



**ВИНОГРАДОВ**  
**Юрий Иванович**  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**VINOGRADOV**  
**Yuriy Ivanovich**  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)

## Влияние жесткости шпангоута на механику деформирования цилиндрической оболочки

**Ю.И. Виноградов**

*При воздействии нагрузки на оболочку через шпангоут она распределяется по ее кольцевой поверхности. В зависимости от жесткостных характеристик шпангоута напряженно-деформированное состояние оболочки изменяется. Для оценки прочности подкрепленной шпангоутом оболочки важно знать это изменение. Для этого необходимо построить математическую модель механики совместного деформирования оболочки и шпангоута и решить численно задачу прочности подкрепленной оболочки. Решение данной задачи предполагает, что шпангоут идеализируется упругой кольцевой линией, наделенной естественными жесткостными характеристиками, которая совмещается со срединной поверхностью оболочки. Математическая модель механики деформирования шпангоута (система уравнений равновесия элемента кольцевой линии, геометрические и физические соотношения) описывается системой из четырех линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения составляющих перемещения ее точек и угла закручивания. Построенная математическая модель позволила дать количественную оценку имеющимся моделям, которые использовались при анализе конструкторских решений. Расчеты в широком диапазоне изменения параметров оболочки и шпангоута показали, что использование упрощенных математических моделей шпангоута приводит к недопустимому, даже качественному, изменению результатов, которые определяют прочность подкрепленной шпангоутом оболочки.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, шпангоут, математическая модель механики деформирования шпангоута, жесткость шпангоута.

## The influence of the frame stiffness on the deformation of a cylindrical shell

**Y.I. Vinogradov**

*The load acting on a shell through its frame is distributed circumferentially over the shell surface. The stress-strain state of this shell depends on the frame stiffness. To assess the strength of the stiffened shell, it is necessary to develop a mathematical model of joint deformation of the shell and frame and solve this problem numerically. In this paper, the frame is represented by an elastic circle with appropriate stiffness characteristics, which lies in the middle surface of the shell. The mathematical model of deformation of the frame includes the set of equilibrium equations for a circular element and geometrical and physical relationships. In fact, it is a system of four linear ordinary differential equations*

*solvable for the displacement components of a frame point and the angle of twist. The proposed mathematical model made it possible to estimate available models used for the analysis of design solutions. The calculations in a wide range of parameters of shells and frames showed that simplified mathematical models of a frame do not provide an adequate accuracy of the results, which is unacceptable for evaluating strength of shells stiffened by frames.*

**Keywords:** cylindrical shell, frame, mathematical model of deformation of a frame, frame stiffness.

Избежать локальной передачи сил и моментов на оболочку в составе конструкции, например, рамного соединения ступеней ракет, крепления рулей летательных и подводных аппаратов и т. п., невозможно. Для снижения напряжений в оболочке нагрузку от сил и моментов распределяют по оболочке. Типовым конструкторским решением такой задачи является подкрепление оболочки шпангоутом, на который действуют силы и моменты. При этом силы и моменты передаются распределенными. Для рационального подкрепления оболочки необходимо подобрать жесткость шпангоута, отвечающую противоречивым требованиям: с одной стороны, обеспечить прочность оболочки, с другой, — требование по допустимой величине веса оболочки, подкрепленной шпангоутом.

Известно, что распределение сил и моментов, приходящих на оболочку, зависит от его жесткости. Чем больше жесткость шпангоута, тем равномернее передается нагрузка на оболочку. Однако при этом растет вес подкрепленной оболочки, иногда до недопустимых значений.

Таким образом, в конструкторской практике актуальной является задача выбора жесткостных характеристик шпангоута для обеспечения весового совершенства конструкции. Эту задачу обычно решают вариантными расчетами на прочность оболочки и подкрепляющего ее шпангоута. При этом, как правило, параметры оболочки задаются, а место размещения и же-

сткостные характеристики шпангоута подбираются вариантными вычислениями. Проблема решается путем математического моделирования механики деформирования оболочки и шпангоута, а также моделирования подкрепления оболочки шпангоутом и количественного анализа на ЭВМ.

