УДК 539.3

Функции Коши—Крылова в расчетах на прочность пластин и оболочек

Ю.И. Виноградов

ВИНОГРАДОВ
Юрий Иванович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

VINOGRADOV
Yuriy Ivanovich
(Moscow, Russian Federation,
Bauman Moscow State
Technical University)

Решение краевых задач теории пластин и оболочек актуально при уменьшении веса тонкостенных конструкций, например, аэрокосмических систем. При этом проблемой является построение эффективных вычислительных алгоритмов с устойчивым счетом для решения задач прочности тонкостенных элементов конструкций. Примером решения данной задачи являются работы А.Н. Крылова, который, используя для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами метод Коши, получил фундаментальную систему функций — решение дифференциального уравнения 4-го порядка для расчета балки, лежащей на упругом основании, которая удовлетворяет произвольным начальным условиям. В предлагаемой работе аналогичная система функций названа функциями Коши—Крылова и определена средствами матричной алгебры для известной произвольной фундаментальной системы функций. Построен адаптивный к ЭВМ простейший способ определения функций Коши—Крылова для дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами механики деформирования пластин и оболочек. Для преодоления проблемы устойчивости счета при решении краевых задач механики деформирования пластин и оболочек предложено использовать мультипликативный метод переноса краевых условий в произвольно заданную точку и формирования системы алгебраических уравнений, в результате решения которой определяются величины, характеризующие прочность пластины или оболочки. Получен аналитический метод решения краевых задач прочности пластин и оболочек, который отличается приоритетной новизной простого решения задач механики деформирования пластин, оболочек и определенного класса тонкостенных конструкций.

Ключевые слова: прочность, пластина, оболочка, дифференциальные уравнения, функции Коши—Крылова, краевая задача.

The use of Cauchy-Krylov functions for the calculation of stresses and strains in plates and shells

Y.I. Vinogradov

Solving the boundary value problems in the theory of plates and shells is topical for low-weight thin-walled structures used in aerospace systems. In this case, the problem is to develop computationally efficient and robust algorithms for solving strength problems for thin-walled structural elements. An example of a solution to this problem is the fundamental system of functions suggested by A. Krylov to solve differential equations of the 4-th order describing a beam on an elastic foundation under arbitrary initial conditions. The approach is based on the Cauchy method applied to a system of ordinary differential equations with constant coefficients. In this paper, a similar set of functions called the Cauchy-Krylov functions is determined by the matrix algebra for a given *arbitrary fundamental system of functions. A simple computer-adaptive technique is constructed to determine the Cauchy-Krylov functions for differential equations with constant and variable coefficients in the mechanics of deformation of plates and shells. To overcome the problem of robustness of algorithms in the mechanics of plates and shells, a multiplicative method is used to transfer boundary conditions to an arbitrarily given point and to form a system of algebraic equations. Solving this system yields strength parameters of a plate or shell. A new analytical method is suggested for solving boundary value problems of mechanics of plates, shells and a certain class of thin-walled structures.*

Keywords: strength, plate, shell, differential equations, Cauchy-Krylov functions, boundary value problem.

Функциями Коши—Крылова будем называть такие функции, которые являются решением однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}
y_1(0)=1,\ y_1^{'}=0,\ \ldots,\ y_1^{(n-2)}(0)=0,\ y_1^{(n-1)}(0)=0;\\
y_2(0)=0,\ y_2^{'}=1,\ \ldots,\ y_2^{(n-2)}(0)=0,\ y_2^{(n-1)}(0)=0;\\
\ldots\\
y_{n-1}(0)=0,\ y_{n-1}^{'}=0,\ \ldots,\ y_{n-1}^{(n-2)}(0)=1,\ y_{n-1}^{(n-1)}(0)=0;\\
y_n(0)=0,\ y_n^{'}=0,\ \ldots,\ y_n^{(n-2)}(0)=0,\ y_n^{(n-1)}(0)=1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь верхние индексы обозначают производные, а нижние — номера функций системы, которая является решением дифференциального уравнения n-го порядка.

