Новые материалы и технологии

УДК 536.2

Теплопроводность композита, армированного волокнами[1]

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

В качестве конструкционных и функциональных материалов в различных приборных устройствах находят широкое применение композиты, состоящие из матрицы и включений различной формы. Исследованию теплопроводности композитов посвящено значительное число работ. Однако расчетные формулы в этих работах получены, как правило, либо в результате обработки экспериментальных данных применительно к конкретным материала, либо путем априорного задания распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел.

В данной работе предложена математическая модель переноса тепловой энергии в композите с включениями, имеющими форму волокон, на основе которой найдены эффективные коэффициенты теплопроводности такого композита. Выполнена оценка возможной погрешности полученных результатов с применением двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности.

Полученные результаты могут быть полезны при прогнозе эффективных коэффициентов теплопроводности композитов, модифицированных наноструктурными элементами.

Ключевые слова: композит, армирующее волокно, эффективный коэффициент теплопроводности.

Thermal Conductivity of Composite Reinforced with Fibers

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Y. Savelyeva

Composites consisting of a matrix and variform inclusions are widely used as constructional and functional materials in various instrument devices. A significant amount of works is devoted to research of thermal conductivity of composites. However the calculating formulas, as a rule, are deduced as a result of experimental data processing applying to a specific material, or by a priori indicating of temperature distribution and heat flow in models of heterogeneous

[1] Работа выполнена по гранту НШ—255.2012.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ.

ЗАРУБИН
Владимир Степанович
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
ZARUBIN
Vladimir Stepanovich
(Moscow, Russian Federation, MSTU named after N.E. Bauman)

КУВЫРКИН
Георгий Николаевич
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
KUVYRKIN
Georgy Nikolayevich
(Moscow, Russian Federation, MSTU named after N.E. Bauman)

САВЕЛЬЕВА
Инга Юрьевна
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
SAVELYEVA
Inga Yurievna
(Moscow, Russian Federation, MSTU named after N.E. Bauman)

body structure. The paper presents a mathematical model of heat transfer in a composite with fiber shape inclusions. The model is used for finding the effective thermal conductivity of such composite. Also the dual variational formulation of the stationary thermal conductivity problem was applied for estimating possible error of received results.

The results can be used for prediction the effective thermal conductivity of composites modified with nanoparticles.

Keywords: composite, reinforcing fiber, effective thermal conductivity.

Конструкционный материал с неоднородной структурой в виде системы отдельных включений в основную составляющую этого материала (матрицу), преобладающую по объемному содержанию, можно рассматривать как композит, матрица которого модифицирована такими включениями. В данной работе рассмотрен композит, армированный волокнами одного диаметра, но различной длины. Такие материалы находят достаточно широкое применение в технике [1—3].

Включения в форме волокна могут иметь различную природу (например, включения, образующие новые фазы в поликристаллических материалах при их термической обработке [4—6] или близкие к этой форме наноструктурные элементы [7]). Наряду с полимерными, борными, стеклянными и углеродными волокнами [1, 3, 8—10] в качестве армирующих элементов используют нитевидные кристаллы (усы) [2]. Столбчатые кристаллические зерна, близкие по форме к волокну, образуются в слитках никеля [6]. Включения высокодисперсного цементита в матрице феррита, возникающие при изотермическом распаде аустенита (так называемый игольчатый троостит [5]), можно рассматривать как короткие волокна.

Таким образом, волокна и близкие к ним по форме включения являются достаточно распространенными армирующими элементами в конструкционных материалах. Применение высокопрочных и высокомодульных волокон способствует повышению механических характеристик таких материалов. Однако у теплонапряженных элементов конструкций, работающих в условиях одновременного интенсивного воздействия как механических, так и тепловых нагрузок, наряду с механическими характеристиками важную роль играют и теплофизические свойства конструкционного материала (в частности, коэффициент теплопроводности). Эффективное значение коэффициента теплопроводности композита, армированного волокнами, зависит от их объемной концентрации C_V и от соотношения между коэффициентами теплопроводности волокон и матрицы.