В предлагаемой работе выбрана математическая модель механики деформирования замкнутой в окружном направлении цилиндрической оболочки постоянной толщины из изотропного материала [1, 2], построена математическая модель механики деформирования шпангоута, исследовано влияние распространенных в расчетной практике допущений на жесткостные характеристики шпангоута: жесткость на изгиб при деформировании в его плоскости, из его плоскости, жесткости на растяжение и кручение.

**Математическая модель механики деформирования шпангоута.** Шпангоут моделируется упругой кольцевой линией, наделенной его жесткостными характеристиками.

Положительные направления осей координат, перемещений, усилий и моментов для упругой кольцевой линии шпангоута показаны на рис. 1.

Уравнения равновесия элемента шпангоута имеют следующий вид:

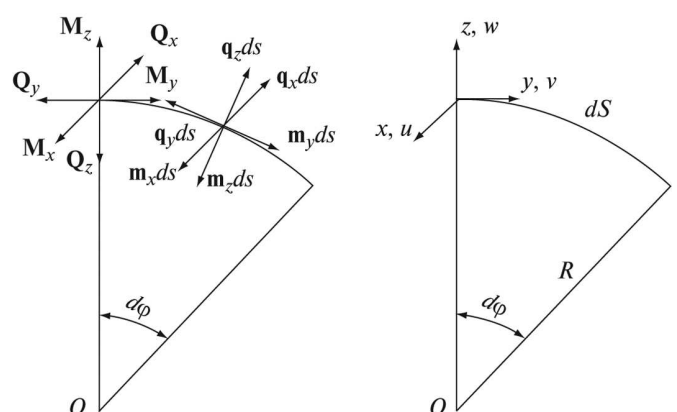


Рис. 1. Силовые факторы, действующие в сечении шпангоута, интенсивности внешних усилий и моментов

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{d\varphi} - q_x R = 0; \quad \frac{dQ_y}{d\varphi} + Q_z - q_y R = 0; \\ \frac{dQ_z}{d\varphi} - Q_y - q_z R = 0; \quad \frac{dM_x}{d\varphi} - Q_z R = 0; \quad (1) \\ \frac{dM_y}{d\varphi} + M_z - m_y R = 0; \quad \frac{dM_z}{d\varphi} + Q_x R - M_y = 0, \end{aligned}$$

где  $Q_y, Q_z, Q_x$  — соответственно усилия растяжения кольцевой линии и перерезывающие усилия, направленные по радиусу и перпендикулярно плоскости кольцевой линии;  $M_y, M_z, M_x$  — моменты в сечении шпангоута, векторы которых направлены соответственно по касательной  $y$  к кольцевой линии, по нормали  $z$  и бинормали  $x$ ;  $q_y, q_z, q_x$  — интенсивности внешних усилий, направленные соответственно по касательной  $y$ , нормали  $z$  и бинормали  $x$  к упругой кольцевой линии шпангоута;  $m_y, m_z, m_x$  — интенсивности внешних моментов, изгибающих упругую кольцевую линию шпангоута в ее плоскости, из ее плоскости и закручивающий ее момент.

Исключая перерезывающие усилия  $Q_x, Q_z$  из уравнений равновесия (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{dM_y}{d\varphi} - \frac{d^2 M_z}{R d\varphi^2} - q_x R = 0; \quad \frac{dQ_y}{d\varphi} + \frac{dM_x}{R d\varphi} - q_y R = 0; \\ \frac{d^2 M_x}{R d\varphi^2} - Q_y - q_z R = 0; \quad \frac{dM_y}{d\varphi} + M_z - m_y R = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $R$  — радиус упругой кольцевой линии.

Физические соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_y = EF\varepsilon, \quad M_x = EJ_x \chi_1; \\ M_y = GJ_{кр} \Theta, \quad M_z = EJ_z \chi_2, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $EF, EJ_x, EJ_z, GJ_{кр}$  — жесткости шпангоута на растяжение (сжатие), на изгиб в плоскости кольцевой линии и из ее плоскости и на закручивание соответственно;  $\varepsilon, \chi_1, \chi_2, \Theta$  — линейная, изгибные и угловая деформации.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{R} \left( \frac{dv}{d\varphi} + w \right); \quad \chi_1 = \frac{1}{R^2} \left( -\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{dv}{d\varphi} \right); \\ \chi_2 = \frac{1}{R^2} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - R\beta \right); \quad \Theta = \frac{1}{R^2} \left( \frac{du}{d\varphi} - R \frac{d\beta}{d\varphi} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь  $\beta$  — угол поворота сечения шпангоута при закручивании.