Очевидно, что при нулевом значении аргумента функции Коши—Крылова образуют единичную матрицу.

В сокращенной форме система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j \quad i=1,\ 2,\ldots,n,$$

а в матричной форме

$$\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y},\ \ (*)^{'}=\frac{d}{dx}(*); \tag{2}$$

$$y=\|\,y,y^{'},\ldots,y^{(n-2)},y^{(n-1)}\|^{\mathrm{т}},\ \mathbf{A}=\|\,a_{ij}\|_1^n,$$
$$i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Допустим, что какое-либо решение уравнения (2) в виде системы функций y_i, $i=1,2,\ldots,n$, известно или найдено нами. В таких условиях А.Н. Крылов впервые получил систему функций для дифференциального уравнения 4-го порядка, описывающего изгиб балки, лежащей на упругом основании [1]. Полученная система функций удовлетворяла условиям (1), так как эти условия Крылов использовал в качестве начальных, когда применил метод Коши интегрирования системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Замечательная своей общностью мето́да не является простой в приложениях и, вероятно по этой причине, не получила распространения. Для дифференциальных уравнений механики деформирования пластин и оболочек фундаментальные системы функций со свойствами (1) не были получены.

Если имеется произвольная фундаментальная система функций для дифференциального уравнения (2), то его решение с произвольными постоянными интегрирования всегда можно представить в матричной форме

$$\boldsymbol{y}=\Phi\boldsymbol{c}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{c}=\|\,c_1,c_2,\ldots,\ c_n\|^{\mathrm{т}}$ — столбец произвольных постоянных интегрирования; $\Phi=\|\,f_{ij}\|_1^n$— матрица, элементами которой являются функции фундаментальной системы, удовлетворяющие уравнению (2).

Сформулируем задачу иначе, чем А.Н. Крылов. Известную произвольную фундаментальную систему функций (решение дифференциального уравнения (2)) необходимо преобразовать в систему функций, удовлетворяющих условиям (1), которая записывается в матричной форме $K=\|\,k_{ij}\|_1^n$, и решение уравнения (2) соответственно записывается в виде:

$$\boldsymbol{y}=K\boldsymbol{y}_0. \tag{4}$$

Элементы матрицы K определяются следующим образом. Решение (3) справедливо для произвольных значений переменной. Следовательно, решение справедливо и при $x=0$, тогда

$$\boldsymbol{c} = \Phi_0^{-1}\boldsymbol{y}_0. \quad (5)$$

Исключая в решении (3) столбец $\boldsymbol{c}$ постоянных интегрирования с помощью выражения (5), решаем поставленную задачу:

$$\boldsymbol{y} = \Phi\Phi_0^{-1}\boldsymbol{y}_0. \quad (6)$$

Сравнивая решения (4) и (6), убеждаемся, что произвольная фундаментальная система функций элементарно преобразуется в фундаментальную систему функций:

$$K = \Phi\Phi_0^{-1}, \quad (7)$$

которая удовлетворяет условиям (1).

Очень важно, что мы избегаем интегрирования дифференциального уравнения (2), как это делал А.Н. Крылов [1], при определении фундаментальной системы функций, обладающих свойствами (1).

Таким образом, произвольную систему функций общего решения дифференциальных уравнений достаточно просто свести к функциям, которые будем называть функциями Коши–Крылова, поскольку функции, удовлетворяющие условиям (1), впервые получены А.Н. Крыловым [1] с использованием мето́ды Коши. Предложенное решение задачи проще.

Очевидный недостаток предложенной мето́ды преобразования функций состоит в том, что для этого требуется произвольное решение дифференциального уравнения. Недостаток компенсируется тем, что для большого числа технических задач решения дифференциальных уравнений с произвольными постоянными известны.