Математическая модель. Математическую модель переноса тепловой энергии в композите, армированном волокнами, построим в предположении, что волокна в общем случае не контактируют между собой, т. е. отделены друг от друга слоем изотропного материала матрицы с коэффициентом теплопроводности λ_m. Композит полагаем состоящим из множества окруженных материалом матрицы цилиндрических волокон с коэффициентом теплопроводности λ_0, длиной l и диаметром $d \ll l$.

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятого волокна с неограниченным объемом окружающей его матрицы. Начало прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выберем на оси волокна в его середине, причем направление координатной оси Ox_3 совпадает с его осью. Примем, что на весьма большом расстоянии от начала координат по сравнению с длиной волокна составляющие градиента установившегося распределения температуры $T(x_1, x_2, x_3)$ равны G_k, $k = 1, 2, 3$. Если волокно в первом приближении заменить удлиненным эллипсоидом вращения с отношением полуосей $\bar{d} = d / l \ll 1$, то температура в произвольной точке M области, занятой матрицей, может быть представлена удовлетворяющей дифференциальному уравнению Лапласа функцией [11, 12]

$$T(M) = G_k x_k + \frac{(1-\bar{\lambda}) D_\alpha G_k x_k}{1 + (\bar{\lambda} - 1) D_\alpha^\circ}, \ \alpha = k, \qquad (1)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_0 / \lambda_m$;

$$D_1 = D_2 = \frac{\bar{d}^2}{2}\int_\beta^\infty \frac{du}{(\bar{d}^2+u)f(u)};$$
$$D_3 = \frac{\bar{d}^2}{2}\int_\beta^\infty \frac{du}{(1+u)f(u)}; \qquad (2)$$

β — положительный корень уравнения

$$(x_1^2+x_2^2)/(\bar{d}^2+\beta)+x_3^2/(1+\beta)=l^2/4,$$

характеризующий положение точки M с координатами x_k, $D_\alpha^\circ = D_\alpha\big|_{\beta=0}$, а $f(u)=\left(\bar{d}^2+\beta\right)\times$ $\times\sqrt{1+u}$ (в соотношении (1) и далее использовано правило суммирования по повторяющемуся латинскому индексу).

Интегралы в формуле (2) можно выразить через элементарные функции [11]:

$$D_1 = D_2 = \frac{\bar{d}^2}{4(1-\bar{d}^2)^{3/2}}\left(\frac{2\chi}{1-\chi^2}-\ln\frac{1+\chi}{1-\chi}\right);$$
$$D_3 = \frac{\bar{d}^2}{2(1-\bar{d}^2)^{3/2}}\left(\ln\frac{1+\chi}{1-\chi}-2\chi\right), \qquad (3)$$

где $\chi=\sqrt{(1-\bar{d}^2)/(1+\beta)}$. По мере уменьшения значения $\bar{d}$ эллипсоид вращения по форме приближается к тонкому волокну с круговым поперечным сечением. В этом случае, учитывая малость величины $\bar{d}^2$ по сравнению с единицей, можно упростить формулы (3), представив их в следующем виде:

$$D'_1 = D'_2 = \left(\bar{d}^2/4\right)\left(2\sqrt{1+\beta}/(\beta+\bar{d}^2)+\ln\gamma\right);$$
$$D'_3 = -\left(\bar{d}^2/2\right)\left(2+\ln\gamma\right), \qquad (4)$$

где $\gamma=1-\left(2-\bar{d}^2/2\right)/\left(1+\sqrt{1+\beta}\right)$. Отсюда при $\beta=0$ получим

$$D_1^\circ = D_2^\circ = \left(1-\bar{d}^2\ln(2/\bar{d})\right)/2;$$
$$D_3^\circ = \bar{d}^2\left(\ln(2/\bar{d})-1\right). \qquad (5)$$

В волокне установившееся распределение температуры также удовлетворяет уравнению Лапласа, но имеет фиксированные составляющие градиента температуры и представимо соотношением [11, 12]

$$T(x_1,x_2,x_3)=\frac{G_k x_k}{1+(\bar{\lambda}-1)D_\alpha^\circ},\ \alpha=k.$$

Таким образом, из формулы (1) следует, что наличие волокна создает в матрице возмущение температурного поля относительно линейного распределения $G_k x_k$ на большом удалении от этого включения, описываемое соотношением

$$\Delta T^* = \frac{(1-\bar{\lambda})D'_\alpha G_k x_k}{1+(\bar{\lambda}-1)D_\alpha^\circ},\ \alpha=k. \qquad (6)$$

