{r}_{0i})] + [\mathbf{B}(\mathbf{r}_{0i})]^T}{2}.$$

Здесь тензор $[\mathbf{B}(\mathbf{r}_{0i})] = \nabla \mathbf{V}$ определяется формулой

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r}_{0i})] = \sum_{j=1}^{N_V} \int_{-1}^1 [\mathbf{B}(\mathbf{r}_{0j} + s\mathbf{h}_j, \mathbf{r}_{0i})] ds; \quad (5)$$

$$[B(\mathbf{r}_{0j}, \mathbf{r}_i)] = \begin{pmatrix} \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_i))_x / \partial x_i & \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_{0i}))_x / \partial y_i & \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_i))_x / \partial z_i \\ \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_i))_y / \partial x_i & \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_{0i}))_y / \partial y_i & \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_i))_y / \partial z_i \\ \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_i))_z / \partial x_i & \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_{0i}))_z / \partial y_i & \partial(V_{0j}(\mathbf{r}_i))_z / \partial z_i \end{pmatrix}$$

Частные производные компонент вектора скорости $\mathbf{V}_{0j}(\mathbf{r}_i)$ по компонентам радиус-вектора \mathbf{r}_i найдены по аналитическим формулам, полученным дифференцированием выражений для \mathbf{a}_v и \mathbf{c}_v [8].

При численном определении градиента скорости в правой части (2) необходимо выполнять сглаживание особенности на отрезке ВЭ. Сглаживание производится аналогично (4) с использованием функций \mathbf{c}_v^* , \mathbf{a}_v^* , определенных в точке \mathbf{r}^* :

$$[B(\mathbf{r}_{0j}, \mathbf{r}_i)] = \begin{cases} [B(\mathbf{r}_{0j}, \mathbf{r}_i)], & R \geq \varepsilon; \\ \frac{R}{\varepsilon} [B(\mathbf{r}_{0j}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}^*, \mathbf{c}_v^*, \mathbf{a}_v^*)], & R < \varepsilon. \end{cases}$$

Вычисление интегралов в формулах (3) и (5) проводится по квадратурным формулам Гаусса. Методические расчеты показывают, что использование трех гауссовых точек обеспечивает необходимую точность вычисления интеграла.

Представление вихревых структур (вихревых колец, рамок и нитей) с помощью симметричных вихревых отрезков оказывается более эффективным по сравнению с использованием других типов ВЭ (точечные вихри, вихревые ступки и др.), поскольку применение модели вихревого отрезка позволяет точнее описывать процесс удлинения и изгибания вихревых нитей с использованием меньшего числа ВЭ.

В работе [9] на примере задачи о моделировании явления чехарды вихревых колец показано, что с помощью симметричных вихревых отрезков удается сохранять строгую периодичность решения на протяжении большего времени расчета по сравнению с другими типами ВЭ. Это свидетельствует о высокой точности расчета растяжения вихревых нитей с помощью симметричных вихревых отрезков.

В данной работе задача о чехарде вихревых колец используется для тестирования предлагаемого метода ускорения вычислений. В качестве начального поля завихренности $\Omega(\mathbf{r}, t_0)$ при $t_0 = 0$ в идеальной жидкости с единичной плотностью рассматриваются два тороидальных вихревых кольца одинакового радиуса $R_1 = R_2 = 1$, имеющих круглое поперечное сечение радиусом $r_R = 0,1$, и отстоящие друг от друга на расстоянии $z = 1,2$ как показано на рис. 2.

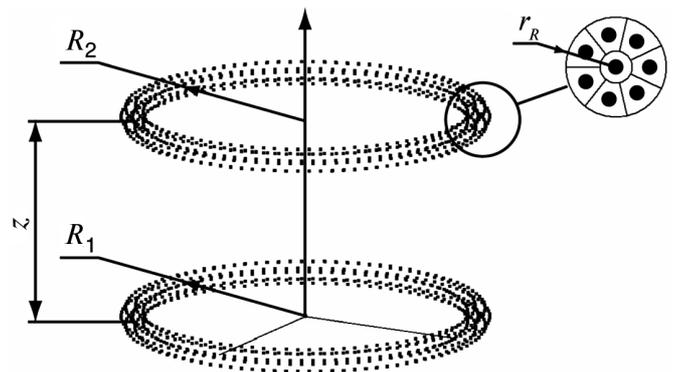


Рис. 2. Расчетная схема для моделирования чехарды вихревых колец

Распределение завихренности в сечении вихревого кольца задавалось соотношением $|\Omega_0| = A(r_R - r) / r_R$, где A — константа, выбираемая из условия единичной циркуляции вектора скорости по контуру, охватывающему сечение тора. Аппроксимация завихренности в торе при помощи N_v вихревых элементов выполнялась путем разбиения тора на ячейки примерно равного объема (см. рис. 2) и замены завихренности в ячейке эквивалентным по циркуляции ВЭ.

