



СЫЗРАНЦЕВА

Ксения Владимировна
(Тюменский государственный
нефтегазовый университет)

SYZRANTSEVA

Kseniya Vladimirovna
(Tyumen, Russian Federation,
Tyumen State Oil and Gas
University (TSOGU))



ЧЕРНАЯ

Людмила Александровна
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

CHERNAYA

Ludmila Alexandrovna
(Moscow, Russian Federation,
MSTU named
after N.E. Bauman)

Оценка надежности валов по критерию усталостной прочности при случайном режиме нагружения

К.В. Сызранцева, Л.А. Черная

Оценка прочностной надежности деталей машин, а также определение вероятности их безотказной работы или отказа — необходимый этап в проектировании.

Методика вероятностной оценки надежности деталей машин разработана почти четверть века назад в работах Г.А. Снесарева, Д.Н. Решетова и других ученых. Ее основой является разделение входящих в расчетные зависимости величин на детерминированные и случайные, для которых принимается нормальный закон распределения. Условность такого подхода отмечают сами авторы работ, поскольку фактическое распределение случайных величин, получаемое в процессе экспериментальных испытаний машин, в общем случае может не соответствовать ни одному из известных в теории вероятностей закону распределения. В этом случае часть первичной информации теряется, а разработанные методики оценки прочностной надежности дают неконтролируемую погрешность результата.

Ключевые слова: валы, усталостная прочность, случайный режим нагружения, вероятность безотказной работы, методы непараметрической статистики.

Reliability Assessment of Shafts in Accordance with the Criteria of Fatigue Strength under Random Load Conditions

K.V. Syzrantseva, L.A. Chernaya

Evaluation of strength reliability of machine parts as well as determination of probability of failure or failure is the necessary step in design. The method of probabilistic reliability evaluation of machine parts was developed for almost a quarter of a century ago in the works of G.A. Snesareva, D.N. Reshetova and other scientists. The base of the method is the separation within the calculated parameters of deterministic and random, and for random ones the normal distribution is applied. Conventionality of such an approach is indicated by the authors of the works, as the actual distribution of random variables, obtained in the process of experimental tests of machine parts, in general, may not correspond to any of the known in the theory of probability distribution law. In this case, the part of the initial information could be lost, and the developed methods for reliability assessment give uncontrolled error result.

Keywords: shafts, fatigue strength, random load conditions, probability of failure operation, nonparametrical statistics methods.

Из критериев прочности для большинства валов современных быстроходных машин решающее значение имеет сопротивление усталости. Усталостные разрушения составляют до 40...50% случаев выхода валов из строя.

Методика вероятностной оценки надежности валов разработана почти четверть века назад в работе [1]. Ее основой является разделение входящих в расчетные зависимости величин на детерминированные и случайные, для которых принимается нормальный закон распределения. Разработка методик вероятностного расчета валов стала важным этапом повышения требований к качеству их проектирования, в то же время, принятие для случайных величин, входящих в расчетные формулы для расчета коэффициента запаса прочности вала в виде сумм, произведений, частного от делений, подкоренных выражений, нормального закона распределения, не позволяет оценить закон распределения коэффициента запаса. Поскольку в конечном итоге для коэффициента запаса прочности также принимается нормальный закон распределения, разработанные методики прочностного расчета валов в рамках параметрических методов статистики являются весьма условными (это отмечают и авторы [1]) и, безусловно, требуют своего развития. В данной статье рассмотрена уточненная методика расчета прочностной надежности валов, основанная на методах компьютерного моделирования случайных величин и математическом аппарате непараметрической статистики [2].

Реализация методов оценки прочностной надежности деталей машин на основе математического аппарата непараметрической статистики связана с решением двух основных задач:

- 1) компьютерное моделирование случайных величин с законами, известными с точностью до параметров и с законами, определенными методами непараметрической статистики;
- 2) восстановление по заданной выборке случайной величины ее функции плотности распределения.

Актуальность первой задачи обусловлена необходимостью определения вероятности безотказной работы вала при различных режимах. Следуя [1], внешняя нагрузка — крутящий момент T и изгибающий момент M_n на валу, в общем случае, являются случайными величина-

ми. В зависимости от условий работы передачи для T и M_n принимают следующие законы распределения: при тяжелом режиме работы передачи интегральную функцию для моментов описывают β -распределением; для среднего режима работы передачи закон распределения случайных величин моментов принимают либо нормальным, либо равномерным; при легком режиме работы интегральная функция распределения для T и M_n подчиняется γ -распределению.

Следует отметить, что применение указанных выше законов в вероятностных расчетах на прочность деталей машин при случайных нагрузках, вообще говоря, является вынужденным и определяется аналитическим описанием (в рамках параметрической статистики) зависимостей между функцией распределения и плотностью распределения случайных величин, полученных для данных законов в теории вероятности.