Одинаковая ориентация волокон. При одинаковой ориентации оси Ox_3 всех волокон сначала рассмотрим случай когда $G_1=G_2=0$. Тогда для возмущения температурного поля в матрице, создаваемого одним волокном, из формулы (6) получим

$$\Delta T^* = \frac{(1-\bar{\lambda})D'_3 G_3 x_3}{1+(\bar{\lambda}-1)D_3^\circ}. \qquad (7)$$

Пусть N одинаковых по форме волокон с фиксированным значением $\bar{d}$ расположены в объеме V_N, ограниченном поверхностью геометрически подобного им кругового цилиндра диаметром D и длиной L, т. е. $\bar{D}=D/L=\bar{d}$. Поскольку $V_N=\pi D^2 L/4$, а объем каждого волокна равен $\pi d^2 l/4$, объемная концентрация волокон в объеме V_N составит $C_V=NC_0$, где $C_0=(d/D)^3$.

Для точки, удаленной от каждого из включений на весьма большое расстояние по сравнению со значением L, примем для всех волокон $|x_3|/L \gg 1$. Тогда, согласно формуле (6), N весьма удаленных волокон, расположенных в объеме V_N, вызовут в этой точке возмущение температуры

$$\Delta T = N\Delta T^* = N\frac{(1-\bar{\lambda})D'_3 G_3 x_3}{1+(\bar{\lambda}-1)D_3^\circ}. \qquad (8)$$

Если считать цилиндр объемом V_N представительным элементом композита с рассматриваемыми волокнами, то этот элемент с искомым значением λ_3 эффективного коэффициента теплопроводности в направлении оси Ox_3 создаст в той же весьма удаленной точке с учетом формулы (6) такое же возмущение температуры:

$$\Delta T = \frac{(1-\tilde{\lambda}_3)D_3^* G_3 x_3}{1+(\tilde{\lambda}_3-1)D_3^\circ}, \qquad (9)$$

где $\tilde{\lambda}_3=\lambda_3/\lambda_m$. Отсюда с учетом второй формулы (4) получим

$$D_3^* = -\frac{\overline{D}^2}{2}\left(2+\ln\left(1-\frac{2-\overline{D}^2/2}{1+\sqrt{1+\beta_*}}\right)\right),$$

причем β_* — положительный корень уравнения

$$(x_1^2+x_2^2)/(\overline{D}^2+\beta)+x_3^2/(1+\beta)=L^2/4,$$

а $F(u)=(1+u)\sqrt{\overline{D}^2+u}$.

Приравняв правые части формул (8) и (9), запишем

$$\widetilde{\lambda}_3 = \frac{1+(\overline{\lambda}-1)(D_3^\circ+(1-D_3^\circ)ND_3'/D_3^*)}{1+(\overline{\lambda}-1)D_3^\circ(1-ND_3'/D_3^*)}. \quad (10)$$

В работе [12] для включений в виде произвольного трехосного эллипсоида показано, что $ND_3'/D_3^*=C_V$. Это равенство справедливо и для частных случаев, в том числе и для включений в виде волокон. Таким образом, формула (10) принимает следующий вид:

$$\widetilde{\lambda}_3 = \frac{1+(\overline{\lambda}-1)(D_3^\circ+(1-D_3^\circ)C_V)}{1+(\overline{\lambda}-1)D_3^\circ(1-C_V)}. \quad (11)$$

Отметим, что для шаровых включений $D_3^\circ=1/3$ [12]. В этом случае композит будет изотропным, а формула (11) совпадет с известной формулой Максвелла [11, 13].