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) проводилось методом 2-го порядка точности с шагом

по времени $\Delta t = 0,005$. Радиус сглаживания вортонна принимался равным $\varepsilon = 0,10$.

Актуальность применения быстрого метода. При использовании прямого метода расчета парных взаимодействий, даже используя параллельные вычислительные алгоритмы, число ВЭ в расчетных схемах на практике не превышает 10...20 тыс. Однако для повышения точности моделирования количество ВЭ необходимо увеличивать, при этом желательно это делать не путем повышения эффективности распараллеливания и задействования в расчетах все большего числа вычислительных ядер, а за счет применения приближенных быстрых алгоритмов. При этом ресурс распараллеливания вычислений также может быть использован для еще большего ускорения вычислений. Представляется, что для эффективного решения актуальных в настоящее время инженерных задач необходимо обеспечить возможность проведения расчетов для $N_v \sim 10\ 000$ ВЭ, используя возможности персональных ЭВМ с многоядерными процессорами.

Эффективный быстрый метод приближенного решения гравитационной задачи N тел предложен и описан в работе [10], его модификация применительно к двумерным задачам моделирования обтекания профилей методом вихревых элементов рассмотрена в статье [11]. Вычислительная сложность данного метода пропорциональна $N_v \lg N_v$ против N_v^2 для прямого метода. Использование быстрого метода позволило довести число ВЭ (в двумерных задачах — бесконечных вихревых нитей, перпендикулярных плоскости течения) до нескольких миллионов. При этом расчет одного парного взаимодействия плоских ВЭ требует выполнения всего шести операций умножения/деления, тогда как расчет взаимодействия двух вортоннов-отрезков предполагает выполнение 170...850 операций в зависимости от выбираемой схемы интегрирования системы (2). Таким образом, для схемы интегрирования с тремя гауссовыми точками одно вычисление парного влияния вортоннов-отрезков является почти на 2 порядка более затратной операцией по сравнению с плоским случаем, поэтому актуальность разработки эффективного алгоритма бы-

строго метода для решения подобных задач становится очевидной.

Существуют и асимптотически более эффективные методы, вычислительная трудоемкость которых порядка N_v , однако они становятся эффективными лишь при экстремально больших N_v (порядка миллионов), тогда как актуальной является задача ускорения вычислений при N_v порядка нескольких тысяч либо десятков тысяч.

Описание быстрого метода решения задачи. На первом этапе алгоритма быстрого метода вычисления скоростей ВЭ осуществляется построение дерева — иерархической структуры областей, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 3).

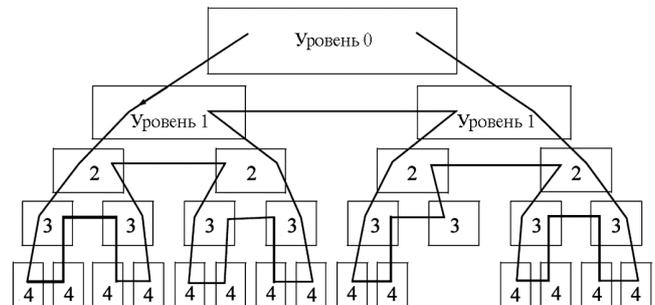


Рис. 3. Дерево, имеющее максимальную глубину четыре уровня, и направление его обхода

Параллелепипед 0-го уровня содержит все ВЭ. Он делится по ребру наибольшей длины на два одинаковых параллелепипеда 1-го уровня. Путем перебора ВЭ определяется их принадлежность к одному из них. После этого каждый параллелепипед «обрезается» по всем измерениям, чтобы исключить из него области, не содержащие ни одного ВЭ. Заметим, что такая простая процедура позволяет, с одной стороны, существенно повысить эффективность метода, а с другой, — упростить алгоритм.

