



**ЗАРУБИН**

Владимир Степанович  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**ZARUBIN**

Vladimir Stepanovich  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)



**КУВЫРКИН**

Георгий Николаевич  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**KUVYRKIN**

Georgy Nikolaevich  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)



**САВЕЛЬЕВА**

Инга Юрьевна  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**SAVELYEVA**

Inga Yurievna  
(Moscow, Russian Federation,  
Bauman Moscow State  
Technical University)

## Эффективный коэффициент теплопроводности многофазного композита с шаровыми включениями<sup>1</sup>

**В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева**

*В качестве конструкционных и функциональных материалов в различных приборных устройствах находят широкое применение композиты, состоящие из матрицы и включений различной формы. Исследованию теплопроводности композитов посвящено значительное число работ. Однако расчетные формулы в этих работах получены, как правило, либо в результате обработки экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо путем априорного задания распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел.*

*В данной работе предложена математическая модель переноса тепловой энергии в многофазном композите с дисперсными включениями шаровой формы (в общем случае в виде полого шара), на основе которой найдены эффективные коэффициенты теплопроводности такого композита. Выполнена оценка возможной погрешности полученных результатов с применением двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности.*

*Полученные результаты могут быть использованы для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности многофазных композитов, модифицированных дисперсными (в частности, наноструктурными) частицами.*

**Ключевые слова:** многофазный композит, дисперсные шаровые частицы, эффективный коэффициент теплопроводности.

## Effective Thermal Conductivity Coefficient of Multi-phase Composite With Spherical Inclusions

**V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Y. Savelyeva**

*Composites consisting of a matrix and variform inclusions are widely used as structural and functional materials in a variety of instrumental devices. There are a large number of works devoted to the study of the thermal conductivity of composites. However, given in these papers formulas, as a rule, are deduced as a result of experimental data processing applying to a specific material, or by a priori indicating of temperature distribution and heat flow in models of heterogeneous body structure. The paper presents a mathematical model of heat*

<sup>1</sup> Работа выполнена по гранту НШ—255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

*transfer in a multi-phase composite with dispersed inclusions of spherical shape (generally, in the form of a hollow sphere), that is a base to determine the effective thermal conductivity coefficients of said composite. The estimation of a possible error of the received results with the use of dual variational formulation of the problem of stationary heat conduction was done. The results can be used to predict the effective thermal conductivity coefficients of multi-phase composites dispersed with modified particles, nanostructured in particular.*

**Keywords:** multi-phase composite, dispersible spherical particles, effective thermal conductivity coefficient.

Материал различных включений в композите может иметь и разные коэффициенты теплопроводности [1–5]. В этом случае при оценке эффективного коэффициента теплопроводности композит следует рассматривать как многофазный [6–7]. Форму включений примем в виде шаровых частиц, полагая, что шар можно считать средней статистической по отношению к произвольной форме включения с сопоставимыми размерами во всех направлениях.

Математическую модель переноса тепловой энергии в композите построим в предположении, что шаровые частицы не контактируют между собой, т. е. отделены друг от друга слоем материала матрицы. Примем, что многофазный композит состоит из матрицы и  $N$  различных типов дисперсных частиц, которые в пределах каждого типа с номером  $n = 1, N$  имеют одинаковые размеры и коэффициент теплопроводности  $\lambda_n$ .

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятой составной частицы в виде полого шара с наружным и внутренним радиусами  $R_n$  и  $R_n^\circ$  соответственно и окружающей ее матрицы с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_*$ . Значения  $\lambda_n$  и  $\lambda_*$  считаем заданными.

Центр полого шара поместим в начало сферической системы координат. Примем, что на большом расстоянии  $r \gg R_n$  от начала координат задан вектор градиента температурного поля, направленный по оси сферической системы координат, от которой происходит отсчет угловой координаты  $\theta$ , т. е. при  $r \rightarrow \infty$  распреде-

ление температуры в матрице описывает функция  $T_\infty(r, \theta) = Gr \cos \theta$ , где  $G$  — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

В данном случае, благодаря коллинеарности заданного вектора градиента температурного поля оси отсчета угловой координаты  $\theta$ , распределение температуры симметрично относительно этой оси и не зависит от угловой координаты  $\varphi$ , т. е.  $\partial^2 T / \partial \varphi^2 \equiv 0$ .