Аналогичным путем можно найти формулы для $\widetilde{\lambda}_1=\lambda_1/\lambda_m$ и $\widetilde{\lambda}_2=\lambda_2/\lambda_m$, где λ_1 и λ_2 — эффективные коэффициенты теплопроводности композита в направлении осей Ox_1 и Ox_2 соответственно, причем в силу равенства $D_1^\circ=D_2^\circ$ получим $\widetilde{\lambda}_1=\widetilde{\lambda}_2$. В итоге при $\alpha=1,2,3$ имеем

$$\widetilde{\lambda}_\alpha = \frac{1+(\overline{\lambda}-1)(D_\alpha^\circ+(1-D_\alpha^\circ)C_V)}{1+(\overline{\lambda}-1)D_\alpha^\circ(1-C_V)}. \quad (12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае композит обладает трансверсальной изотропией по отношению к свойству теплопроводности.

Построение двусторонних оценок. Для получения двусторонних оценок эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемого композита применим двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [14, 15]. С этой целью используем трехфазную модель композита в виде цилиндрической области V, имеющей в направлении координатной оси Ox_3 высоту H и ограниченной параллельными основаниями, каждое с достаточно большой площадью S_0. Эта область содержит цилиндрический объем V_N длиной L и диаметром D, в котором расположены волокна рассматриваемой формы, окруженные материалом матрицы. Объемная концентрация волокон в этом объеме равна C_V. Ось цилиндра направлена вдоль координатной оси Ox_3. Остальная часть области содержит однородный материал с искомыми свойствами композита. Боковую поверхность цилиндрической области примем идеально теплоизолированной, температуру основания при $x_3=0$ положим равной нулю, а на втором основании при $x_3=H$ зададим температуру G_3H.

В качестве допустимого для минимизируемого функционала [14]

$$J[T]=\frac{1}{2}\int_V \Lambda(M)(\nabla T(M))^2\,dV(M),\ M\in V, \quad (13)$$

(∇ — дифференциальный оператор Гамильтона) примем линейное по высоте цилиндра распределение температуры с постоянной составляющей градиента G_3. Тогда из формулы (13) с учетом свойства аддитивности интеграла по отношению к области V получим

$$\frac{2J_1[T]}{G_3^2}=\lambda_3\left(HS_0-\frac{\pi D^2L}{4}\right)+$$
$$+\lambda_m(1-C_V)\frac{\pi D^2L}{4}+\lambda_0C_V\frac{\pi D^2L}{4}. \quad (14)$$

Для максимизируемого функционала [14]

$$I[\mathbf{q}]=-\frac{1}{2}\int_V\frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\Lambda(M)}dV(M)-$$
$$-\int_S T(P)\mathbf{q}(P)\mathbf{n}(P)dS(P),\ P\in S, \quad (15)$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S) в качестве допустимого распределения вектора плотности теплового потока q примем постоянное значение $q=\lambda_3G_3$ единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. В этом случае из формулы (15) следует

$$\frac{2I_1[q]}{(\lambda_3 G_3)^2} = -\frac{HS_0 - \pi D^2 L/4}{\lambda_3} -$$

$$-(1 - C_V)\frac{\pi D^2 L}{4\lambda_m} - C_V \frac{\pi D^2 L}{4\lambda_0} + \frac{2HS_0}{\lambda_3}. \qquad (16)$$

Использованные допустимые распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения $J_1[T]$ и $I_1[q]$ не будут совпадать, причем $J_1[T] > I_1[q]$. В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение $J_0 = \lambda_3 G_3^2 HS_0 / 2$ минимизируемого функционала (13) для однородной области с коэффициентом теплопроводности λ_3. Тогда с учетом формулы (14) из условия $J_1[T] \ge J_0$ найдем верхнюю оценку:

$$\tilde{\lambda}_3 \le 1 - C_V + \bar{\lambda} C_V = \tilde{\lambda}_+, \qquad (17)$$

а с учетом формулы (16) из условия $I_1[q] \le J_0$ получим нижнюю оценку:

$$\tilde{\lambda}_3 \ge 1/(1 - C_V + C_V/\bar{\lambda}) = \tilde{\lambda}_-. \qquad (18)$$

Принятые достаточно простые допустимые распределения температуры и плотности теплового потока учитывают лишь объемное содержание каждой из трех изотропных фаз в использованной трехфазной модели композита. Поэтому для всех трех направлений координатных осей представленные в формулах (17) и (18) оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита будут идентичными.