Достоинством метода является его простота для реализации с помощью ЭВМ. Кроме этого предложенный метод впервые позволяет определять функции Коши–Крылова для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Наиболее важным свойством предложенного метода является возможность устанавливать зависимость искомых величин столбца $\mathbf{y}$ со значениями этих величин для произвольного заданного значения независимой переменной, т. е. $\mathbf{y}_{\text{н}}$ при $x = x_{\text{н}}$. Из формулы (3) следует $\mathbf{y}_{\text{н}} = \Phi_{\text{н}}\mathbf{c}$. Здесь индекс «н» указывает на то, что значения искомых величин $\mathbf{y}_{\text{н}}$ и элементы матрицы $\Phi_{\text{н}}$ найдены при значении $x = x_{\text{н}}$, т. е. при произвольном, но не нулевом значении аргумента.

Исключая столбец произвольных постоянных $\mathbf{c}$ из (3), находим

$$\mathbf{y} = \Phi\Phi_{\text{н}}^{-1}\mathbf{y}_{\text{н}}, \quad (8)$$

где

$$K = \Phi\Phi_{\text{н}}^{-1} \quad (9)$$

— матрица функций Коши–Крылова.

Иначе, полученный результат следует прямо из формулы (6). Действительно, если решение (6) удовлетворяет произвольным начальным условиям, а это очевидно, то можно выполнить замену $\mathbf{y}_0$ на $\mathbf{y}_{\text{н}}$ и получить выражение (8).

В качестве примера предложенным методом определены хорошо известные гиперболотригонометрические функции, полученные А.Н. Крыловым для расчета балок, лежащих на упругом основании. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид [1]:

$$y^{\text{IV}} + 4y = 0,\ (*)' = \frac{d}{d\xi}(*). \quad (10)$$

Интеграл этого уравнения известен:

$$y = c_1 \sin\xi\,\text{sh}\xi + c_2 \sin\xi\,\text{ch}\xi + \\ + c_3 \cos\xi\,\text{sh}\xi + c_4 \cos\xi\,\text{ch}\xi. \quad (11)$$

Представим уравнение (10) в матричной форме (2), а его решение (11) — в матричной форме (3), где $\boldsymbol{y} = ||\, y, y', y'', y'''||^{\text{т}}$, $\boldsymbol{c} = ||\, c, c_1, c_2, c_3||^{\text{т}}$. При этом элементы матрицы $\Phi = ||\, f_{i,j}||_1^n$ имеют следующий вид:

$$f_{11} = \sin\xi\,\text{sh}\xi;\ f_{12} = \sin\xi\,\text{ch}\xi;$$
$$f_{13} = \cos\xi\,\text{sh}\xi;\ f_{14} = \cos\xi\,\text{ch}\xi;$$

$$f_{21} = f'_{11};\ f_{22} = f'_{12};\ f_{23} = f'_{13};\ f_{24} = f'_{14};$$
$$f_{31} = f'_{21};\ f_{32} = f'_{22};$$

$$f_{33} = f'_{23};\ f_{34} = f'_{24};\ f_{41} = f'_{31};\ f_{42} = f'_{32};$$
$$f_{43} = f'_{33};\ f_{44} = f'_{34}.$$

При значении $\xi = 0$ определяются ненулевые элементы матрицы Φ_0:

$$f_{14} = f_{22} = f_{23} = 1;\ f_{31} = f_{42} = -f_{43} = 2.$$

Ненулевые элементы обратной матрицы Φ_0^{-1} определяются просто:

$$a_{13} = a_{22} = a_{32} = \frac{1}{2};\ a_{24} = -a_{34} = \frac{1}{4};\ a_{41} = 1.$$

Перемножая матрицы Φ и Φ_0^{-1}, находим элементы матрицы $K = ||\, k_{ij}||_1^n$ функций Коши–Крылова и ее первой строки:

$$k_{11}=\cos\xi \operatorname{ch}\xi;\ k_{12}=\frac{1}{2}(\sin\xi \operatorname{ch}\xi+\cos\xi \operatorname{sh}\xi);$$

$$k_{13}=\sin\xi \operatorname{sh}\xi\ ;\ k_{14}=\frac{1}{4}(\sin\xi \operatorname{ch}\xi-\cos\xi \operatorname{sh}\xi), \qquad (12)$$

т. е. гиперболотригонометрические функции Крылова, которые удовлетворяют условиям (1).