Предлагаемый в работе метод оценки прочностной надежности валов не опирается на какие-либо аналитические зависимости, полагая лишь, что распределение T задано выборкой $\{T_{ij}\}$, а M_n — выборкой $\{M_{ni}\}$. В частных случаях выборки могут подчиняться законам указанных выше распределений, а в общем случае соответствует первичным данным, полученным в процессе испытаний машины.

Задача генерирования выборок случайных величин, соответствующих известным законам распределения, реализована в математическом процессоре MathCad в соответствии с алгоритмом, представленным в работе [2]. В качестве примера результатов работы программы на рис. 1 представлена гистограмма функции плотности распределения для генерирования случайной величины крутящего момента при среднем режиме работы передачи, а также кривая, соответствующая аналитическому описанию этой же функции плотности.

Для решения второй задачи (реализации метода восстановления неизвестной функции плотности распределения случайной величины по заданной выборке ее значений) разработана программа в математическом процессоре MathCad, реализующая метод Парзена — Розенблатта, описанный в работе [2]. На первом этапе рассчитывается грубая характеристика выборки

(выборочная дисперсия), которая в дальнейшем, через оптимизацию параметра размытости (второй этап расчета) используется для уточнения оценки плотности распределения.

Рассмотрим решение задачи определения вероятности безотказной работы вала. Методика вероятностной оценки надежности валов, рассмотренная в работе [1], основана на предположении, что случайная нагрузка — крутящий и изгибающий моменты, приложенные к валу, подчиняются нормальному закону распределения. По известным зависимостям [3] оценивают запасы n_σ и n_τ усталостной прочности по средним нормальным σ и средним касательным τ напряжениям. Общий коэффициент запаса прочности \bar{n} при совместном действии напряжений кручения изгиба рассчитывается по формуле [3]:

$$\bar{n} = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (1)$$

Вероятность безотказной работы определяется по таблицам [1] в предположении, что коэффициент запаса прочности вала подчиняется также нормальному распределению со средним значением \bar{n} , а случайный характер предела выносливости детали и случайный характер внешней нагрузки учитываются лишь с помощью коэффициентов вариации v_{-1d} и v_a соответственно.

Предлагаемый в данной работе подход к расчету вероятности безотказной работы деталей, основанный на применении компьютерного моделирования и аппарата непараметрической статистики, позволяет не только учитывать реальные законы распределения внешней нагрузки, но и восстанавливать фактическую функцию плотности распределения коэффициента запаса прочности, а в соответствии с ней — вероятность безотказной работы.

Проиллюстрируем предлагаемую методику на примере оценки вероятности безотказной работы вала редуктора, воспринимающего крутящий момент $T = 946\,860$ Н·мм и изгибающий момент $M_{и} = 1\,223\,364$ Н·мм в наиболее опасном сечении под зубчатым колесом, ослабленным шпоночным пазом и посадкой с натягом.

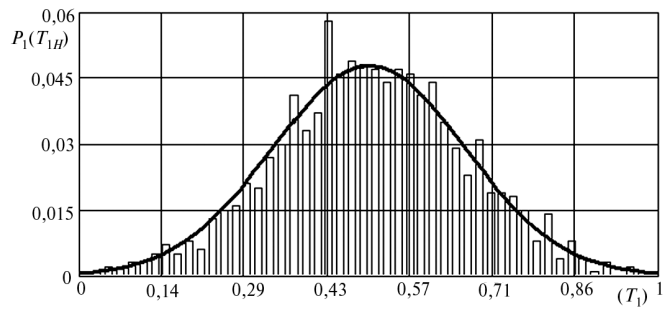


Рис. 1. Функция плотности распределения для генерирования случайной величины крутящего момента (в относительных единицах) в соответствии со средним режимом работы передачи

Диаметр вала под зубчатым колесом $d = 65$ мм, материал вала — сталь 45 с термообработкой — улучшение, режим работы вала — тяжелый.

Функция распределения крутящего момента имеет следующий вид [2, 4]:

$$\Phi_1(T_i) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{T_i} T_i^{a-1} (1-T_i)^{b-1} dT_i. \quad (2)$$

В этом случае функция плотности распределения случайной величины T^* имеет вид

$$P_1(T_i) = \frac{T^*}{B(a,b)} T_i^{a-1} (1-T_i)^{b-1}. \quad (3)$$

Используя непараметрический датчик случайных чисел, реализованный в математическом процессоре MathCad, найдем выборку значений крутящего момента на валу $\{T_i\}$, $i = \overline{1, N}$. Выборка случайной величины изгибающего момента генерируется аналогичным образом. При $N = 1\,000$ Н·мм и $M_{и} = 1\,223\,364$ Н·мм гистограмма функции $P_1(M_{иi})$, полученная в результате описанной процедуры компьютерного моделирования, показана на рис. 2.