Результаты расчетов. На рисунках 1 и 2 при различных значениях $\bar{\lambda}$ приведены построенные по формулам (17) и (18) зависимости оценок $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$ от C_V. Для волокон с $\bar{d} = 0{,}1$ по формулам (5) вычислены $D_1^\circ = D_2^\circ = 0{,}41322$ и $D_3^\circ = 0{,}17356$. Затем по формуле (12) для тех же значений $\bar{\lambda}$ на рис. 1 и 2 построены зависимости $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ от C_V. Очевидно, что при $\bar{\lambda} = 1$ все кривые горизонтальны с ординатой, равной единице.

Следует отметить близость графиков зависимостей $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_3$ от C_V. Например, при $C_V = 0{,}5$ и $\bar{\lambda} = 0{,}1$, $\tilde{\lambda}_+ = 0{,}55$ и $\tilde{\lambda}_3 = 0{,}5459$, а при $C_V = 0{,}5$ и $\bar{\lambda} = 0{,}8$, $\tilde{\lambda}_+ = 0{,}9$ и $\tilde{\lambda}_3 = 0{,}8998$. На рисунках видно, что в случае малого отклонения значения $\bar{\lambda}$ от единицы различие между значе-

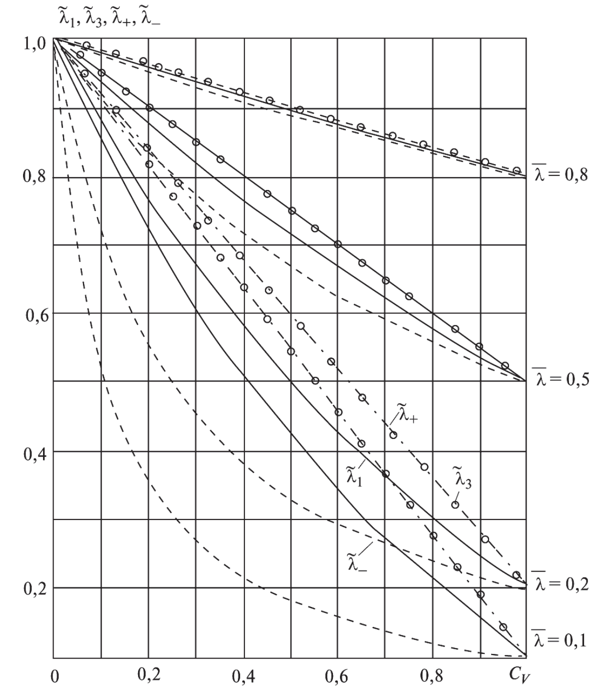

Рис. 1. Зависимости от объемной концентрации C_V при $\bar{\lambda} < 1$ верхней $\tilde{\lambda}_+$ (— · —) и нижней $\tilde{\lambda}_-$ (— — —) оценок эффективных коэффициентов теплопроводности $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ (—) и $\tilde{\lambda}_3$ (— ○ —)

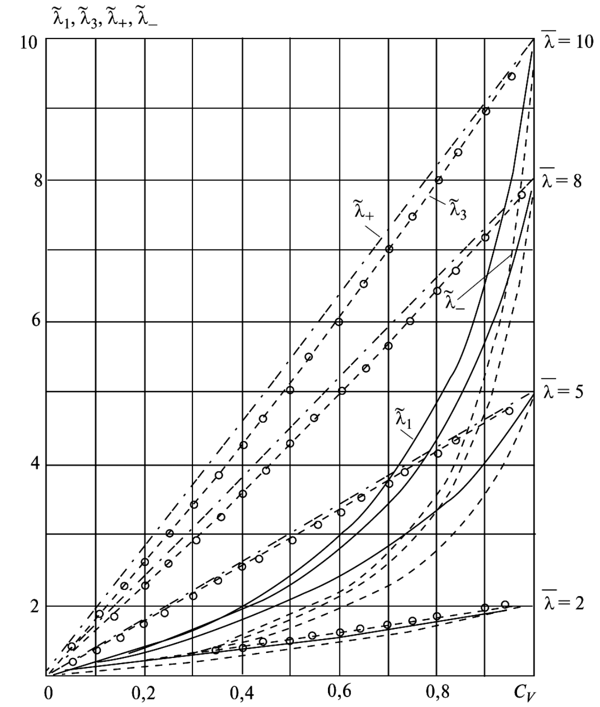

Рис. 2. Зависимости от объемной концентрации C_V при $\bar{\lambda} > 1$ верхней $\tilde{\lambda}_+$ (— · —) и нижней $\tilde{\lambda}_-$ (— — —) оценок эффективных коэффициентов теплопроводности $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$ (—) и $\tilde{\lambda}_3$ (— ○ —)