В качестве примера определим семейство функций Коши—Крылова для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0, \qquad (13)$$

моделирующего изгиб пластины. Если пластина шарнирно оперта противоположными сторонами, расстояние между которыми b, то решение можно искать в виде ряда:

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Подставляя ряд в уравнение (13), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для номера n гармоники:

$$w_n^{IV}-2K^2 w_n''+K^4 w_n=0;\ K^2=\frac{n^2\pi^2}{b^2}. \qquad (14)$$

Его характеристическое уравнение $n^4-2K^2n^2+K^4=0$ имеет корни $n_{1,2}=k$, $n_{3,4}=-k$. Решение уравнения (14)

$$w_n=c_1\mathbf{e}^{kx}+c_2\mathbf{e}^{-kx}+c_3x\mathbf{e}^{kx}+c_4x\mathbf{e}^{-kx}.$$

Полученное решение записываем в матричной форме (3). Элементарными преобразованиями $K=\Phi\Phi_0^{-1}$ определяют матрицу функций Коши—Крылова. Ее первая строка имеет вид

$$k_{11}=\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)-\frac{n\pi}{2b}x\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right);$$

$$k_{12}=\frac{3}{2}\frac{b}{n\pi}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)-\frac{x}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right);$$

$$k_{13}=\frac{b}{2n\pi}x\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right);$$

$$k_{14}=-\frac{b^3}{2n^3\pi^3}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+\frac{b^2}{2n^2\pi^2}x\operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right).$$

Эти функции содержат в качестве параметра номер гармоники n и образуют, семейство функций, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению (14) и условиям (1). Таким образом получено семейство функций Коши—Крылова для уравнения (14).

Таким образом, автором статьи разработан способ определения матриц функций Коши—Крылова или вычисления матриц их значений, которые образуют фундаментальную систему функций решения однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяют условиям (1). Иначе, получено решение матричного однородного дифференциального уравнения, которое обладает замечательным свойством удовлетворять произвольным начальным условиям задач.

Одной из проблем решения задач механики деформирования пластин, оболочек и тонкостенных конструкций является обеспечение устойчивости счета на ЭВМ. Эта проблема возникает и на этапе численного решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналитическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений обозначим матрицей $K_{x_0}^{x_n}(A(x))$ функций Коши—Крылова. Индексы «x_n» и «x_0» показывают, что значение решения получено для аргумента $x=x_n$ при произвольных начальных условиях, когда $x=x_0$. Матрица $A(x)$ указывает, что решение может быть получено, если линейные обыкновенные дифференциальные уравнения записаны в виде системы уравнений 1-го порядка и представлены они в матричной форме.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений механики деформирования оболочек классических форм (цилиндр, конус, сфера, тор), полученных методом Фурье разделения переменных для большого класса прикладных задач, известны до произвольных постоянных. Непреодолимой проблемой решения краевых задач остается решение системы алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных для заданных краевых условий. Счет на ЭВМ при этом неустойчивый. Проблема сохраняется и после преобразования произвольной системы функций в функции Коши—Крылова — решения дифференциальных уравнений механики деформирования пластин и оболочек.

Для достижения устойчивости счета при решении краевых задач механики деформирования пластин и оболочек предлагается использовать мультипликативный метод [2] переноса краевых условии в произвольную точку краевого интервала, где формируется система алгебраических уравнений. Перенос краевых условий осуществляется умножением на матрицы значений функций Коши—Крылова на интервалах, на которые делится краевой. При переносе краевых условий используется эффективный малыми затратами машинного времени метод построчного ортонормирования. При этом не изменяются искомые величины задачи. Система алгебраических уравнений формируется относительно искомых величин краевой задачи, а не относительно произвольных постоянных решения системы дифференциальных уравнений при классическом алгоритме решения краевых задач. При решении системы алгебраических уравнений определяются искомые величины задачи, которые характеризуют прочность пластины или оболочки.