Исключая деформации в физических соотношениях (3) с помощью геометрических соотношений (4), подставляя полученные выражения для усилия растяжения (сжатия) и моментов в уравнения равновесия, получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях (математическую модель механики деформирования шпангоута):

$$\begin{aligned} \frac{GJ_{кр}}{R^3} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + R \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} \right) - \frac{EJ_z}{R^3} \left( \frac{d^4 u}{d\varphi^4} - R \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} \right) = q_x R; \\ \frac{GJ_{кр}}{R^3} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + R \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} \right) + \frac{EJ_z}{R^3} \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - R\beta \right) = m_y; \\ -\frac{EJ_x}{R^3} \left( \frac{d^4 w}{d\varphi^4} - \frac{d^3 v}{d\varphi^3} \right) - \frac{EF}{R} \left( w + \frac{dv}{d\varphi} \right) = q_z R; \quad (5) \\ \frac{EJ_x}{R^3} \left( -\frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) + \frac{EF}{R} \left( \frac{dw}{d\varphi} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) = q_y R, \end{aligned}$$

где  $u, v, w$  — составляющие перемещения точек упругой кольцевой линии;  $J_x, J_y, J_{кр}, F$  — моменты инерции и площадь сечения шпангоута;  $E$  — модуль упругости материала шпангоута.

Как и для оболочек, которые подкрепляют шпангоуты, решение системы уравнений (5) ищем в форме тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos(n\varphi); \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(n\varphi); \\ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cos(n\varphi); \quad \beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(n\varphi). \quad (6) \end{aligned}$$

При этом внешняя нагрузка, например, в виде сосредоточенных сил и моментов, раскладывается в ряды:

$$\begin{aligned} P_z = q_{z0} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{zn} \cos(n\varphi); \\ M_y = m_{y0} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{yn} \cos(n\varphi) \text{ и т. д.} \quad (7) \end{aligned}$$

В итоге, система дифференциальных уравнений (5) приводится к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{GJ_{\text{кр}}}{R^3}(u_n + R\beta_n)n^2 - \frac{EJ_z}{R^3}(n^2u_n + R\beta_n)n^2 = q_{xn}R; \\
 & -\frac{GJ_{\text{кр}}}{R^3}(u_n + R\beta_n)n^2 - \frac{EJ_z}{R^3}(n^2u_n + R\beta_n) = m_{yn}; \\
 & -\frac{EJ_x}{R^3}(nw_n + v_n)n^3 - \frac{EF}{R}(w_n + nv_n) = q_{zn}R; \quad (8) \\
 & -\frac{EJ_x}{R^3}(nw_n + v_n)n^2 - \frac{EF}{R}(w_n + nv_n)n = q_{yn}R.
 \end{aligned}$$

Разложения (6) и (7) справедливы, если внешняя нагрузка на шпангоут симметрична относительно начала координаты  $\varphi$ .

В результате решения системы алгебраических уравнений для каждого номера  $n$  гармоники определяем параметры  $u_n, v_n, w_n, \beta_n$  тригонометрических рядов (6) искомых величин  $u, v, w, \beta$ .

Усилия и моменты в шпангоуте находим с помощью тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 Q_y &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{yn} \cos(n\varphi); M_x = \sum_{n=1}^{\infty} M_{xn} \cos(n\varphi); \\
 M_y &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{yn} \sin(n\varphi); M_z = \sum_{n=1}^{\infty} M_{zn} \cos(n\varphi). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Значения функциональных коэффициентов  $Q_{yn}, M_{xn}, M_{yn}, M_{zn}$  этих рядов определяем по формулам:

$$\begin{aligned}
 Q_{yn} &= \frac{EF}{R}(w_n + nv_n); M_{xn} = \frac{EJ_x}{R^2}(nw_n + v_n)n; \\
 M_{yn} &= -\frac{GJ_{\text{кр}}}{R^2}(u_n - R\beta_n)n; \quad (10) \\
 M_{zn} &= -\frac{EJ_z}{R^2}(n^2u_n + R\beta_n),
 \end{aligned}$$

которые получены с помощью физических соотношений (3), геометрических соотношений (4) и представления перемещений в виде рядов (6).