Далее аналогичным образом эти параллелепипеды делятся пополам, образуя области 2-го уровня. Деление прекращается при выполнении заданного критерия по размеру параллелепипеда, числу ВЭ в нем и (или) номеру уровня. Отметим, что «обрезание» всех параллелепипедов обеспечивает непустоту областей следующего уровня.

На втором этапе для каждой области определяются положение и вектор эквивалентного вортонa, а также его интенсивность. Положение и вектор эквивалентного вортонa вычисляются в два шага: сначала находится «средний» радиус-вектор и «средний» вектор вортонoв ячейки

$$\xi_e = \frac{\sum r_i |\Gamma_i|}{\sum |\Gamma_i|}; \eta_e = \frac{\sum h_i |\Gamma_i|}{\sum |\Gamma_i|},$$

где суммирование производится по всем вортонaм, находящимся в соответствующей ячейке.

Начало и конец эквивалентного вортонa находятся в точках пересечения прямой, проходящей через точку ξ_e в направлении вектора η_e , с гранями параллелепипеда. Центр этого отрезка определяет положение r_e эквивалентного вортонa; вектор эквивалентного вортонa h_e оказывается коллинеарным вектору η_e , а его длина равна половине длины эквивалентного вортонa (рис. 4).

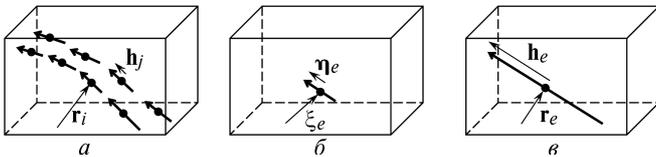


Рис. 4. Алгоритм построения эквивалентного вортонa:

a — ячейка дерева с ВЭ; *б* — среднее положение и средний вектор ВЭ; *в* — эквивалентный ВЭ

Интенсивность эквивалентного вортонa вычисляется по формуле

$$\Gamma_e = \frac{|\eta_e|}{|h_e|} \sum \Gamma_i.$$

Отметим, что для вершин дерева (тех ячеек, которые не имеют потомков следующего уровня), указанные величины вычисляются непосредственно. В дополнение к ним запоминаются также сумма модулей интенсивностей ВЭ и так называемые моменты:

$$\Gamma_e^* = \frac{|\eta_e|}{|h_e|} \sum |\Gamma_i|; M_e^r = \sum r_i |\Gamma_i|; M_e^h = \sum h_i |\Gamma_i|$$

Для ячеек более высокого уровня моменты, суммарные интенсивности и суммарные модули интенсивностей ВЭ рассчитываются простым суммированием соответствующих характеристик дочерних областей. При этом «среднее» положение и «средний» вектор вортонa определяются по формулам

$$\xi_e = \frac{M_e^r}{\Gamma_e^*}; \eta_e = \frac{M_e^h}{\Gamma_e^*}.$$

Важно отметить, что процедура построения дерева и вычисления характеристик всех ячеек является исключительно малозатратной, при этом расчеты показывают, что время построения дерева и вычисления его характеристик растет практически линейно с увеличением количества ВЭ. Отношение времени построения дерева ко времени вычисления парных влияний прямым методом для различного количества ВЭ в расчетной схеме приведено ниже.

Временные затраты на построение дерева по отношению к времени счета прямым методом, %

N_V	2 000	4 000	8 000	12 000	16 000	20 000
$\frac{t_{tree}}{t_{slow}} \cdot 100\%$	0,130	0,049	0,025	0,023	0,020	0,015

Таким образом, труднораспараллеливаемая операция построения дерева не является узким местом алгоритма быстрого метода. Следует также отметить, что в программной реализации процедуры построения дерева активно используется работа с динамической памятью, поэтому при работе с вычислительными машинами с распределенной памятью рассылка дерева на все вычислительные узлы является нетривиальной задачей. Наиболее рациональным способом решения возникающей проблемы представляется рассылка на все вычислительные узлы параметров всех вортонoв и независимое построение деревьев на всех узлах. В силу полной детерминированности алгоритма и идентичности исходных данных все деревья получатся одинаковыми.

Параллелепипеды 1–8-го уровней структуры дерева для задачи о моделировании эволюции вихревых колец приведены на рис. 5.