Выводы

Предложен простейший способ преобразования в матричной форме, адаптированной к ЭВМ, произвольной системы функций — решения обыкновенных дифференциальных уравнений теории пластин и оболочек в систему функций Коши—Крылова, обладающих замечательным свойством удовлетворять произвольным начальным условиям задачи.

Аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений механики деформирования пластин и оболочек, полученные многими авторами [3 — 11] при построении и развитии теории пластин и оболочек, после преобразования в функции Коши — Крылова, становятся основой эффективных алгоритмов аналитического решения задач прочности пластин и оболочек, построенных ранее автором статьи.

Литература

1. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: АН СССР, 1931. 154 с.
2. *Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И.* Метод переноса краевых условий функциями Коши–Крылова для жестких линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН РФ, 2000. Т. 373. № 4. С. 474—476.
3. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. *Власов В.З.* Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
5. *Гольдевейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гос. изд. тех. теор. лит., 1953. 544 с.
6. *Даревский В.М.* Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках // В сб. Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1964. Вып. 1. С.23—83.
7. *Лукасевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир, 1982. 542 с.
8. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой // Докл. АН СССР, 1946. Т. 2. № 4. С. 110—114.
10. *Стеклов В.А.* Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Л.: Гос. издательство, 1927. 419 с.
11. *Флюгге В.* Статика и динамика оболочек. М.: Госстройиздат, 1963. 306 с.

References

1. Krylov A.N. *O raschete balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii* [On the analysis of beams lying on an elastic foundation]. Leningrad, AN SSSR publ., 1931. 154 p.
2. Vinogradov A.Iu., Vinogradov Iu.I. *Metod perenosa kraevykh uslovii funktsiiami Koshi–Krylova dlia zhestkikh lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [The method of boundary condition functions Cauchy–Krylov hard linear ordinary differential equations]. Report Academy of Sciences RF, 2000, vol. 373, no. 4, pp. 474–476.
3. Vlasov V.Z. *Obshchaia teoriia obolochek i ee prilozhenie v tekhnike* [General theory of shells and its application in engineering]. Moscow, Gostekhizdat publ., 1949. 784 p.
4. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, AN SSSR publ., 1962, vol. 1. 528 p.
5. Gol'denvejzer A.L. *Teorija uprugih tonkih obolochek* [Theory of thin elastic shells]. Moscow, Gos. izd. teh. teor. lit. publ., 1953. 544 p.
6. Darevskii V.M. *Opredelenie peremeshchenii i napriazhenii v tsilindricheskoi obolochke pri lokal'nykh nagruzkakh* [Determination of displacements and stresses in a cylindrical shell under local loads]. Sbornik Prochnost' i dinamika aviatsionnykh dvigatelei [Collection of strength and dynamics of aircraft engines]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1964, issue 1, pp. 23–83.
7. Lukasevich S. *Lokal'nye nagruzki v plastinakh i obolochkakh* [Local loads in plates and shells]. Moscow, Mir publ., 1982. 542 p.
8. Novozhilov V.V. *Teoriia tonkikh obolochek* [The theory of thin shells]. Leningrad, Sudpromgiz publ., 1962. 432 p.
9. Rabotnov Iu.N. *Izgib tsilindricheskoi obolochki sosredotochennoi siloi* [Bending cylindrical shell concentrated force]. Reports of the USSR publ., 1946, vol. 2, no. 4, pp. 110–114.
10. Steklov V.A. *Osnovy teorii integrirovaniia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Fundamentals of the theory of integration of ordinary differential equations]. Moscow, Leningrad. Gosizdat publ., 1927. 419 p.
11. Fliugge V. *Statika i dinamika obolochek* [Statics and Dynamics of Shells]. Moscow, Gosstroiizdat publ., 1963. 306 p.

Статья поступила в редакцию 26.04.2013

Информация об авторе

ВИНОГРАДОВ Юрий Иванович (Москва) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).

Information about the author

VINOGRADOV Yuriy Ivanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Phys. Math.), Professor of «Aerospace Systems» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: vino.yuri@rambler.ru).