По мере приближения к шаровой частице температурное поле в матрице претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (1) дополнительным слагаемым [8]  $\Delta T(r, \theta) = (B / r^2) \cos \theta$ , где  $B$  — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в матрице, удовлетворяющее заданному условию при  $r \rightarrow \infty$  и уравнению (1), описывает функция

$$T(r, \theta) = T_\infty(r, \theta) + \Delta T(r, \theta) = (Gr + B / r^2) \cos \theta. \quad (2)$$

Аналогичная зависимость справедлива и для распределения температуры в шаровой частице:

$$T_n(r, \theta) = (A_n r + B_n / r^2) \cos \theta. \quad (3)$$

В равенства (2) и (3) входят три неизвестных коэффициента  $B$ ,  $A_n$  и  $B_n$ , которые необходимо найти из граничных условий на сферических поверхностях с радиусами  $R_n^\circ$  и  $R_n$ . При  $r = R_n^\circ$  из условия отсутствия теплообмена в полости шаровой частицы с учетом равенства (3) получим

$$\partial T_n / \partial r \Big|_{r=R_n^\circ} = (A_n - 2B_n / (R_n^\circ)^3) \cos \theta = 0,$$

или

$$A_n = 2B_n / (R_n^\circ)^3. \quad (4)$$

При  $r = R_n$  из условий непрерывности плотности теплового потока и распределения температуры следует

$$\lambda_n \partial T_n / \partial r|_{r=R_n} = \lambda_* \partial T / \partial r|_{r=R_n}$$

и  $T_n(R, \theta) = T(R, \theta).$

Отсюда с использованием равенств (2) и (3) определяем

$$\begin{aligned} A_n - 2B_n / R_n^3 &= (\lambda_* / \lambda_n)(G - 2B / R_n^3); \\ A_n + B_n / R_n^3 &= G + B / R_n^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Последовательным исключением неизвестных из равенств (4) и (5) находим

$$\frac{B}{R_n^3} = G \frac{1 + \bar{R}_n^3 / 2 - \bar{\lambda}_n (1 - \bar{R}_n^3)}{2 + \bar{R}_n^3 + \bar{\lambda}_n (1 - \bar{R}_n^3)}, \quad (6)$$

где  $\bar{R}_n = R_n^\circ / R_n$  и  $\bar{\lambda}_n = \lambda_n / \lambda_*$ . Если включение имеет форму сплошного шара, то  $\bar{R}_n = 0$  и  $B / R_n^3 = G(1 - \bar{\lambda}_n) / (2 + \bar{\lambda}_n)$ .

Пусть в объеме  $V_N$ , ограниченном сферической поверхностью радиусом  $R_N$ , расположены все  $N$  типов дисперсных частиц, окруженных материалом матрицы, причем объемная концентрация каждого типа частиц в этом объеме  $C_n = v_n (R_n / R_N)^3$ , где  $v_n$  — число частиц  $n$ -го типа в объеме  $V_N$ . Этот объем будем считать представительным элементом рассматриваемого многофазного композита. Если такой элемент поместить в неограниченную область, заполненную материалом матрицы, то в силу формулы (6) в весьма удаленной точке этой области, расположенной на большом расстоянии  $r \gg R_N$  от каждой дисперсной частицы, возникнет возмущение температурного поля  $\Delta T_N(r, \theta) = (B_N / r^2) \cos \theta$ , где

$$B_N = G \sum_{n=1}^N v_n R_n^3 \frac{1 + \bar{R}_n^3 / 2 - \bar{\lambda}_n (1 - \bar{R}_n^3)}{2 + \bar{R}_n^3 + \bar{\lambda}_n (1 - \bar{R}_n^3)}.$$

При замене представительного элемента многофазного композита равновеликим шаром радиусом  $R_N$  с искомым значением  $\lambda$  эффективного коэффициента теплопроводности материала этого шара в той же весьма удаленной точке возмущение температурного поля будет,