При математическом моделировании подкрепления оболочек шпангоутами последние представляем упругими кольцевыми линиями, наделенными всеми жесткостными характеристиками шпангоутов. Предполагаем, что упругая кольцевая линия совпадает со средней поверхностью оболочки.

Взаимодействие оболочки и шпангоута моделируем действием сил и моментов, которые возникают в деформированной оболочке, на упругую кольцевую линию. Эти силы и моменты имеют смысл внешней нагрузки.

Систему алгебраических уравнений (8) представим в матричной форме:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ R\beta_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta T_{1n} \frac{1-v^2}{Eh} \\ \Delta S_n \frac{1-v^2}{Eh} \\ \Delta Q_{1n} \frac{12(1-v^2)}{Eh} \\ \Delta M_{1n} \frac{12(1-v^2)}{Eh} \end{pmatrix}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

В сокращенной записи

$$G\mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{f}$  — столбец параметров сил и моментов, действующих на упругую кольцевую линию со стороны сопряженных с ней оболочек;  $\mathbf{p}$  — столбец параметров перемещений и угла закручивания;  $G$  — матрица жесткости упругой кольцевой линии, элементами которой являются следующие параметры:

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= -n^2(\alpha_1 n^2 + \beta_1); d_{14} = -n^2(\alpha_1 + \beta_1); \\
 d_{41} &= -n^2(\alpha_2 + \beta_2); d_{44} = -(\alpha_2 + n^2\beta_2); \\
 d_{32} &= -n(\alpha_3 n^2 + \beta_3); d_{33} = -(\alpha_3 n^4 + \beta_3); \\
 d_{22} &= -n^2(\alpha_4 + \beta_4); d_{23} = -n(\alpha_4 n^2 + \beta_4); \\
 \alpha_1 &= \frac{EJ_z}{R^3} \frac{1-v^2}{Eh}; \alpha_4 = \frac{EJ_x}{R^3} \frac{1-v^2}{Eh}; \\
 \beta_1 &= \frac{GJ_{\text{кр}}}{R^3} \frac{1-v^2}{Eh}; \beta_4 = \frac{EF}{R} \frac{1-v^2}{Eh}; \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{c^2}; \\
 \alpha_3 &= \frac{\alpha_4}{c^2}; \beta_2 = \frac{\beta_1}{c^2}; \beta_3 = \frac{\beta_4}{c^2}; c^2 = \frac{h^2}{12R^2}.
 \end{aligned}$$

**Влияние жесткостных характеристик шпангоута на состояние оболочки.** Для определения влияния жесткостных характеристик шпангоута на состояние оболочки выполнены параметрические исследования для консольно закрепленной цилиндрической оболочки, усиленной шпангоутом на свободном краю. При этом использовалась математическая модель механики деформирования цилиндрической оболочки В.З. Власова [1, 2]. На шпангоут действует сосредоточенная радиальная сила  $P_z$  (рис. 2). Задачу решали методом сопряжения

интервалов [3–5]. Основное внимание уделено влиянию жесткостных характеристик шпангоута на внутренние силовые факторы, которые возникают в оболочке в окрестности сопряжения ее со шпангоутом. Дана количественная оценка широко распространенных допущений об отсутствии жесткости шпангоута при изгибе из его плоскости и об отсутствии жесткости при его закручивании.

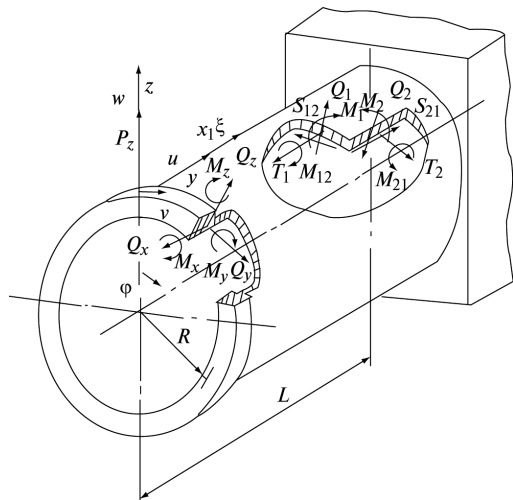


Рис. 2. Расчетная схема, внутренние силовые факторы в сечениях оболочки и шпангоута