На третьем этапе вычисляются скорости ВЭ в областях нижнего уровня (т. е. не имею-

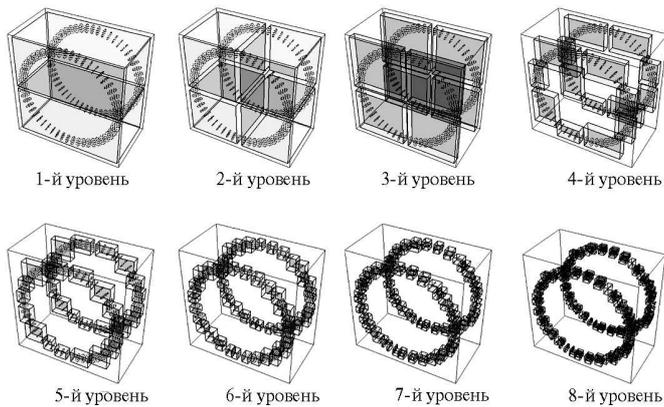


Рис. 5. Параллелепипеды 1—8-го уровней

щих дочерних областей): влияние ВЭ, находящихся в той же области, а также близкорасположенных ВЭ из других областей, рассчитывается непосредственно по закону Био — Савара, а затем осуществляется обход дерева, и влияние ВЭ, расположенных в достаточно удаленных областях, учитывается приближенно как влияние эквивалентных вихтонов.

Схема вычисления влияния на один из вихтонов от всех остальных вихтонов, образующих вихревые кольца, представлена на рис. 6. Непосредственное вычисление вихревого влияния возможно лишь от сравнительно небольшого числа вихтонов, находящихся рядом с контрольным; от элементов дерева, изображенных на рис. 6 параллелепипедами, влияние вычисляется как от эквивалентных вихтонов.

Критерием близости ячеек является отношение суммы длин их диагоналей к расстоя-

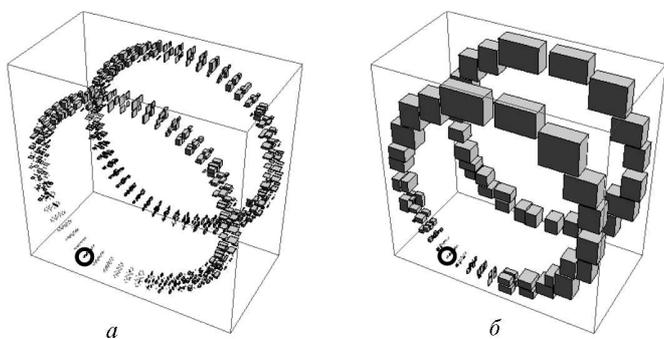


Рис. 6. Схема вычисления вихревого влияния на один из вихтонов (●) для $\theta = 0,10$ (а) и $\theta = 0,50$ (б)

нию между положениями эквивалентных вихтонов. На рисунке 6 критерием близости являлось превышение указанного отношения значения $\theta = 0,10$ (а) и $\theta = 0,50$ (б).

Очевидно, что при увеличении значения θ скорость счета повышается, однако точность получаемых результатов снижается. Значение $\theta = 0$ формально означает, что критерий дальности никогда не выполняется, следовательно алгоритм быстрого метода не работает и расчет производится прямым методом. Зависимости времени счета от θ для 2 000, 4 000, 8 000 и 20 000 ВЭ в расчетной схеме (все результаты отнесены к времени счета прямым методом в соответствующей задаче) представлены на рис. 7. Видно, что чем выше вычислительная сложность задачи, тем эффективнее оказывается использование быстрого метода.

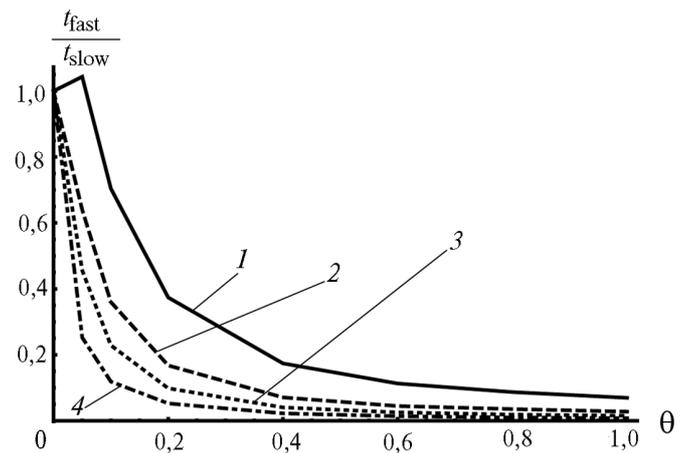


Рис. 7. Время счета с использованием быстрого метода в зависимости от значения θ :