согласно формуле (6), пропорционально значению коэффициента  $B_N^* = GR_N^3(1 - \tilde{\lambda}) / (2 + \tilde{\lambda})$ , где  $\tilde{\lambda} = \lambda / \lambda_*$ . Из равенства  $B_N = B_N^*$  следует

$$\tilde{\lambda} = (1 - 2D) / (1 + D). \quad (7)$$

Здесь

$$D = \sum_{n=1}^N C_n \frac{1 + \bar{R}_n^3 / 2 - \bar{\lambda}_n (1 - \bar{R}_n^3)}{2 + \bar{R}_n^3 + \bar{\lambda}_n (1 - \bar{R}_n^3)}. \quad (8)$$

Отметим, что при  $N = 1$  и  $\bar{R}_1 = 0$  полученный результат совпадает с известной формулой Максвелла [8, 9] для гранулированной среды, состоящей из маточной породы и включений в виде шаровых гранул. Это совпадение можно считать косвенным подтверждением корректности использованной выше процедуры получения формулы (7).

Формула (7) применима к многофазному композиту в случае, если один или несколько типов частиц обладают весьма низкой теплопроводностью, т. е. для соответствующих номеров  $n$   $\bar{\lambda}_n \rightarrow 0$ . Тогда в правой части формулы (8) слагаемые с этими номерами можно принять равными  $C_n / 2$ . При наличии в композите одного или нескольких типов частиц с весьма высокой теплопроводностью, т. е. для соответствующих номеров  $n$   $\bar{\lambda}_n \rightarrow \infty$ , слагаемые с этими номерами в правой части формулы (8) будут отрицательны и стремиться к значениям  $-C_n$ .

Используем двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [10, 11] для получения двусторонних оценок эффективного коэффициента теплопроводности рассматриваемого композита. Пусть многофазный композит занимает объем  $V = HS_0$  в виде прямого цилиндра высотой  $H$  с площадью  $S_0$  параллельных оснований, одно из которых соответствует в сферических координатах значению  $\theta = \pi / 2$ , а точки второго имеют координаты  $r \cos \theta = H$ . Боковую поверхность цилиндра примем идеально теплоизолированной, температуру основания при  $\theta = \pi / 2$  положим равной нулю, а на втором основании зададим температуру  $GH$ . В объеме цилиндра расположены  $N$  типов дисперсных частиц, окруженных материалом матрицы. Таким образом, в неоднородной цилиндрической

области объемом  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ , коэффициент теплопроводности  $\Lambda(M)$  является функцией координат точки  $M \in V$ , причем функция  $\Lambda(M)$  кусочнопостоянная и принимает значения  $\lambda_*$ , если точка  $M$  соответствует матрице, и значение  $\lambda_n$ , если эта точка соответствует дисперсной частице, принадлежащей типу с номером  $n$ .

Для минимизируемого функционала [11]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \Lambda(M) (\nabla T(M))^2 dV(M), \quad M \in V, \quad (9)$$

где  $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона, примем в качестве допустимого линейное по высоте цилиндра распределение температуры с постоянной составляющей градиента  $G$ . Тогда из формулы (9) получим

$$J_1[T] = \frac{G^2}{2} HS_0 \left( \lambda_* (1 - C_V) + \sum_{n=1}^N \lambda_n C_n \right). \quad (10)$$

Здесь  $C_V$  — суммарная объемная концентрация всех типов дисперсных частиц.

В качестве допустимого распределения вектора плотности теплового потока  $q$  для максимизируемого функционала [11]

$$I[q] = \frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\Lambda(M)} dV(M) - \int_S T(P) \mathbf{q}(P) \mathbf{n}(P) dS(P), \quad P \in S, \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ , примем постоянное значение  $q$  единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. В этом случае формула (11) примет следующий вид:

$$I_1[q] = -\frac{q^2}{2} HS_0 \left( \frac{1 - C_V}{\lambda_*} + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\lambda_n} \right) - qGHS_0.$$

Из необходимого условия  $dI_1[q] / dq = 0$  максимума функционала  $I_1[q]$  получим

$$q = -G / \left( \frac{1 - C_V}{\lambda_*} + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\lambda_n} \right)$$

и в итоге

$$I_1[q] = \frac{G^2}{2} HS_0 / \left( \frac{1 - C_V}{\lambda_*} + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\lambda_n} \right). \quad (12)$$