Исследования выполняли для оболочки с параметрами  $\frac{l}{R} = 3$  и  $\frac{R}{h} = 50$  и шпангоута с квадратным поперечным сечением  $0,5h \times 0,5h$ ;  $5h \times 5h$ ;  $20h \times 20h$ ;  $30h \times 30h$ ;  $50h \times 50h$  при следующих условиях:

шпангоут наделен всеми жесткостными характеристиками (рис. 4, кривая а);

отсутствует жесткость шпангоута на изгиб из его плоскости,  $EJ_z = 0$  (рис. 4, кривая б);

отсутствует жесткость при закручивании шпангоута,  $GJ_y = 0$  (рис. 4, кривая в);

шпангоут обладает изгибной жесткостью только в своей плоскости,  $GJ_y = 0$ ,  $EJ_z = 0$  (рис. 4, кривая г).

Моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  для шпангоута определяли по формулам  $J_x = J_z = \frac{b^4}{12}$ ;  $J_y = k_1 b^4$ , где  $b = 0,5h$ ;  $5h$  и т. д.,  $k = 0,1406$  [6].

Изменения искомых величин в безразмерном виде  $\bar{T}_{1,2} = T_{1,2} \frac{\pi R}{P_z}$  и  $\bar{M}_{1,2} = M_{1,2} \frac{\pi}{P_z}$  вдоль об-

разующей оболочки, проходящей через точку приложения силы  $P_z$  в малой ее окрестности  $0 \leq \xi \leq \frac{L}{5R}$ , и шпангоута сечением  $30h \times 30h$  показаны на рис. 3–6 сплошными линиями.

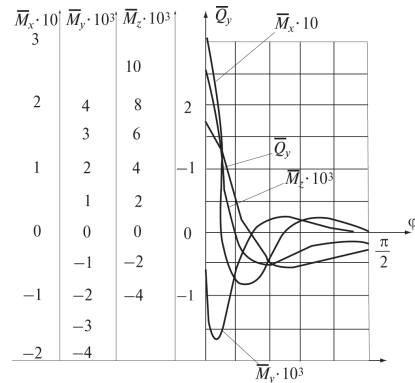


Рис. 3. Внутренние силовые факторы

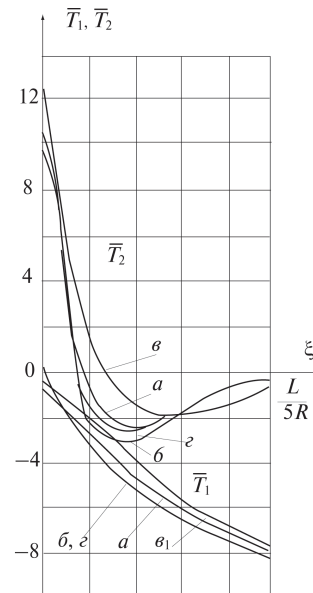


Рис. 4. Изменение усилий в оболочке вдоль образующей при  $\varphi = 0$

Результаты вычислений показали, что значения искомых величин для оболочки, подкрепленной шпангоутом с размерами  $0,5h \times 0,5h$ , совпадают (что и следовало ожидать) с соответствующими для неподкрепленной оболочки. Они приведены на рис. 5 и 6 пунктирными и штрихпунктирными линиями соответственно.