1 — 2 000 ВЭ; 2 — 4 000 ВЭ; 3 — 8 000 ВЭ;
4 — 20 000 ВЭ

Следует отметить, что при фиксированном значении θ (т. е. при одном и том же предельном уровне погрешности) скорость расчета существенно зависит от максимального числа уровней дерева, которое задается в алгоритме его построения. При этом ошибка на 2—3 уровня от оптимального значения приводит к очень существенному росту затрат времени.

Расчеты показывают, что для обеспечения необходимой для практических целей точности значение критерия θ дальности двух ячеек дерева необходимо выбирать не более 0,2...0,3. Далее во всех расчетах полагалось $\theta = 0,2$.

Использование параллельных вычислительных технологий. Применение быстрого метода расчета парных взаимодействий ВЭ позволяет существенным образом сократить время счета. Отношение времени выполнения одного шага расчета в задаче о моделировании эволюции вихревых колец при использовании быстрого и прямого методов при достаточно большом числе ВЭ в расчетной схеме приведено ниже:

N_v	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000
$\frac{t_{fast}}{t_{slow}}$	0,090	0,053	0,033	0,029	0,022

Из представленных данных следует, что скорость решения задач с расчетными схемами, содержащими десятки тысяч ВЭ, представляющими интерес на практике, возрастает в десятки раз, однако время выполнения одного шага расчета, например, при $N_v = 50\ 000$ на персональной ЭВМ составляет более 20 с, что все равно неприемлемо, поскольку для решения представляющих практический интерес задач требуется выполнять не менее нескольких сотен, а чаще даже тысяч шагов.

Единственным путем дальнейшего ускорения вычислений является использование параллельных вычислительных технологий. Предпочтительным представляется использование технологии MPI, поскольку она является универсальной и позволяет производить расчеты как на системах с общей памятью (в частности, на персональных ЭВМ с многоядерными процессорами), так и на кластерных системах с распределенной памятью. Отметим, что при распараллеливании с использованием OpenMP для систем с общей памятью с 2–8 вычислительными ядрами выигрыш во времени счета по сравнению с применением MPI составлял не более 2...5%.

При использовании прямого метода расчета [4] идея распараллеливания операции вычисления вихревого влияния сводилась к разделению всего множества ВЭ на равные блоки по числу задействованных вычислительных узлов и последующему независимому вычислению скоростей всех ВЭ. При этом, очевидно, перед каждым шагом требуется рассылка на все вы-

числительные узлы полной информации о всех ВЭ. При достаточно большом числе ВЭ ускорение вычислений оказывается близким к линейному, например, для расчета на 16 вычислительных узлах при $N_v = 50\ 000$ ускорение составляет 15,97, однако общее время выполнения шага при таком расчете превышает 60 с. Значения ускорения расчета при использовании прямого метода вычисления вихревого влияния для различного числа ВЭ в расчетной схеме приведены в табл. 1.

Таблица 1

Ускорение при использовании MPI для решения задачи прямым методом

N_v	Число вычислительных узлов					
	1	2	4	8	12	16
5 000	1,00	2,00	3,90	7,81	11,53	14,92
10 000	1,00	2,00	3,97	7,90	11,85	15,45
50 000	1,00	2,00	3,98	7,93	11,88	15,97

Распараллеливание вычислений при использовании быстрого метода расчета вихревого влияния основано на сходной идее, однако по вычислительным узлам распределяются не отдельные ВЭ, а вершины дерева, т. е. ячейки, которые не имеют потомков. При этом после рассылки на все вычислительные узлы в начале каждого шага полной информации о всех ВЭ на них выполняются процедуры построения дерева. В случае неудачно выбранного критерия окончания деления ячеек-параллелепипедов в алгоритме построения дерева, а также при сильной несимметрии распределения завихренности в пространстве, предлагаемый метод разделения задачи на «подобласти» может приводить к существенному снижению равномерности загрузки вычислительных узлов, однако в практически интересных случаях получаемое ускорение оказывается довольно высоким. Значения ускорения расчета при использовании быстрого метода вычисления вихревого влияния ($\theta = 0,2$) для того же числа ВЭ в расчетной схеме, что и в табл. 1, а также для $N = 100\ 000$, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Ускорение при использовании MPI для решения задачи быстрым методом