Принятые допустимые распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения  $J_1[T]$  и  $I_1[q]$  не будут совпадать, причем  $J_1[T] > I_1[q]$ . В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение  $J_0 = (\lambda / 2) G^2 HS_0$  минимизируемого функционала (9) для однородной области с оцениваемым эффективным коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ . Тогда с учетом формулы (10) из условия  $J_1[T] \geq J_0$  находим

$$\tilde{\lambda} \leq 1 - C_V + \sum_{n=1}^N \bar{\lambda}_n C_n = \tilde{\lambda}_+,$$

а при использовании формулы (12) из условия  $I_1[q] \leq J_0$  получим

$$\tilde{\lambda} \geq 1 / \left( 1 - C_V + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\lambda_n} \right) = \tilde{\lambda}_-.$$

В качестве примера рассмотрим композит, модифицированный двумя ( $N = 2$ ) типами дисперсных частиц в виде сплошных шаров ( $\bar{R}_n = 0, n = 1, 2$ ). Положим  $\bar{\lambda}_2 = 0,5$  и  $C_2 = 0,2$ . Зависимости  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\lambda}_+$  и  $\tilde{\lambda}_-$  от  $C_1$  при различных значениях  $\bar{\lambda}_1$  приведены на рис. 1 и 2. Отметим, что в случае  $\bar{\lambda}_1 = 1$   $\tilde{\lambda} \approx 0,8846$ ,  $\tilde{\lambda}_+ = 0,9$  и  $\tilde{\lambda}_- = 5/6 \approx 0,8333$  и не зависят от  $C_1$ .

При малом отклонении значения  $\bar{\lambda}$  от единицы можно считать, что в данном случае формулы (7) и (8) достаточно хорошо описывают зависимость эффективного коэффициента теплопроводности композита от объемной концентрации дисперсных частиц с номером  $n = 1$  во всем промежутке изменения  $C_1$ . По мере отклонения значений  $\bar{\lambda}$  от единицы при выполнении неравенства  $\tilde{\lambda}_+ \geq \tilde{\lambda} \geq \tilde{\lambda}_-$  разность  $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$  возрастает и при промежуточных значениях  $C_1$  становится существенной. Причиной этого является, видимо, использование достаточно простых допустимых распределений температуры и плотности теплового потока при вычислении функционалов.



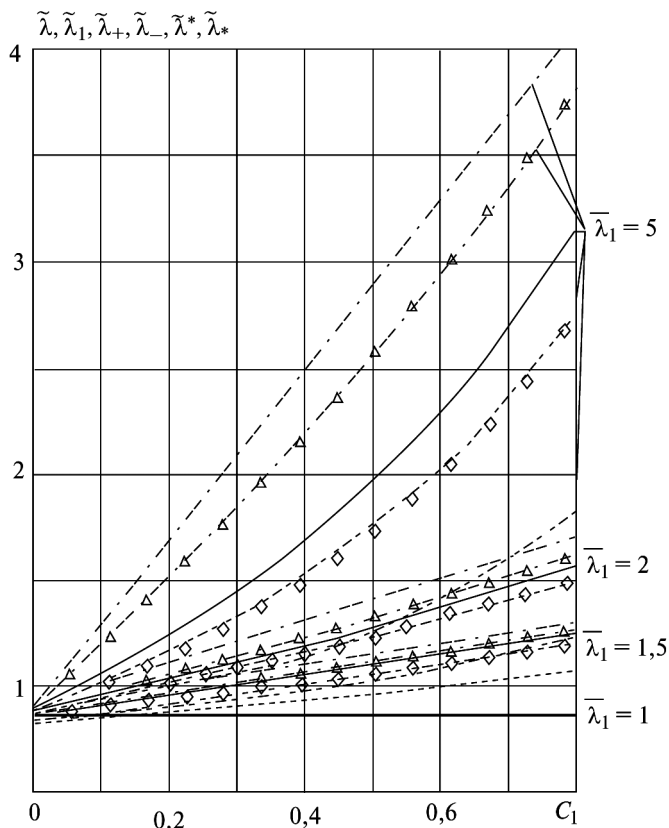


Рис. 1. Зависимости  $\tilde{\lambda}$  (—),  $\tilde{\lambda}_+$  (— · —) и  $\tilde{\lambda}_-$  (---),  $\tilde{\lambda}^*$  (-△-) и  $\tilde{\lambda}_*$  (-◇-) от  $C_1$  для  $\bar{\lambda}_2 = 0,5$ ,  $C_2 = 0,2$  и различных значениях  $\bar{\lambda}_1 \geq 1$