Из параметрического исследования, некоторые результаты которого представлены на рис. 3–6, следует, что необоснованные часто используемые допущения при построении математических моделей механики деформирования шпангоутов для расчета подкрепленных



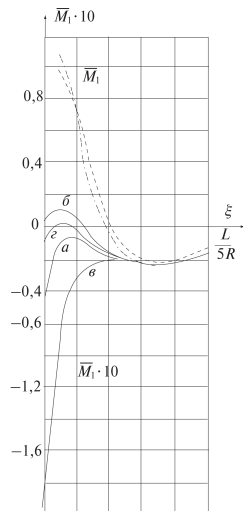


Рис. 5. Изменение продольного момента в оболочке вдоль образующей при  $\varphi = 0$

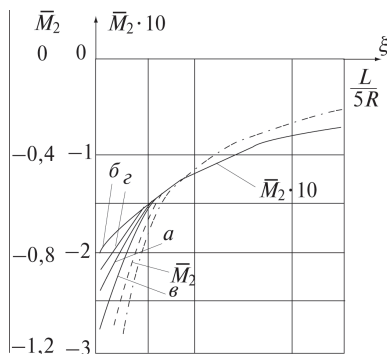


Рис. 6. Изменение окружного момента в оболочке вдоль образующей при  $\varphi = 0$

оболочек могут приводить к результатам даже качественно отличающимся от тех, которые находят без каких-либо допущений (см. рис. 5).

## Выводы

Полученная математическая модель механики деформирования шпангоута позволила количественно оценить используемые для конструкторских решений упрощенные математические модели механики деформирования шпангоута. Показано, что упрощенные математические модели механики деформирования шпангоута приводят к результатам, характери-

зующим прочность оболочки с недопустимой погрешностью.

## Литература

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. Власов В.З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
3. Виноградов Ю.И., Ключев Ю.И. Тонкостенные осесимметричные конструкции из композиционных материалов (метод решения задач статики и динамики)//Механика композиционных материалов и конструкций. ИПРИМ РАН, 1984. Т. 4. № 1. С. 57–72.
4. Vinogradov Yu., Bakulin V. Numerical method investigation of shells under the impact of concentrated load// Matematicke metody v technickykh vedach mathematical in engineering/ Karlovy Vary: Czechoslovak Science and Technical Society Charles University Prague — Faculty of Mathematics and Physics Slovak society for Mechanics subsidiary of Slovak Academy of Sciences, Central Research Institute SKODA Concern, Concern Enterprise Pzen, 1986. Vol. 1. P. 411–412.
5. Виноградов Ю.И. Методы вычислений и построение алгоритмов решения краевых задач строительной механики // Докл. АН СССР, 1988. Т. 298. № 2. С. 308–313.
6. Варвак П.М., Рябов А.Ф. Справочник по теории упругости. Киев: Будевельник, 1971. 419 с.

## References

1. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* [General theory of shells and its application in engineering]. Moscow, Gostekhizdat publ., 1949, 784 p.
2. Vlasov V.Z. *Izbrannyye trudy* [Selected Works]. Moscow, AN SSSR publ., 1962, vol. 1. 528 p.
3. Vinogradov Iu.I., Kliuev Iu.I. *Tonkostennyye osesimmetrichnyye konstruksii iz kompozitsionnykh materialov (metod resheniya zadach statiki i dinamiki)* [Thin-walled axisymmetric structures made of composite materials (method of solving problems of statics and dynamics)]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* [Journal on Composite Mechanics and Design]. Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences publ., 1984, vol. 4, no. 1, pp. 57–72.
4. Vinogradov Yu., Bakulin V. Numerical method investigation of shells under the impact of concentrated load. *Matematicke metody v technickykh vedach mathematical in engineering*. Karlovy Vary, Czechoslovak Science and Technical Society Charles University Prague — Faculty of Mathematics and Physics Slovak society for Mechanics subsidiary of Slovak Academy of Sciences, Central Research Institute SKODA Concern, Concern Enterprise Pzen, 1986, vol. 1, pp. 411–412.
5. Vinogradov Iu.I. *Metody vychislenii i postroenie algoritmov resheniya kraevykh zadach stroitel'noi mekhaniki* [Calculation methods and the construction of algorithms for solving boundary value problems of structural mechanics]. Report of the Academy of Sciences of the USSR publ., 1988, vol. 298, no. 2, pp. 308–313.
6. Varvak P.M., Riabov A.F. *Spravochnik po teorii uprugosti* [Handbook of the theory of elasticity]. Kiev, Budev'el'nik publ., 1971. 419 p.

Статья поступила в редакцию 26.04.2013

## Информация об авторе

**ВИНОГРАДОВ Юрий Иванович** (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).

## Information about the author

**VINOGRADOV Yuriy Ivanovich** (Moscow) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Professor of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).