ниями эффективных коэффициентов теплопроводности невелико, т. е. анизотропия композита оказывается сравнительно слабой. По мере отклонения $\overline{\lambda}$ от единицы, несмотря на совпадение оценок и значений этих коэффициентов при $C_V = 0$ и $C_V = 1$, разность $\widetilde{\lambda}_+ - \widetilde{\lambda}_-$ для промежуточных значений C_V становится значительной и одновременно увеличивается различие между значениями $\widetilde{\lambda}_1 = \widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$, что приводит к более существенной анизотропии композита. Отмеченная тенденция усиливается по мере отклонения значения $\overline{\lambda}$ от единицы. Расчеты при $\overline{d} < 0{,}1$ показывают, что отмеченные закономерности сохраняются.

Выводы

1. Построенная математическая модель переноса тепловой энергии в композите, армированном одинаково направленными волокнами, позволила получить зависимости эффективных коэффициентов теплопроводности такого композита от концентрации волокон, их геометрических параметров и соотношения между теплопроводностью волокон и матрицы.

2. Использование двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности позволяет построить двусторонние оценки значений этих коэффициентов. Если в композите при хаотической ориентации волокон их оси равномерно распределены по всем возможным направлениям, то такой композит будет изотропным с эффективным коэффициентом теплопроводности $\widetilde{\lambda} = (2\widetilde{\lambda}_1 + \widetilde{\lambda}_3)/3$ [16, 17].

3. В силу электротепловой аналогии [14] оценки эффективных коэффициентов теплопроводности могут быть использованы для прогноза электропроводности материалов с аналогичной структурой.

Литература

1. Справочник по композиционным материалам / Под ред. Дж. Любина; Пер. с англ. В 2 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1988. 488 с.

2. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.

3. *Комков М.А.*, *Тарасов В.А.* Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.

4. *Арзамасов Б.Н.*, *Крашенинников А.И.*, *Пастухова Ж.П.*, *Рахштадт А.Г.* Научные основы материаловедения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 366 с.

5. *Ван Флек Л.* Теоретическое и прикладное материаловедение: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.

6. Физическое металловедение / Под ред. Р. Кана: Пер. с англ. В 3 т. Т. 2. М,: Мир, 1968. 492 с.

7. *Кац Е.А.* Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.

8. *Цой Б.*, *Карташов Э.М.*, *Шевелев В.В.*, *Валишин А.А.* Разрушение тонких полимерных пленок и волокон. М.: Химия, 1997. 344 с.

9. Физика композиционных материалов / Н.Н. Трофимов, М.З. Канович, Э.М. Карташов и др.; Под общ. ред. Н.Н. Трофимова. В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 2005. 456 с.

10. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Наука, 1982. 336 с.

11. *Карслоу Г.*, *Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.

12. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76—85.

13. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470—474.

14. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 329 с.

15. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

16. *Адамеску Р.А.*, *Гельд П.В.*, *Митюшов Е.А.* Анизотропия физических свойств металлов. М.: Металлургия, 1985. 136 с.

17. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.

References

1. Lubin G. *Handbook of Composites*, 1982.(Russ. ed.: Liubin Dzh. *Spravochnik po kompozitsionnym materialam*. Moscow, Mashinostroenie publ., vol. 1, 1988. 488 p.

2. Vasil'ev V. V., Protasov V. D., Bolotin V. V., Alfutov N. A., Beil' A. I., Bunakov V. A., Dymkov I. A., Ermolenko A. F., Zhigun I. G., Zinov'ev P. A., Kintsis T. Ia., Kleimenov V. V., Kruklin'sh A. A., Kul'kov A. A., Manuilov V. F., Popov B. G., Portnov G. G., Sirotkin O. S., Skudra A. M., Solov'ev I. A., Tarnopol'skii Iu. M., Tsarakhov K. S. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite Materials: A Guide]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1990. 512 p.

3. Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologiia namotki kompozitnykh konstruktsii raket i sredstv porazheniia* [Wound composite structures technology and missile weapons]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 2011. 431 p.

4. Arzamasov B.N., Krasheninnikov A.I., Pastukhova Zh.P., Rakhshtadt A.G. *Nauchnye osnovy materialovedeniia* [Scientific basis of materials]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 1994. 366 p.

5. Van Flek L. *Teoreticheskoe i prikladnoe materialovedenie* [Theoretical and Applied Materials]. Moscow, Atomizdat publ., 1975. 472 p.

6. Cahn R.W., Haasen P. *Physical Metallurgy*, 4 ed., North Holland, 1996, vol.2, 2888 p. (Russ. ed.: Kan R. *Fizicheskoe metallovedenie*. Moscow, Mir publ., 1968, vol. 2, 492 p).

7. Kats E.A. *Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaia form i idei* [Fullerenes, carbon nanotubes and

nanoclusters. Genealogy forms and ideas]. Moscow, LKI publ., 2008. 296 p.

8. Tsoi B., Kartashov E.M., Shevelev V.V., Valishin A.A. *Razrushenie tonkikh polimernykh plenok i volokon* [Destruction of thin polymer films and fibers]. Moscow, Khimiia publ., 1997. 344 p.

9. Trofimov N.N., Kanovich M.Z., Kartashov E.M., Natrusov V.I., Ponomarenko A.T., Shevchenko V.G., Sokolov V.I., Simonov-Emel'ianov I.D. *Fizika kompozitsionnykh materialov* [Physics of composite materials]. Moscow, Mir publ., 2005, vol.1, 456 p.

10. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. Livermore, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley&Sons Inc., 1979. (Russ. ed.: Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov.* Moscow, Nauka publ., 1982. 336 p.)

11. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, London, 1947. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdykh tel.* Moscow, Nauka publ., 1964. 488 p).

12. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effektivnye koeffitsienty teploprovodnosti kompozita s ellipsoidal'nymi vkliucheniiami [Effective Coefficients of Thermal Conductivity of a Composite with Ellipsoidal Inclusions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriia Estestvennye nauki* [Herald MSTU named after N.E. Bauman. Series: Natural Sciences]. 2012, no. 3, pp. 76—85.

13. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Iu. Effektivnyi koeffitsient teploprovodnosti kompozita s sharovymi vkliucheniiami [The Effective Thermal Conductivity of Composites with Spherical Inclusions]. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering]. 2012, no. 10, pp. 470—474.

14. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniia zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving the heat]. Moscow, Energoatomizdat publ., 1983. 329 p.

15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MSTU named after N.E. Bauman publ., 2008. 512 p.

16. Adamesku R.A., Gel'd P.V., Mitiushov E.A. *Anizotropiia fizicheskikh svoistv metallov* [Anisotropy of the physical properties of metals]. Moscow, Metallurgiia publ., 1985. 136 p.

17. Shermergor T.D. *Teoriia uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [The theory of elasticity of micro environments]. Moscow, Nauka publ., 1977. 400 p.

Статья поступила в редакцию 06.03.2013

Информация об авторах

ЗАРУБИН Владимир Степанович (Москва) — доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

КУВЫРКИН Георгий Николаевич (Москва) — доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

САВЕЛЬЕВА Инга Юрьевна (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com).

Information about the authors

ZARUBIN Vladimir Stepanovich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor of «Applied Mathematics» Department. MSTU named after N.E. Bauman (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: fn2@bmstu.ru).

KUVYRKIN Georgy Nikolayevich (Moscow) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of «Applied Mathematics» Department. MSTU named after N.E. Bauman (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: fn2@bmstu.ru).

SAVELYEVA Inga Yurievna (Moscow) — Cand. Sc. Phys. &Math., Associate Professor of «Applied Mathematics» Department. MSTU named after N.E. Bauman (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com).