Двусторонние оценки можно сблизить, если использовать корреляционное приближение теории случайных функций [12]. Тогда верхняя оценка для  $\tilde{\lambda}$  принимает вид

$$\tilde{\lambda}^* = \left( \frac{1 - C_V}{1 + 2\tilde{\lambda}^*} + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\bar{\lambda}_n + 2\tilde{\lambda}^*} \right)^{-1} - 2\tilde{\lambda}^*$$

а нижняя оценка —

$$\tilde{\lambda}_* = \left( \frac{1 - C_V}{1 + 2\tilde{\lambda}_*} + \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\bar{\lambda}_n + 2\tilde{\lambda}_*} \right)^{-1} - 2\tilde{\lambda}_*$$

где  $\bar{\lambda}^*$  и  $\bar{\lambda}_*$  — соответственно наибольшее и наименьшее значения среди всех  $\bar{\lambda}_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) и  $\bar{\lambda}_m = \lambda_m / \lambda_m = 1$ , т. е. необходимо учитывать не только теплопроводность дисперсных частиц, но и теплопроводность материала матрицы.

При  $\bar{\lambda}_1 = 1$   $\tilde{\lambda} \equiv \tilde{\lambda} \approx 0,8846$ , а  $\tilde{\lambda}_* = 0,875$ , причем как и в случае двусторонних оценок, по-

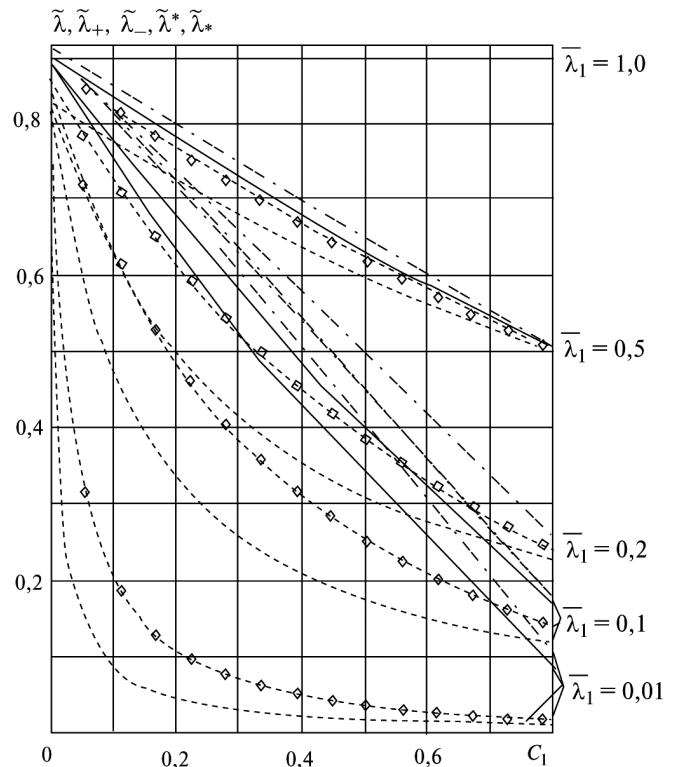


Рис. 2. Зависимости  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^*$  (—),  $\tilde{\lambda}_+$  (— · —),  $\tilde{\lambda}_-$  (---),  $\tilde{\lambda}_*$  (-◇-) от  $C_1$  для  $\bar{\lambda}_2 = 0,5$ ,  $C_2 = 0,2$  и различных значениях  $\bar{\lambda}_1 \leq 1$

строенных на основе двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности, значения  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\lambda}_*$  не зависят от  $C_1$  (см. рис. 1).