N_V	Число вычислительных узлов					
	1	2	4	8	12	16
5 000	1,00	1,95	3,62	6,33	8,94	10,13
10 000	1,00	1,96	3,66	6,54	8,93	11,44
50 000	1,00	1,96	3,69	6,67	9,29	11,95
100 000	1,00	1,97	3,76	6,96	9,64	12,36

В случае $N_V = 50\,000$ при использовании 16 вычислительных узлов время выполнения одного шага расчета составляет менее 2 с, а при $N_V = 100\,000$ — менее 4 с, что позволяет использовать подобные алгоритмы на практике. Дальнейшее увеличение числа задействованных вычислительных узлов дает возможность при необходимости еще больше сократить время счета, поскольку, как следует из данных, приведенных в табл. 2, алгоритм далек от насыщения.

Время счета прямым методом без распараллеливания и быстрым методом на 16-ядерном кластере при сохранении приемлемой точности вычислений ($\theta = 0,2$) представлено на рис. 8. Время счета отнесено ко времени счета в задаче при $N_V = 10\,000$, при этом на рис. 8, а, наложен график функции $\bar{t} = 10^{-8} N_V^2$, а на рис. 8, б — график функции $\bar{t} = 1,2 \cdot 10^{-4} N_V$.

Линейный по числу ВЭ рост временных затрат при использовании быстрого метода объясняется разнонаправленным влиянием двух факторов: сам по себе алгоритм быстрого метода обеспечивает вычислительную сложность, пропорциональную $N_V \lg N_V$, а эффективность распараллеливания с ростом N_V несколько повышается.

Суммарное ускорение за счет использования быстрого метода и параллельного алгоритма представлено на рис. 9. В качестве базового выбиралось время решения задачи прямым методом без распараллеливания. Видно, что ускорение растет с увеличением N_V практически линейно, на рисунок наложен график функции $u = 0,011 N_V$.

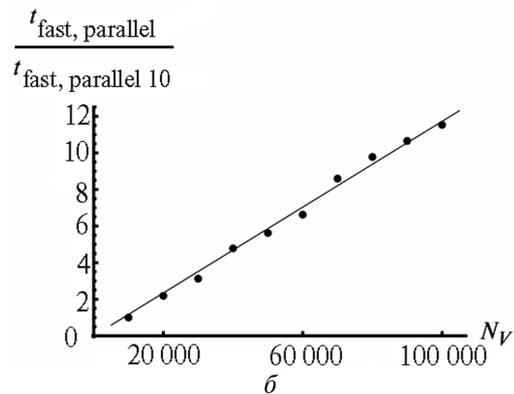
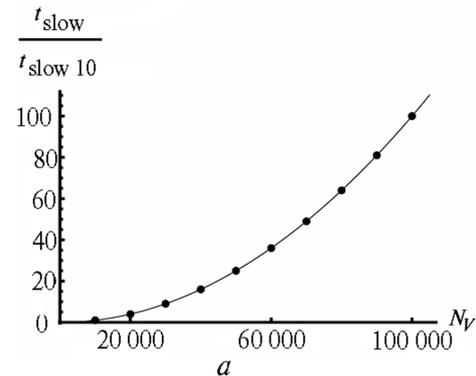


Рис. 8. Время счета при различных значениях N_V с использованием прямого метода (а) и быстрого метода (б)

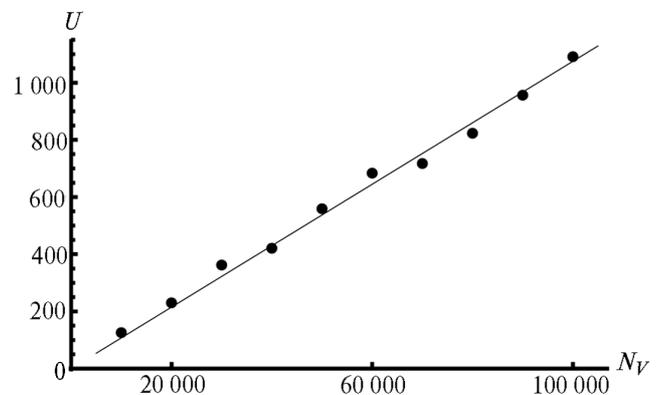


Рис. 9. Достигнутое ускорение за счет использования быстрого метода и параллельного алгоритма при различных значениях N_V по сравнению с расчетом прямым методом без распараллеливания