Поскольку фактические данные о распределении предела прочности материала отсутствуют, в рассматриваемом примере полагается, что случайная величина σ_b распределена по нормальному закону со средним значением в 750 МПа. Выборка предела прочности генерируется также с помощью непараметрического датчика. При

наличии экспериментальных данных об испытаниях образцов в моделировании используется непосредственно выборка $\{\sigma_{вi}\}$.

Имея выборки крутящего и изгибающего моментов, а также выборку предела выносливости стали, реализуем классическую методику [3] расчета коэффициента запаса сопротивления усталости вала. На первом этапе определяют выборки коэффициентов запаса только по изгибу $\{n_{\sigma i}\}$ и только по кручению $\{n_{\tau i}\}$ по известным формулам [3] с учетом того, что входящие в расчетные зависимости коэффициенты также являются выборками, вычисляемыми по формулам работы [3] на основе выборок крутящего и изгибающего моментов, а также выборки предела прочности материала.

В результате выражение для общего коэффициента запаса прочности будет включать в себя, в отличие от (1), не средние значения коэффициентов запасов прочности по кручению и изгибу, а полностью их выборки:

$$n_i = \frac{n_{\sigma i} n_{\tau i}}{\sqrt{n_{\sigma i}^2 + n_{\tau i}^2}}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Для расчета вероятности безотказной работы исследуемого вала необходимо иметь функцию плотности $P_n(n)$ распределения случайной величины n . Для решения данной задачи целесообразно воспользоваться методом Парзена — Розенблатта.

Результат расчета выборки $\{n_i\}$ длиной $N=1\ 000$ и восстановление ее функции плотности распределения для исследуемого вала при тяжелом режиме работы вала представлены на рис. 3.

Вероятность отказа вала по определению означает вероятность того, что коэффициент запаса прочности n окажется менее единицы [5], что соответствует значению следующего интеграла:

$$Q(n) = \int_0^1 P_n(n) dn. \quad (5)$$

Характеристики выборок случайной величины — коэффициента запаса прочности n для исследуемого вала при различных режимах работы представлены в таблице. Вероятности отказа, вычисленные посредством интегри-

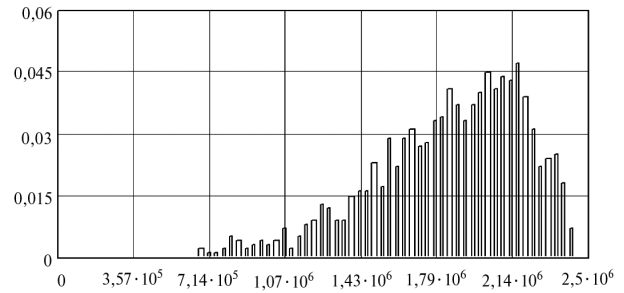


Рис. 2. Гистограмма случайной величины изгибающего момента при тяжелом режиме работы вала

рования по (5), приведены в последнем столбце таблицы.

Характеристики выборок коэффициента запаса прочности

Режим нагружения	Среднее выборки	Мода	Медиана	Вероятность отказа
Случайный (по [1])	1,8	1,8	1,8	0,01284
Легкий	3,7646	2,247	3,15	0,03797
Средний нормальный	1,9236	1,491	1,737	0,07685
Средний равномерный	2,7164	1,583	1,775	0,18345
Тяжелый	1,1895	1,108	1,1445	0,25471
Бимодальный	2,6242	1,722	2,135	0,04553

Для иллюстрации методики в последней строке таблицы отражены параметры распределения коэффициента запаса прочности для вала, к которому приложена случайная нагрузка. Функция плотности распределения которой задана выражением

$$\Phi_5(v_i) = \sum_{j=1}^6 \left[\frac{2\alpha_j}{(2j-1)\pi} \right] \sin \left[\frac{2j-1}{2} \pi v_i \right], \quad (6)$$

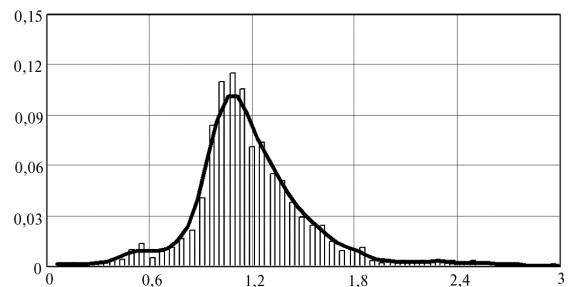


Рис. 3. Гистограмма выборки случайной величины n и ее функция плотности распределения $P_n(n)$ при тяжелом режиме работы вала