Зависимость  $\tilde{\lambda}_*$  от  $C_1$  (см. рис. 2) для значения  $\bar{\lambda}_1 = 0,01$  можно рассматривать как некоторое приближение к случаю пористого композита с объемной концентрацией пор  $C_1$ , для которых  $\bar{\lambda}_1 \rightarrow 0$ . Формально в этом случае  $\tilde{\lambda}_-$  и  $\tilde{\lambda}_*$  также стремятся к нулю, но для принятых исходных данных  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\lambda}^*$  и  $\tilde{\lambda}_+$  имеют положительные конечные значения. Например, при  $C_1 = 0,8$  и  $\bar{\lambda}_1 = 0$   $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^* \approx 0,0833$  и  $\tilde{\lambda}_+ = 0,1$ , тогда как при  $C_1 = 0,8$  и  $\bar{\lambda}_1 = 0,01$   $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^* \approx 0,0920$ ,  $\tilde{\lambda}_+ \approx 0,1080$ ,  $\tilde{\lambda}_- \approx 0,0124$  и  $\tilde{\lambda}_* \approx 0,0170$ .

Литература

1. Han Z., Fina A. Thermal conductivity of carbon nanotubes and their polymer nanocomposites: a review // Progress in Polymer Science. 2011. No. 36 (2011). P. 914–944.
2. Suresh S., Needleman A., Mortensen A., eds., Metal Matrix Composites, Mass., Boston: Butterworth-Heinemann, Mass., 1993.

3. Chawla K.K. *Composite Materials: Science & Engineering*, New York: Springer-Verlag, 1999.
4. Evans A., C.S. Marchi, Mortensen A. *Metal Matrix Composites in Industry*, Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2003.
5. Porfiri M., Nguyen N.Q., Gupta N. Thermal conductivity of multiphase particulate composite materials // *Syntactic and composite foams*, 44, 2009. P. 1540–1550.
6. Shutov F.A. *Syntactic Polymeric Foams*, Handbook of Polymeric Foams and Foam Technology. New York: Hanser Publishers, 1991. P. 355–374.
7. Torquato S. *Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties*. Springer-Verlag, Berlin. 2001.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // *Тепловые процессы в технике*. 2012. № 10. С. 470–474.
10. Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
12. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.

## References

1. Han Z., Fina A. Thermal conductivity of carbon nanotubes and their polymer nanocomposites: a review, *Journal of Nanomaterials*, 2011, vol. 36, no. 7, pp. 914–944.
2. Suresh S., Needleman A., Mortensen A., eds., *Metal Matrix Composites*, Mass., Boston, Butterworth-Heinemann, 1993.

3. Chawla K.K. *Composite Materials: Science & Engineering*, New York, Springer-Verlag, 1999.
4. Evans A., Marchi C.S., Mortensen A. *Metal Matrix Composites in Industry*, Dordrecht, Kluwer Academic Pub., 2003.
5. Porfiri M., Nguyen N.Q., Gupta N. Thermal conductivity of multiphase particulate composite materials. *Syntactic and composite foams*, 44, 2009, pp. 1540–1550.
6. Shutov F.A. *Syntactic Polymeric Foams*, Handbook of Polymeric Foams and Foam Technology. New York, Hanser Publishers, 1991, pp. 355–374.
7. Torquato S. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, Berlin. 2001.
8. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. USA, Oxford University Press, 1959. (Russ.ed.: Karlsru G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka publ., 1964. 488 p.).
9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Effektivnyi koefitsient teploprovodnosti kompozita s sharovymi vklucheniiami [The Effective Thermal Conductivity of Composites with Spherical Inclusions]. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering]. 2012, vol. 4, no. 10, pp. 470–474.
10. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniia zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat publ., 1983. 328 p.
11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 2008. 512 p.
12. Shermergor T.D. Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro environments]. Moscow, Nauka publ., 1977. 400 p.

Статья поступила в редакцию 06.03.2013

## Информация об авторах

**ЗАРУБИН Владимир Степанович** (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

**КУВЫРКИН Георгий Николаевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

**САВЕЛЬЕВА Инга Юрьевна** (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com).

## Information about the authors

**ZARUBIN Vladimir Stepanovich** (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: fn2@bmstu.ru).

**KUVYRKIN Georgy Nikolaevich** (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: fn2@bmstu.ru).

**SAVELYEVA Inga Yurievna** (Moscow) — Cand. Sc. Phys&Math., Associate Professor of «Applied Mathematics» Department. Bauman Moscow State Technical University (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com).