Выводы

1. Использование модели симметричного вортон-отрезка позволяет достаточно точно моделировать эволюцию вихревых структур, при этом для решения актуальных задач требуется вводить в расчетные схемы тысячи и десятки тысяч ВЭ.

2. Показано, что известные подходы, связанные с использованием параллельных вычислительных алгоритмов, а также приближенных быстрых методов, аналогичных методам решения гравитационной задачи N тел, по отдельности не позволяют получить ускорение расчетов, которое сделало бы возможным решение таких задач на практике. В то же время одновременное применение обоих подходов дает возможность достичь суммарного увеличения производительности в 100–1 000 раз при проведении расчета на 16-ядерном вычислительном кластере [12]. При этом время выполнения одного шага расчета составляет порядка нескольких секунд, что позволяет решать большее число актуальных инженерных задач за приемлемое время.

3. Использование технологии MPI позволяет разработать переносимый и универсальный программный модуль: расчеты могут проводиться как на многоядерных системах с общей памятью (при этом снижение эффективности по сравнению с применением технологии OpenMP не превышает нескольких процентов), так и на кластерных системах.

Литература

1. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000. 313 p.
2. Lewis R.I. *Vortex Element Methods For Fluid Dynamic Analysis Of Engineering Systems*. Cambridge University Press, 2005. 592 p.
3. Андронов П.Р., Гуверниук С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
4. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Применение параллельных алгоритмов при решении задач гидродинамики методом вихревых элементов // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 105–110.
5. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Модель симметричного вортон-отрезка для численного моделирования пространственных течений идеальной несжимаемой среды // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 4. С. 62–71.
6. Новиков Е.А. Обобщенная динамика трехмерных вихревых особенностей (вортон) // Журнал эксп. и теор. физики. 1983. Т. 84. Вып. 3. С. 975–981.
7. Alkemade A.J.Q. On vortex atoms and vortons. PhD Thesis, TU-Delft, April 1994. 209 p.
8. Marchevsky I.K., Shcheglov G.A. 3D vortex structures dynamics simulation using vortex fragmentons // 6-th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), September 10–14, 2012, Vienna, Austria, Proceedings. Vienna University of Technology. 20 p.

9. Богомолов Д.В., Марчевский И.К., Сетуха А.В., Щеглов Г.А. Численное моделирование движения пары вихревых колец в идеальной жидкости методами дискретных вихревых элементов // Инженерная физика. 2008. № 4. С. 8–14.

10. Barnes J., Hut P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm // Nature. 1986. Vol. 324. P. 446–449.

11. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения «задачи N тел» при вихревом моделировании течений // ЖВМиМФ. 2009. Т. 49. № 8. С. 1458–1465.

12. Лукин В.В., Марчевский И.К. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч. 1. Инструментарий и возможности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 4. С. 28–44.