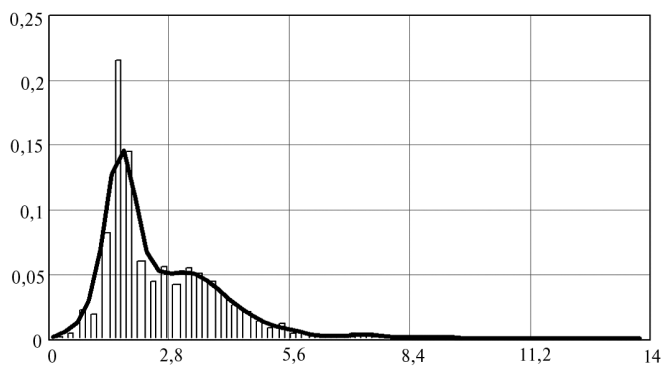


Рис. 4. Гистограмма выборки случайной величины n и ее функция плотности распределения $P_n(n)$ для плотности распределения нагрузки, описываемой выражением (6)

где $\alpha_1 = 1,27027$; $\alpha_2 = -0,85566$; $\alpha_3 = 0,07521$; $\alpha_4 = -0,52205$; $\alpha_5 = -0,31440$; $\alpha_6 = 0,43318$; $v_i = T_i/T_m$, $v_i \in [0,1]$.

Гистограмма выборки коэффициента запаса прочности вала для данного режима нагружения показана на рис. 4.

В данном исследовании рассмотрена уточненная методика расчета прочностной надежности валов, работающих при случайном режиме нагружения. Вероятность безотказной работы валов оценивается по критерию сопротивления усталостной прочности, причем коэффициент запаса прочности описывается выборкой, генерируемой с использованием непараметрических датчиков. Предложенный авторами статьи подход к оценке надежности валов по критерию усталостной прочности, основанный на использовании методов непараметрической статистики, является универсальным и может успешно применяться для любых законов распределе-

ния случайных величин. Реализация предложенного подхода позволяет значительно повысить корректность получаемых оценок надежности и долговечности валов.

Литература

1. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З. Надежность машин; Под. ред. Д.Н. Решетова. М.: Высш. шк., 1988. 238 с.
2. Сызранцева К.В. Расчет прочностной надежности деталей машин при случайном характере внешних нагрузок. Тюмень: ТюмГНГУ, 2011. 88 с.
3. Иванов М.Н., Финогенов В.А. Детали машин. М.: Высш. шк., 2003. 408 с.
4. Сызранцева К.В., Черная Л.А. Оценка долговечности подшипников качения при случайном режиме их нагружения // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 12. С. 8–11.
5. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 604 с.

References

1. Reshetov D.N., Ivanov A.S., Fadeev V.Z. *Nadezhnost' mashin* [Reliability of Machines]. Moscow, Vysshiaia shkola publ., 1988. 238 p.
2. Syzrantseva K.V. *Raschet prochnostnoi nadezhnosti detalei mashin pri sluchainom kharaktere vneshnikh nagruzok* [Calculation of strength reliability of machine parts at random nature of the external loads]. Tyumen, Tyumen State Oil and Gas University publ., 2011. 88 p.
3. Ivanov M.N., Finogenov V.A. *Detali mashin* [Machinery]. Moscow, Vysshiaia shkola publ. 2003. 408 p.
4. Syzrantseva K.V., Chernaya L.A. *Otsenka dolgovechnosti podshipnikov kachenii pri sluchainom rezhime ikh nagruzhenii* [Estimation of bearings durability under random loading mode]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. Moscow, 2011, no. 12, pp. 8–11.
5. Kapur K.C., Lamberson L.R. *Reliability in Engineering Design*. Department of Industrial Engineering and Operation Research, Wayne State University, Detroit, Michigan 48202, JOHN WILEY & SONS, New York, Santa Barbara, London, Sydney, Toronto, 1977. (Russ.ed.: Kapur K., Lamberson L. *Nadezhnost' i proektirovanie system*. Moscow, Mir publ., 1980. 604 p.

Статья поступила в редакцию 14.03.2013

Информация об авторах

СЫЗРАНЦЕВА Ксения Владимировна (Тюмень) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Кибернетические системы». Тюменский государственный нефтегазовый университет (625000, Тюменская область, Тюмень, Российская Федерация, ул. Володарского, д. 38, e-mail: kv.syzr@gmail.com).

ЧЕРНАЯ Людмила Александровна (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: ChernayaLA@yandex.ru).

Information about the authors

SYZRANTSEVA Kseniya Vladimirovna (Tyumen) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of «Cybernetic Systems» Department. Tyumen State Oil and Gas University (TSOGU) (Volodarskogo str., 38, 625000, Tyumen, Russian Federation, e-mail: kv.syzr@gmail.com).

CHERNAYA Ludmila Alexandrovna (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor «Theory of Mechanisms and Machines» Department. MSTU named after N.E. Bauman (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: ChernayaLA@yandex.ru).