References

1. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Second ed. New York, Cambridge University Press, 2000. 313 p.
2. Lewis R.I. *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge University Press, 2005. 592 p.
3. Andronov P.R., Guverniuk S.V., Dynnikova G.Ia. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex methods for unsteady hydrodynamic loads]. Moscow, Lomonosov Moscow State University publ., 2006. 184 p.
4. Marchevskii I.K., Shcheglov G.A. Primenenie parallel'nykh algoritmov pri reshenii zadach gidrodinamiki metodom vikhrevykh elementov [Application of parallel algorithms for solving hydrodynamic problems by the vortex element method]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods and Programming]. 2010, vol. 11, pp. 105–110.
5. Marchevskii I.K., Shcheglov G.A. Model' simmetrichnogo vortona-otrezka dlia chislennogo modelirovaniia prostranstvennykh techenii ideal'noi neshhimaemoi sredy [Wharton-symmetric model of the segment for the numerical simulation of three-dimensional flows of ideal incompressible media]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki* [Herald named after N.E. Bauman. Ser. Natural sciences]. 2008, no. 4, pp. 62–71.
6. Novikov E.A. Obobshchennaia dinamika trekhmernykh vikhrevykh osobennostei (vortonov) [Generalized dynamics of three-dimensional vortex features (Wharton)]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1983, vol. 84, issue 3, pp. 975–981.
7. Alkemade A.J.Q. *On vortex atoms and vortons*. PhD Thesis, TU-Delft, April 1994. 209 p.
8. Marchevsky I.K., Shcheglov G.A. *3D vortex structures dynamics simulation using vortex fragmentons*. 6-th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), September 10–14, 2012, Vienna, Austria, Proceedings. Vienna University of Technology. 20 p.
9. Bogomolov D.V., Marchevskii I.K., Setukha A.V., Shcheglov G.A. Chislennoe modelirovanie dvizheniia pary vikhrevykh kolets v ideal'noi zhidkosti metodami diskretnykh vikhrevykh elementov [Numerical modelling of movement of pair vortical rings in the ideal liquid methods of discrete vortical elements]. *Inzhenernaia fizika* [Engineering Physics]. 2008, no. 4, pp. 8–14.
10. Barnes J., Hut P. A hierarchical force-calculation algorithm. *Nature*. 1986, vol. 324, pp. 446–449.
11. Dynnikova G.Ia. Ispol'zovanie bystrogo metoda resheniia «zadachi N tel» pri vikhrevom modelirovanii techenii [Fast technique for solving the n -body problem in flow simulation by vortex methods]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2009, vol. 49, no. 8, pp. 1458–1465. Doi: 10.1134/S0965542509080090.

12. Lukin V.V., Marchevskii I.K. Uchebno-eksperimental'nyi vychislitel'nyi klaster. Ch. 1. Instrumentarii i vozmozhnosti [Computing Cluster for Training and Experiments. Part 1. Tools and Possibilities]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser.*

Estestvennye nauki [Herald named after N.E. Bauman. Ser. Natural sciences]. 2011, no. 4, pp. 28–44.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Информация об авторах

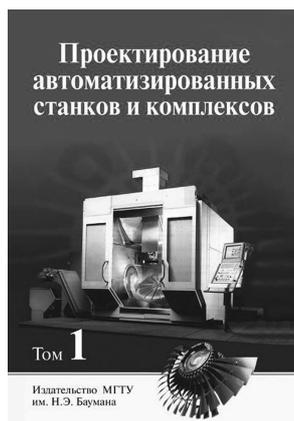
МАРЧЕВСКИЙ Илья Константинович (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: iliamarchevsky@mail.ru).

ЩЕГЛОВ Георгий Александрович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: georg@energoman.ru).

Information about the authors

MARCHEVSKIY Ilya Konstantinovich (Moscow) — Cand. Sc. (Phys. Math.), Associate Professor of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: iliamarchevsky@mail.ru).

SHCHEGLOV Georgiy Aleksandrovich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: georg@energoman.ru).



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышел в свет учебник «Проектирование автоматизированных станков и комплексов». В 2-х томах. Под редакцией П.М. Чернянского.

В учебнике изложены основы проектирования кинематической схемы, несущей системы, привода, надежности и устойчивости динамической системы, а также художественного проектирования станков. Рассмотрены принципы работы и устройства электрофизических и электрохимических станков, специальных станков с циклоидальной схемой обработки. Особое внимание уделено физически обоснованным методам расчета точности и устойчивости динамической системы станков, оптимальных размеров и жесткости шпиндельных узлов и др. Приведена теория и расчет точности станков с использованием упругофрикционной модели точности.



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышло в свет учебное пособие «Ядерные ракетные двигатели и энергетические установки». Введение в теорию, расчет и проектирование» автора А.А. Дорофеев.

В пособии изложены элементарные основы качественной теории нейтронно-физических и теплофизических рабочих процессов в ракетных двигателях и космических энергетических установках с ядерными источниками энергии. Приведены методики предпроектной оценки параметров тепловыделяющих сборок и радиационной защиты ядерных реакторов ракетных двигателей с твердой активной зоной с системой управления, а также сведения о конструировании и проектировании их газожидкостных систем в системной методологии тетрады «функция — конструкция — материал — технология» при приоритете радиационной ядерной безопасности.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.

Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;

press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru