



**НАУМОВ**  
Андрей Михайлович  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**NAUMOV**  
Andrey Mikhailovich  
(Moscow, Russian Federation,  
MSTU named  
after N.E. Bauman)

## **Стержень с присоединенными массами в потоке воздуха или жидкости: статика, собственные частоты и формы**

**А.М. Наумов**

*Упругие стержневые элементы конструкций, взаимодействующие с потоком воздуха или жидкости, имеют широкое распространение в технике. Однако в научной литературе описано крайне мало решенных задач о статическом и динамическом поведении стержней с сосредоточенными массами в потоке внешней среды. В данной работе приведены уравнения статического равновесия стержня с присоединенными массами в потоке жидкости или воздуха, представлены уравнения малых свободных колебаний данного стержня относительно деформированного состояния, а также изложен алгоритм численного определения собственных частот и собственных векторов для подобных стержней. В качестве примера решена задача о глубоком нелинейном деформировании жесткого шланга с двумя присоединенными массами в потоке воды с определением статического напряженно-деформированного состояния. Для этого шланга найдены первые две собственные частоты и собственные формы. Предложенный алгоритм исследования позволяет решать широкий класс статических и динамических задач о взаимодействии стержней с внешним потоком.*

**Ключевые слова:** пространственно-криволинейный стержень, статика, аэродинамические силы, поток жидкости, скорость потока, динамика, малые колебания, собственные частоты, собственные векторы, связанный базис, декартов базис, матрица преобразования, присоединенные массы, предварительно нагруженный стержень.

## **A Rod Carrying Concentrated Masses in the Air or Liquid Flow: Statics, Vibrations, Natural Frequencies and Modes**

**A.M. Naumov**

*Elastic rod-shaped construction elements interacting with air or liquid flow are widespread in engineering. However, scientific literature describes very few solved problems on static and dynamic behavior of rods carrying concentrated masses in the air or liquid flow. The paper presents the equations of static equilibrium of a rod carrying concentrated masses in the air or liquid flow; the equations of small oscillations of said rod in the deformed state; as well as the numerical algorithm for finding natural frequencies and eigenvectors for such*

rods. As an example, the problem of deep nonlinear deformation of a hard hose carrying two concentrated masses in water flow and the definition of the static stress-strain state is solved; and for said hose the modes which correspond to the first two natural frequencies are defined. The proposed algorithm can solve a wide class of static and dynamic problems of rods interaction in an external flow.

**Keywords:** 3-D curved rod (spatially curved rod), statics, aerodynamic forces, liquid flow, flow rate, dynamics, small oscillations, natural frequencies, eigenvectors, associated basis, Cartesian basis, transformation matrix, concentrated masses, preloaded rod.

Стержневые упругие элементы конструкций, взаимодействующие с потоком воздуха или жидкости, имеют очень широкое распространение в самых различных областях техники (рис. 1). Одной из особенностей взаимодействия стержневых элементов конструкций с потоком является зависимость возникающих аэродинамических сил от изменения геометрии осевой линии стержня, что требует совместного рассмотрения уравнений состояния стержня и зависящих от этого состояния аэродинамических сил.

**Аэродинамические силы.** В классических задачах аэрогидроупругости как правило считается, что аэрогидродинамические силы практически от деформации обтекаемых тел не зависят. Например, на рис. 1, б штрихпунктирной линией показано положение провода в потоке, которое может очень сильно отличаться от положения равновесия при отсутствии потока (сплошные линии). Поскольку аэродинамические силы зависят от угла между вектором скорости  $v_0$  (в дальнейшем принято, что скорость  $v_0$  параллельна плоскости  $x_1Ox_3$ , поэтому  $v_0 = v_0 \cos\alpha i_1 + v_0 \sin\alpha i_3$ ) и единичным вектором  $e_1$ , направленным по касательной к осевой линии стержня, то они при нагружении провода потоком непрерывно изменяются. Это необходимо учитывать при исследовании задач статики и динамики стержней, взаимодействующих с потоком. Учет зависимости аэродинамических сил от положения осевой линии стержня качественно изменяет характер этих сил даже для стержней круглого поперечного сечения.

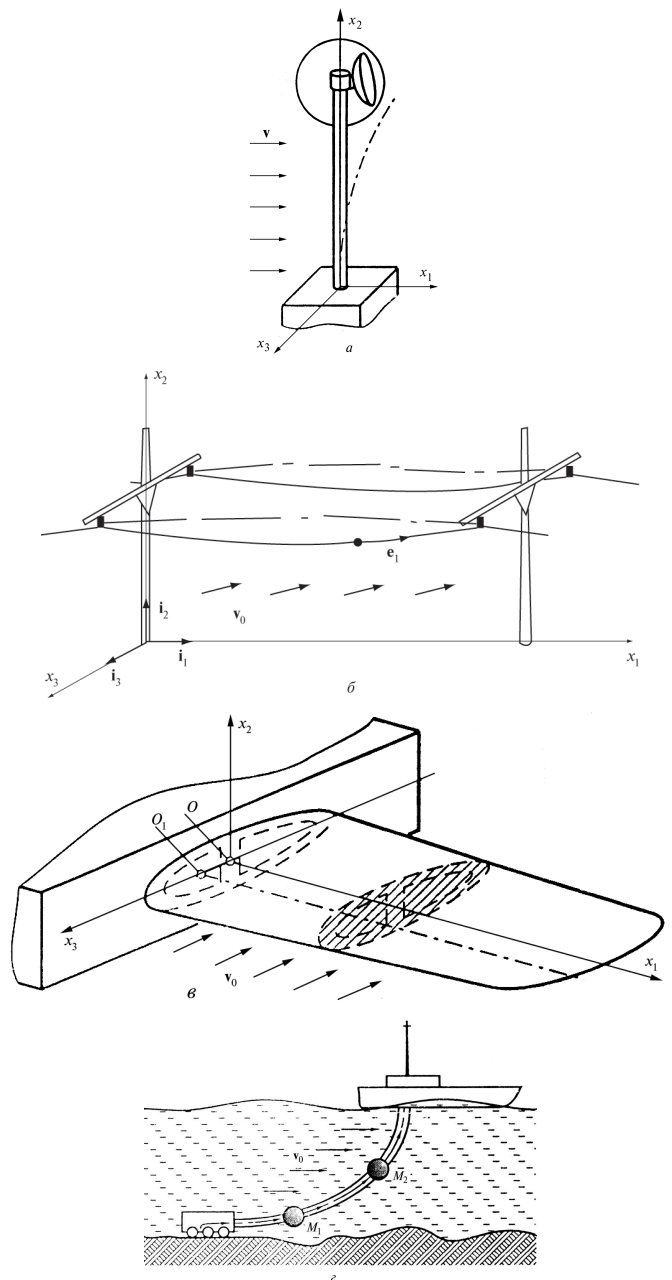


Рис. 1. Примеры стержневых конструкций, взаимодействующих с потоком воздуха или жидкости:

- a — мачта с антенной при ветровой нагрузке;
- б — провода в потоке воздуха;
- в — взаимодействие крыла и аэродинамического потока;
- г — жесткий шланг с присоединенными массами в потоке воды

При численном исследовании задач статики и динамики стержней, взаимодействующих с потоком воздуха или жидкости необходимо иметь информацию об аэродинамических силах (аналитические выражения для аэродинамических сил). Получить точные аналитиче-

ские выражения для распределенных аэродинамических сил при произвольном направлении вектора скорости потока теоретически не представляется возможным. Данной проблеме посвящены многие научные работы, но наиболее полно вывод аэродинамических сил, действующих на пространственно-криволинейный стержень со стороны потока, приведен в работе [1]. В статье [2] представлен еще один вывод этих сил сразу в связанном с сечением деформированного стержня базисе (а не в декартовом, как в [1]), что удобно, так как задача решается именно в этом базисе. Поэтому в этой статье они приводятся без вывода (рис. 2). При выводе аналитических выражений для проекций аэродинамических сил считается, что местный поток в произвольном сечении можно представить в виде двух независимых потоков (как это принято в прикладной аэродинамике): плоский поток со скоростью  $\mathbf{v}_n$  (для этого потока справедлива гипотеза плоских течений [3]) и поток со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , направленный по касательной к осевой линии стержня. Такое представление потока в виде двух независимых потоков является допущением. Вследствие этого допущения полную аэродинамическую силу  $\mathbf{q}_a$  можно представить в виде векторной суммы двух сил — нормальной и касательной:  $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_1$ . Нормальная сила в свою очередь представляется в виде суммы двух сил  $\mathbf{q}_n = q_{n1}\mathbf{e}_1 + q_{n2}\mathbf{e}_2$ :

$$q_{n2} = q_n (\cos\alpha l_{21}^{(1)} + \sin\alpha l_{23}^{(1)});$$

$$q_{n3} = q_n (\cos\alpha l_{31}^{(1)} + \sin\alpha l_{33}^{(1)});$$

$$q_n = \frac{c_n \rho d v_n^2}{2}; \quad v_n = v_0 \sin\varphi_a;$$

$$q_1 = \frac{c_1 \rho d v_1^2}{2}; \quad v_1 = v_0 \cos\varphi_a,$$

где  $\varphi_a$  — угол между вектором  $\mathbf{v}_0$  и вектором  $\mathbf{e}_1$  (см. рис. 2);  $\rho$  — плотность обтекающей среды (газа или жидкости);  $d$  — размер поперечного сечения;  $c_n, c_1$  — аэродинамические коэффициенты силы лобового сопротивления и касательной силы;  $l_{kj}^{(1)}$  — элементы матрицы  $L^{(1)} = LL^0$  (матрицы преобразования базиса  $\{\mathbf{i}\}$  к базису  $\{\mathbf{e}_0\}$ ). Подробный вывод этой матрицы приведен в работе [1].

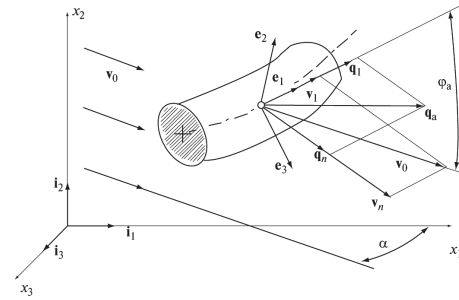


Рис. 2. Элемент стержня с действующими на него аэродинамическими силами

**Уравнения равновесия стержня в потоке.** Общие нелинейные уравнения равновесия пространственно-криволинейного стержня в связанных осях получены в работе [1]:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\eta} + \mathbf{x} \times \mathbf{Q} + \mathbf{q} + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) = 0;$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\eta} + \mathbf{x} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} + \sum_{v=1}^n \mathbf{T}^{(v)} \delta(\eta - \eta_v) = 0;$$

$$L_1 \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\eta} + L_2 \mathbf{x}_0^{(1)} - A^{-1} \mathbf{M} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\eta} + \mathbf{x} \times \mathbf{u} + (l_{11} - 1)\mathbf{e}_1 + l_{21}\mathbf{e}_2 + l_{31}\mathbf{e}_3 = 0;$$

$$\mathbf{M} = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^{(1)}),$$

где  $\mathbf{Q}$  — вектор внутренних сил;  $\mathbf{u}$  — вектор линейных перемещений точек осевой линии стержня;  $l_{ij}$  — элементы матрицы  $L$ ;  $\mathbf{P}^{(i)}, \mathbf{T}^{(v)}$  — сосредоточенные силы и моменты;  $\mathbf{q}, \mathbf{m}$  — распределенные силы и моменты;  $\boldsymbol{\theta} = \vartheta_i \mathbf{e}_i$  — вектор углов поворота связанных осей относительно положения в естественном (ненагруженном) состоянии;  $\mathbf{M}$  — вектор внутренних моментов;  $\eta$  — безразмерная дуговая координата ( $0 \leq \eta \leq 1$ );  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0^{(1)}$  — векторы, компонентами которых являются кручение и кривизны осевой линии стержня после нагружения и в естественном состоянии;  $A$  — диагональная матрица безразмерных жесткостей при кручении ( $A_{11}$ ) и изгибе ( $A_{22}, A_{33}$ ) (относительно главных осей сечения). Входящие в уравнения (1) матрицы  $L_1$  и  $L$  ( $L_2 = L - E$ ) равны

$$L_1 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{10} \cos \vartheta_{30} & 0 & -\sin \vartheta_{20} \\ -\sin \vartheta_{30} & 1 & 0 \\ \sin \vartheta_{20} \cos \vartheta_{30} & 0 & \cos \vartheta_{20} \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_{20} \cos \vartheta_{30} & \cos \vartheta_{20} \cos \vartheta_{30} \cos \vartheta_{10} + \sin \vartheta_{20} \sin \vartheta_{10} & \cos \vartheta_{30} \sin \vartheta_{30} \sin \vartheta_{10} - \sin \vartheta_{20} \cos \vartheta_{30} \\ -\sin \vartheta_{30} & \cos \vartheta_{20} \cos \vartheta_{30} & \cos \vartheta_{20} \sin \vartheta_{10} \\ \sin \vartheta_{20} \cos \vartheta_{30} & \sin \vartheta_{30} \sin \vartheta_{30} \cos \vartheta_{10} - \cos \vartheta_{20} \sin \vartheta_{10} & \sin \vartheta_{20} \sin \vartheta_{30} \sin \vartheta_{10} + \cos \vartheta_{20} \cos \vartheta_{10} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим случай когда стержень (жесткий шланг) содержит две сосредоточенные массы  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 3). При этом имеем

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}^{(i)} \delta(\eta - \eta_i) = \mathbf{F}_a^{(1)} \delta(\eta - \eta_1) + \mathbf{F}_a^{(2)} \delta(\eta - \eta_2) + \mathbf{F}_b^{(1)} \delta(\eta - \eta_1) + \mathbf{F}_b^{(2)} \delta(\eta - \eta_2);$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{T}^{(v)} \delta(\eta - \eta_v) = 0,$$

где  $\mathbf{F}_a^{(i)}$  — сосредоточенные аэродинамические силы, действующие на две массы,  $i = 1, 2$  (для сферической массы радиуса  $R$  принимаем  $|\mathbf{F}_a| = c \rho v_0^2 R^2 / 2$ ,  $c = 0,5$ );  $\mathbf{F}_b = -M_j \mathbf{g}_i$  — сосредоточенные силы веса обеих масс,  $j = 1, 2$ . Необходимо отметить, что сосредоточенные аэродинамические силы, действующие на сферические массы, являются «мертвыми», и направленными строго по направлению вектора скорости  $\mathbf{v}_0$ . Вектор полной распределенной нагрузки  $\mathbf{q}$  определяют по формуле

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_a + \mathbf{q}_g; \quad \mathbf{q}_g = m_0 \mathbf{g} = -m_0 \mathbf{g}_i.$$

Здесь  $m_0$  — масса единицы длины стержня;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести.

В скалярной форме записи на связанные оси получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\frac{dQ_1}{d\eta} + Q_3 \alpha_2 - Q_2 \alpha_3 + q_1 + \sum_{i=1}^2 (F_{a1}^{(i)} + F_{b1}^{(i)}) \delta(\eta - \eta_i) = 0;$$

$$\frac{dQ_2}{d\eta} + Q_1 \alpha_2 - Q_2 \alpha_1 + q_2 + \sum_{i=1}^2 (F_{a2}^{(i)} + F_{b2}^{(i)}) \delta(\eta - \eta_i) = 0;$$

$$\frac{dQ_3}{d\eta} + Q_2 \alpha_1 - Q_1 \alpha_2 + q_3 + \sum_{i=1}^2 (F_{a3}^{(i)} + F_{b3}^{(i)}) \delta(\eta - \eta_i) = 0;$$

$$\frac{dM_1}{d\eta} + M_3 \alpha_2 - M_2 \alpha_3 = 0;$$

$$\frac{dM_2}{d\eta} + M_1 \alpha_2 - M_2 \alpha_1 - Q_2 = 0;$$

$$\frac{dM_3}{d\eta} + M_2 \alpha_1 - M_1 \alpha_2 + Q_3 = 0;$$

$$\alpha_1 = \left( \frac{d\theta_1}{d\eta} + \alpha_{10} \right) \cos \vartheta_{20} \cos \theta_{30} - \frac{d\theta_3}{d\eta} \sin \theta_2 +$$

$$+ (\cos \theta_1 \cos \theta_3 \sin \vartheta_3 + \sin \theta_2 \sin \theta_1) \alpha_{20} +$$

$$+ (\sin \theta_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \sin \theta_1) \alpha_{30};$$

$$\alpha_2 = \frac{d\theta_2}{d\eta} - \left( \frac{d\theta_1}{d\eta} + \alpha_{10} \right) \sin \theta_3 +$$

$$+ \cos \theta_3 \cos \theta_1 \alpha_{20} + \cos \theta_3 \sin \theta_1 \alpha_{30};$$

$$\alpha_3 = \frac{d\theta_3}{d\eta} \cos \theta_2 + \left( \frac{d\theta_1}{d\eta} + \alpha_{10} \right) \sin \theta_2 \cos \theta_3 +$$

$$+ (\sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \sin \theta_1) \alpha_{20} +$$

$$+ (\sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_2 \cos \theta_1) \alpha_{30};$$

$$\frac{du_1}{d\eta} + u_3 \alpha_2 - u_2 \alpha_3 + l_{11} - 1 = 0;$$

$$\frac{du_2}{d\eta} + u_1 \alpha_3 - u_3 \alpha_1 + l_{21} = 0;$$

$$\frac{du_3}{d\eta} + u_2 \alpha_1 - u_1 \alpha_2 + l_{31} = 0;$$

$$M_1 = A_{11} (\alpha_1 - \alpha_{10}); \quad M_2 = A_{22} (\alpha_2 - \alpha_{20});$$

$$M_3 = A_{33} (\alpha_3 - \alpha_{30}).$$

Решая численно систему нелинейных уравнений (2) (например, методом последовательных нагружений) можно получить вектор состояния шланга в статике. Остановимся кратко на методе последовательных нагружений. Идея метода состоит в последовательном нагружении стержня внешними силами, подобранными таким образом, что при каждом нагружении перемещения точек осевой линии стержня и углы поворота связанных осей являются малыми. Этот вариант численного решения нелинейных уравнений приводит при каждом дискретном увеличении нагрузки к линейным (линеаризованным) уравнениям. Для  $m$ -го нагружения стержня внешние силы соответственно равны

$$\mathbf{F}^{(i)(m)} = \beta \mathbf{F}^{(i)}; \quad \mathbf{q}^{(m)} = \beta \mathbf{q},$$

где  $\beta$  определяет часть общей нагрузки на каждом шаге нагружения,  $\beta < 1$ ;  $m$  — номер шага нагружения. Подробный вывод самих линеари-

зованных уравнений равновесия и приращений нагрузки на каждом шаге нагружения дан в работе [1], поэтому в статье не приводятся. Численное интегрирование системы уравнений равновесия стержня методом последовательных нагружений также подробно изложено в статье [4].

В качестве примера рассмотрим стержень в виде жесткого шланга (рис. 3) с малыми, но конечными изгибными и крутильной жесткостями. Форма равновесия такого стержня близка к форме равновесия абсолютно гибкого стержня (так называемая цепная линия). Поэтому на первом шаге нагружения вектор  $\mathbf{a}_0^{(1)}$  имеет только одну компоненту, вектор  $\mathbf{Q}_0 = Q_{10} \mathbf{e}_{10}$ ,  $\mathbf{M}_0 = 0$  (внутренняя сила  $Q_{10}$  в шланге при простом провисании без учета масс может быть определена по известным методикам, как например в работе [5]).

При численном решении были приняты следующие значения основных параметров:

$$\begin{aligned}
 l &= 30 \text{ м}; \quad \rho = 2500 \text{ кг / м}^3; \quad x_{1к} = 21 \text{ м}; \\
 x_{2к} &= 12 \text{ м}; \quad d = 0,29 \text{ м}; \quad A_{11} = 5 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^2; \\
 A_{22} &= A_{33} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2; \quad M_1 = 250 \text{ кг}; \\
 M_2 &= 500 \text{ кг}; \quad R_1 = 0,35 \text{ м}; \quad R_2 = 0,5 \text{ м}; \\
 \eta_1 &= 0,3; \quad \eta_2 = 0,7,
 \end{aligned}$$

где  $x_{1к}$ ,  $x_{2к}$  — координаты конца шланга (начальные координаты — нулевые);  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  — безразмерные координаты крепления масс. Про-

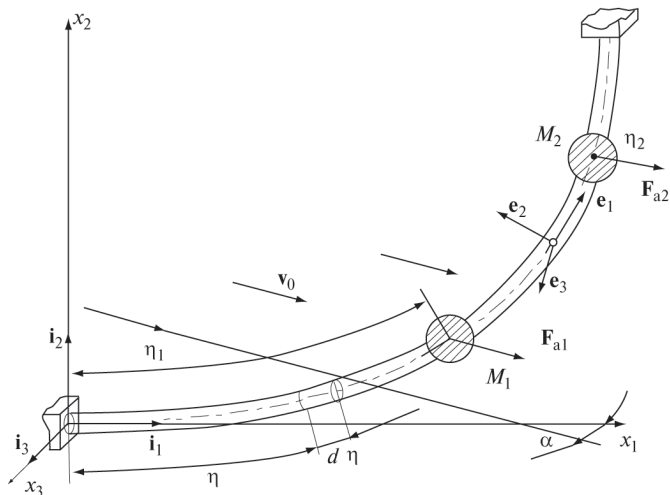


Рис. 3. Схема нагружения жесткого шланга с двумя присоединенными массами в потоке жидкости

екции осевой линии стержня на координатные плоскости при скорости воды  $v_0 = 3 \text{ м / с}$  и угле  $\alpha = 90^\circ$  представлены на рис. 4 (недеформированное состояние шланга показано тонкой линией). Зависимости внутренних сил и моментов приведены на рис. 5.

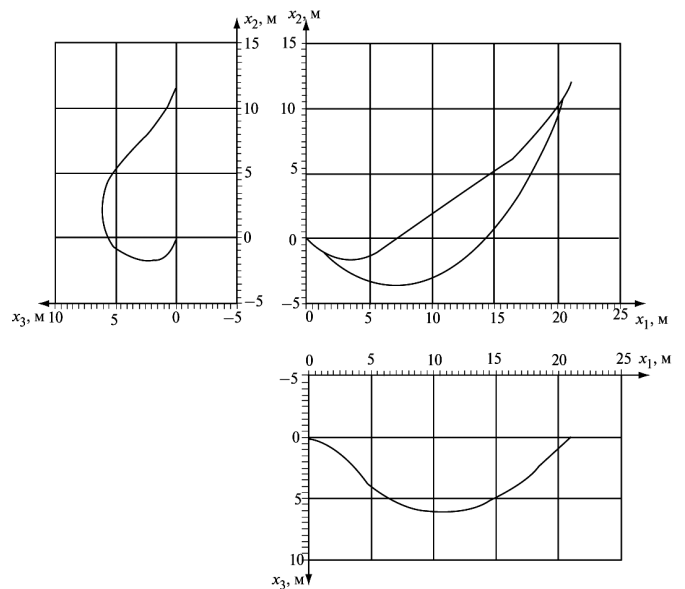


Рис. 4. Проекция осевой линии стержня на координатные плоскости в статике для скорости воды  $v_0 = 3 \text{ м / с}$  и угла  $\alpha = 90^\circ$

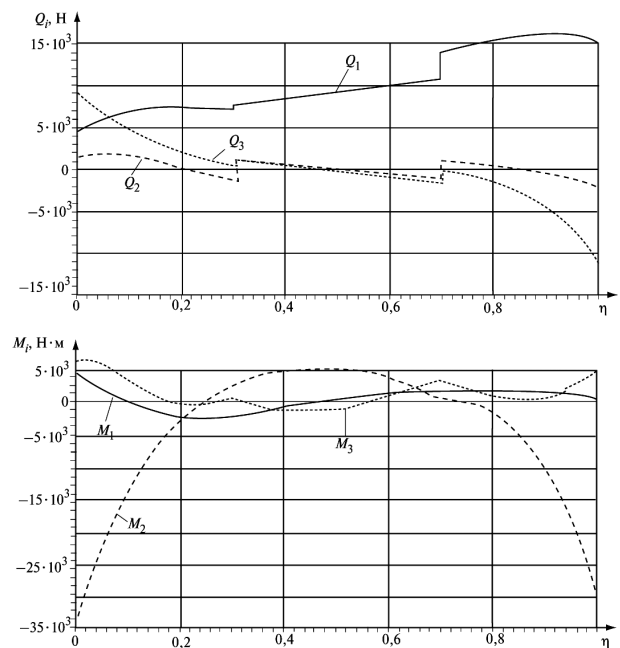


Рис. 5. Зависимости внутренних сил  $Q_i$  и моментов  $M_i$  в статике для скорости воды  $v_0 = 3 \text{ м / с}$  и угла  $\alpha = 90^\circ$

Некоторые компоненты вектора состояния шланга при статическом нагружении войдут в качестве коэффициентов в уравнения малых колебаний.

**Уравнения малых свободных колебаний стержня с сосредоточенными массами.** Для приближенных численных исследований вынужденных нестационарных колебаний пространственно-криволинейных стержней в потоке, нагруженных динамическими силами и моментами (сосредоточенными и распределенными), необходимо знать координатные функции (векторы), удовлетворяющие краевым условиям задачи. В качестве таких функций можно использовать (это наиболее эффективный вариант) собственные векторы свободных колебаний более простой консервативной задачи.

Рассмотрим алгоритм численного точного определения собственных значений и собственных векторов консервативной задачи для стержня, имеющего две сферические сосредоточенные массы (см. рис. 3). Если в уравнениях малых колебаний стержня не учитывать малые динамические составляющие аэродинамических сил (что, конечно, является приближением), то имеем консервативную задачу. Однако, определенные при этом собственные векторы позволяют решать сложные задачи динамики стержней приближенными численными методами.

Векторные уравнения свободных малых колебаний стержня с сосредоточенными массами относительно состояния равновесия в потоке в связанных осях имеют следующий вид (без учета сил вязкого сопротивления) [6]:

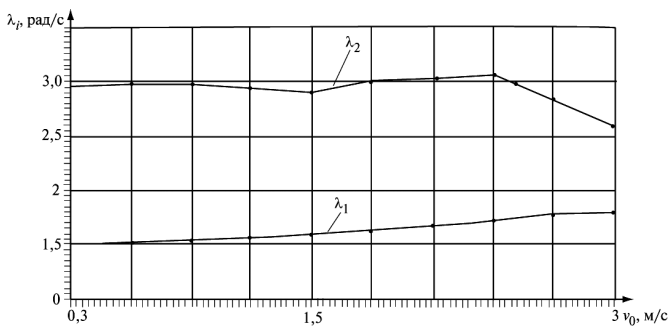


Рис. 6. Зависимости двух первых собственных частот  $\lambda_1, \lambda_2$  при увеличении скорости потока воды до  $v_0 = 3$  м/с

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \eta} - A_Q \Delta \mathbf{x} - A_x \Delta \mathbf{Q} &= \\ = -M_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} \delta(\eta - \eta_1) - M_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} \delta(\eta - \eta_2); \\ J \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \eta} - A_M \Delta \mathbf{x} - A_x \Delta \mathbf{M} - A_1 \Delta \mathbf{Q} &= \\ = -J_{M_1} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial \tau^2} \delta(\eta - \eta_1) - J_{M_2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial \tau^2} \delta(\eta - \eta_2); \\ \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\eta} + A_x \boldsymbol{\theta} - \Delta \mathbf{x} &= 0; \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\eta} + A_x \mathbf{u} + A_1 \Delta \boldsymbol{\theta} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{M} = A \Delta \mathbf{x},$$

где  $A_x = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{30} & \alpha_{20} \\ \alpha_{30} & 0 & -\alpha_{10} \\ -\alpha_{20} & \alpha_{10} & 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

$\Delta \mathbf{Q}, \Delta \mathbf{M}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}$  — дополнительные малые внутренние усилия и перемещения, возникающие при колебаниях;  $J$  — тензор инерции элемента стержня,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix};$$

$$J_{11} = J_1 \rho^{(1)}, J_{22} = J_2 \rho^{(1)}, J_{33} = J_3 \rho^{(1)}.$$

Здесь  $J_1, J_2, J_3$  — осевые моменты инерции поперечного сечения стержня относительно главных осей;  $\rho^{(1)}$  — плотность материала стержня (в дальнейшем при численном расчете принимается  $\rho^{(1)} = 2500$  кг/м<sup>3</sup>);  $J_{M_1} = M_1 R_1^2, J_{M_2} = M_2 R_2^2$  — физические моменты инерции сосредоточенных сферических масс. Матрицы  $A_Q$  и  $A_M$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_Q &= \begin{bmatrix} 0 & Q_{30} & -Q_{20} \\ -Q_{30} & 0 & Q_{10} \\ Q_{20} & -Q_{10} & 0 \end{bmatrix}; \\ A_M &= \begin{bmatrix} 0 & M_{30} & -M_{20} \\ -M_{30} & 0 & M_{10} \\ M_{20} & -M_{10} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $Q_{i0}$  и  $M_{i0}$  — компоненты векторов  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathbf{M}_0$ , полученные при решении задачи статики.

Поскольку в рамках данной работы решается консервативная задача, то предполагается, что приращений аэродинамических сил при колебаниях шланга не происходит. Ищем решение системы (3) в следующем виде:

$$\Delta Q = \Delta Q_0(\eta)e^{i\lambda\tau}; \Delta M = \Delta M_0(\eta)e^{i\lambda\tau};$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\eta)e^{i\lambda\tau}; \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0(\eta)e^{i\lambda\tau}.$$

После преобразований получаем векторные уравнения равновесия

$$\frac{d\mathbf{Z}_0}{d\eta} + B(\eta, \lambda)\mathbf{Z}_0 = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2, \quad (4)$$

где  $\mathbf{Z}_0 = [\Delta Q_0, \Delta M_0, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{u}_0]^T$  — вектор состояния системы,

$$B(\eta, \lambda) = \begin{bmatrix} A_{\text{э}} & A_Q A^{-1} & 0 & \lambda^2 E \\ A_1 & A_M A^{-1} + A_{\text{э}} & J\lambda^2 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_{\text{э}} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{\text{э}} \end{bmatrix};$$

$$\Delta\Phi_1 = \begin{bmatrix} -M_1 \lambda^2 \mathbf{u}_0 \delta(\eta - \eta_1) \\ -J_{M_1} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 \delta(\eta - \eta_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\Delta\Phi_2 = \begin{bmatrix} -M_2 \lambda^2 \mathbf{u}_0 \delta(\eta - \eta_2) \\ -J_{M_2} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 \delta(\eta - \eta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (4) имеет вид:

$$\mathbf{Z}_0(\eta) = K(\eta)\mathbf{C} +$$

$$+ \int_0^\eta K(\eta)K^{-1}(h') \begin{bmatrix} -M_1 \lambda^2 \mathbf{u}_0 \delta(h' - \eta_1) \\ -J_{M_1} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 \delta(h' - \eta_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dh' + \quad (5)$$

$$+ \int_0^\eta K(\eta)K^{-1}(h') \begin{bmatrix} -M_2 \lambda^2 \mathbf{u}_0 \delta(h' - \eta_2) \\ -J_{M_2} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 \delta(h' - \eta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dh',$$

где  $K(\eta)$  — фундаментальная матрица решений однородного уравнения ( $K(0) = E$ );  $\mathbf{C}$  — вектор начальных данных. В соответствии со свойствами  $\delta$ -функции получаем

$$\int_0^\eta K(\eta)K^{-1}(h') \begin{bmatrix} -M_1 \lambda^2 \mathbf{u}_0 \delta(h' - \eta_1) \\ -J_{M_1} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 \delta(h' - \eta_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dh' =$$

$$= K(\eta)K^{-1}(\eta_1) \begin{bmatrix} -M_1 \lambda^2 \mathbf{u}_0 H(\eta - \eta_1) \\ -J_{M_1} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 H(\eta - \eta_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$\int_0^\eta K(\eta)K^{-1}(h') \begin{bmatrix} -M_2 \lambda^2 \mathbf{u}_0 \delta(h' - \eta_2) \\ -J_{M_2} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 \delta(h' - \eta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dh' =$$

$$= K(\eta)K^{-1}(\eta_2) \begin{bmatrix} -M_2 \lambda^2 \mathbf{u}_0 H(\eta - \eta_2) \\ -J_{M_2} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0 H(\eta - \eta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $H(\eta - \eta_i)$  — функция Хевисайда.

Таким образом, из выражения (5) с учетом (6) имеем

$$\mathbf{Z}_0(\eta, \lambda) = K(\eta, \lambda)\mathbf{C} +$$

$$+ K(\eta, \lambda)K^{-1}(\eta_1, \lambda) \begin{bmatrix} -M_1 \lambda^2 \mathbf{u}_0(\eta_1) \\ -J_{M_1} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0(\eta_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_1) + \quad (7)$$

$$+ K(\eta, \lambda)\mathbf{C} +$$

$$+ K(\eta, \lambda)K^{-1}(\eta_2, \lambda) \begin{bmatrix} -M_2 \lambda^2 \mathbf{u}_0(\eta_2) \\ -J_{M_2} \lambda^2 \boldsymbol{\theta}_0(\eta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_2).$$

Для жестко закрепленного стержня при  $\eta=0$   $\boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{u}(0) = 0$  и при  $\eta=1$   $\boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{u}(0) = 0$ . Из условий при  $\eta=0$  получаем  $c_7 = c_8 = \dots = c_{12} = 0$ . Оставшиеся шесть компонент вектора  $\mathbf{C}$  находят из шести краевых условий при  $\eta=1$ . В результате из уравнения (7) получаем систему шести однородных уравнений ( $k_{ij}^{(1)}$  — элементы матрицы  $K^{(1)} = K(1)K^{-1}(\eta_1)$ ,  $k_{ij}^{(2)}$  — элементы матрицы  $K^{(2)} = K(1)K^{-1}(\eta_2)$ ):

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{10}(1) &= \sum_{j=1}^6 k_{7j}(1)c_j - k_{71}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{10}(\eta_1) - \\
 &- k_{72}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{20}(\eta_1) - k_{73}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{30}(\eta_1) - \\
 &- k_{74}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{10}(\eta_1) - k_{75}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{20}(\eta_1) - \\
 &- k_{76}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{30}(\eta_1) - k_{71}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{10}(\eta_2) - \\
 &- k_{72}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{20}(\eta_2) - k_{73}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{30}(\eta_2) - \\
 &- k_{74}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{10}(\eta_2) - k_{75}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{20}(\eta_2) - \\
 &- k_{76}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{30}(\eta_2) = 0; \\
 \vartheta_{20}(1) &= \sum_{j=1}^6 k_{8j}(1)c_j - k_{81}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{10}(\eta_1) - \\
 &- k_{82}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{20}(\eta_1) - k_{83}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{30}(\eta_1) - \\
 &- k_{84}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{10}(\eta_1) - k_{85}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{20}(\eta_1) - \\
 &- k_{86}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{30}(\eta_1) - k_{81}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{10}(\eta_2) - \\
 &- k_{82}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{20}(\eta_2) - k_{83}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{30}(\eta_2) - \\
 &- k_{84}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{10}(\eta_2) - k_{85}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{20}(\eta_2) - \\
 &- k_{86}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{30}(\eta_2) = 0; \\
 &\dots \\
 u_{30}(1) &= \sum_{j=1}^6 k_{12,j}(1)c_j - k_{12,1}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{10}(\eta_1) - \\
 &- k_{12,2}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{20}(\eta_1) - k_{12,3}^{(1)} M_1 \lambda^2 u_{30}(\eta_1) - \\
 &- k_{12,4}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{10}(\eta_1) - k_{12,5}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{20}(\eta_1) - \\
 &- k_{12,6}^{(1)} J_{M_1} \lambda^2 \vartheta_{30}(\eta_1) - k_{12,1}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{10}(\eta_2) - \\
 &- k_{12,2}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{20}(\eta_2) - k_{12,3}^{(2)} M_2 \lambda^2 u_{30}(\eta_2) - \\
 &- k_{12,4}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{10}(\eta_2) - k_{12,5}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{20}(\eta_2) - \\
 &- k_{12,6}^{(2)} J_{M_2} \lambda^2 \vartheta_{30}(\eta_2) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{10}(\eta_1) &= \sum_{j=1}^6 k_{7j}(\eta_1)c_j, \quad \vartheta_{10}(\eta_2) = \sum_{j=1}^6 k_{7j}(\eta_2)c_j; \\
 \vartheta_{20}(\eta_1) &= \sum_{j=1}^6 k_{8j}(\eta_1)c_j, \quad \vartheta_{20}(\eta_2) = \sum_{j=1}^6 k_{8j}(\eta_2)c_j; \\
 \vartheta_{30}(\eta_1) &= \sum_{j=1}^6 k_{9j}(\eta_1)c_j, \quad \vartheta_{30}(\eta_2) = \sum_{j=1}^6 k_{9j}(\eta_2)c_j;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{10}(\eta_1) &= \sum_{j=1}^6 k_{10,j}(\eta_1)c_j, \quad u_{10}(\eta_2) = \sum_{j=1}^6 k_{10,j}(\eta_2)c_j; \tag{9} \\
 u_{20}(\eta_1) &= \sum_{j=1}^6 k_{11,j}(\eta_1)c_j, \quad u_{20}(\eta_2) = \sum_{j=1}^6 k_{11,j}(\eta_2)c_j; \\
 u_{30}(\eta_1) &= \sum_{j=1}^6 k_{12,j}(\eta_1)c_j, \quad u_{30}(\eta_2) = \sum_{j=1}^6 k_{12,j}(\eta_2)c_j.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (9) в соотношения (8), получаем систему шести однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^6 b_{ij}(1)c_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \tag{10}$$

где  $b_{ij}$  — коэффициенты, зависящие от  $\lambda, K(1), K^{(1)}(1), K^{(2)}(1), K(\eta_1), K(\eta_2)$ .

Для того чтобы система (10) имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю.

Введя для этого определителя обозначение  $\det(1, \lambda)$ , получим уравнение  $\det(1, \lambda) = 0$ . Решая его для ряда значений  $\lambda$ , находим численно такие  $\lambda_*$ , при которых определитель с заданной точностью можно считать равным нулю. Значения  $\lambda_k$ , при которых  $\det_k(1, \lambda_k)$  обращается в ноль, являются частотами колебаний шланга. Из системы уравнений (10), полагая  $c_6^{(k)} = 1$  для каждого  $\lambda_k$ , находим  $c_1^{(k)} \dots c_5^{(k)}$  и получаем собственные векторы  $Z_0^{(k)}(\eta, \lambda_k)$ , которые удовлетворяют краевым условиям и учитывают физические особенности задачи (компоненты вектора  $\Delta Q_0^{(k)}$  разрывны в сечении, где находится сосредоточенная масса).

В аналитической записи собственные векторы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Z_0^{(k)}(\eta, \lambda_k) &= K(\eta, \lambda_k)C + \\
 &+ K(\eta, \lambda_k)K^{-1}(\eta_1, \lambda_k) \begin{bmatrix} -M_1 \lambda_k^2 \mathbf{u}_0(\eta_1) \\ -J_{M_1} \lambda_k^2 \boldsymbol{\theta}_0(\eta_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_1) + \\
 &+ K(\eta, \lambda_k)K^{-1}(\eta_2, \lambda_k) \begin{bmatrix} -M_2 \lambda_k^2 \mathbf{u}_0(\eta_2) \\ -J_{M_2} \lambda_k^2 \boldsymbol{\theta}_0(\eta_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} H(\eta - \eta_2).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

При численном решении приняты те же значения, что и в статике. Зависимости первых двух безразмерных частот шланга при измене-



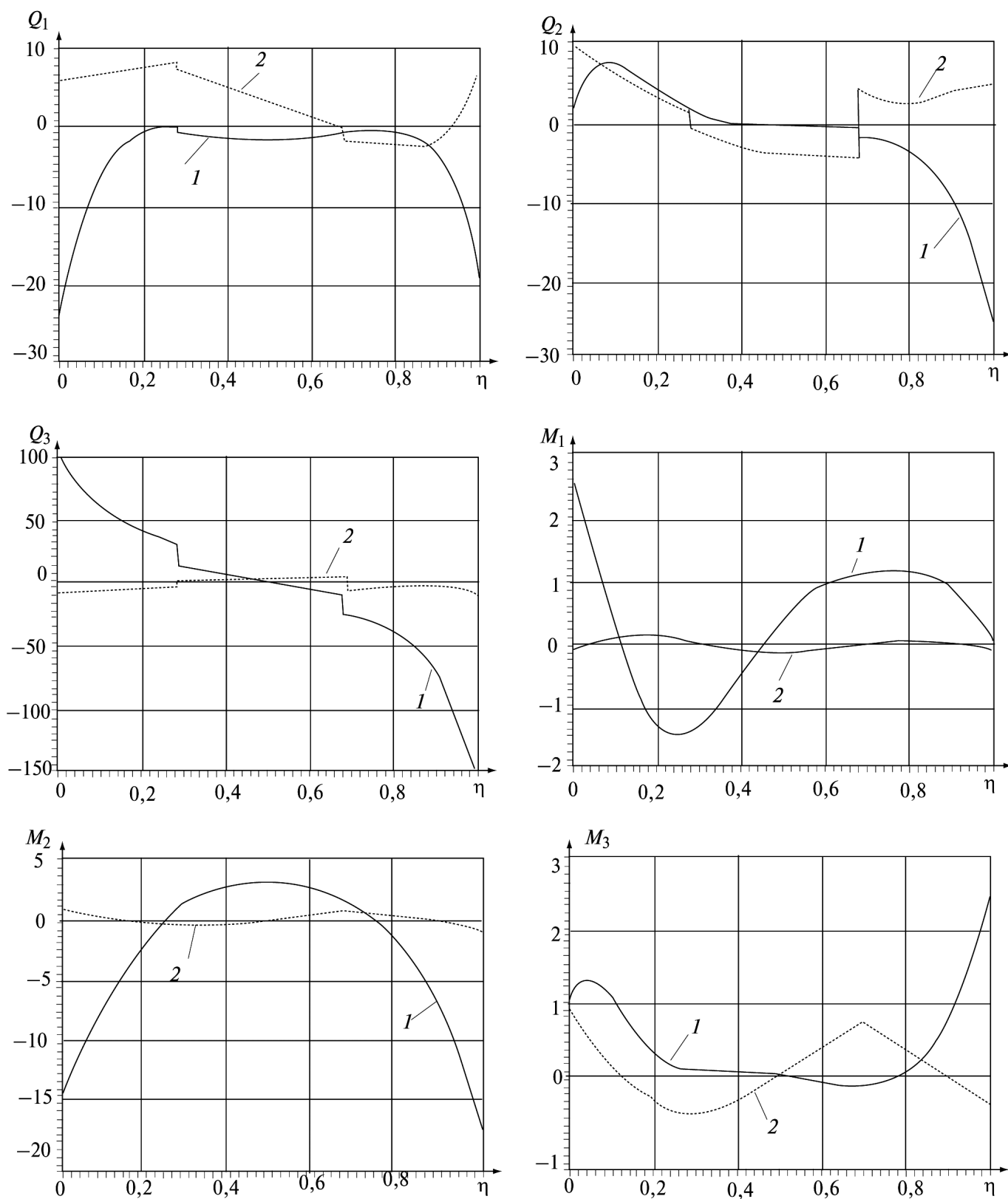


Рис. 7. Изменение компонент собственных векторов  $Z_0^{(1)}$  и  $Z_0^{(2)}$  для скорости воды  $v_0 = 3$  м/с и угла  $\alpha = 90^\circ$  (внутренние силы  $Q_i$  и моменты  $M_i$ ):  
 1 — первая форма; 2 — вторая форма

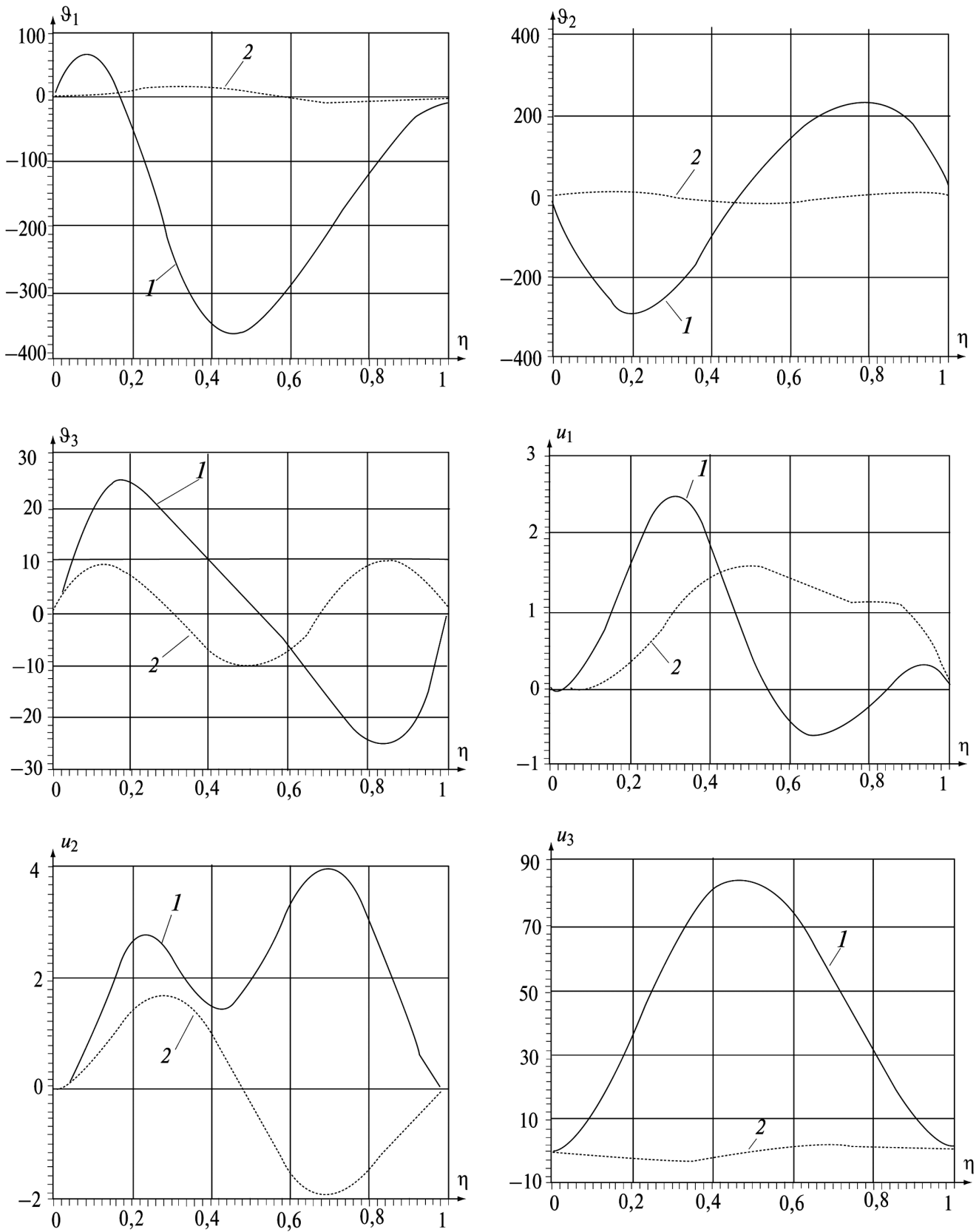


Рис. 8. Изменение компонент собственных векторов  $Z_0^{(1)}$  и  $Z_0^{(2)}$  для скорости воды  $v_0 = 3$  м/с и угла  $\alpha = 90^\circ$  (углы поворота  $\vartheta_i$  и перемещения  $u_i$ ):  
 1 — первая форма; 2 — вторая форма

нии скорости  $v_0$  от 0 до 3 м/с (т. е. в формуле (11)  $k=1,2$ ) представлены на рис. 6. Изменение компонент собственных векторов  $Z_0^{(1)}$  и  $Z_0^{(2)}$  изображено на рис. 7 и 8.

Рассмотренный алгоритм численного анализа уравнений малых колебаний жесткого предварительно нагруженного шланга позволяет определить частоты (собственные значения) и формы (собственные векторы) колебаний шланга с присоединенными сосредоточенными массами.

## Литература

1. Светлицкий В.А. Механика стержней: В 2 т. Т. 1. Статика. М.: Физматлит, 2009, 408 с.
2. Наумов А.М. Об одном способе вывода аэродинамических сил, действующих на пространственный стержень со стороны потока воздуха // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 3. С. 32–35.
3. Фершинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. 539 с.
4. Наумов А.М., Светлицкий В.А. Определение напряженно-деформированного состояния «жесткого» шланга, находящегося в потоке воздуха или жидкости // МТТ. 1999. № 6. С. 167–172.
5. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.

6. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2 т. Т. 2. Динамика. М.: Физматлит, 2009. 384 с.

## References

1. Svetlitskii V.A. *Mekhanika stержnei, tom 1. Statika* [Mechanical rods, vol. 1. Statics]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 408 p.
2. Naumov A.M. Ob odnom sposobe vyvoda aerodinamicheskikh sil, deistvuiushchikh na prostranstvennyi stержen' so storony potoka vozdukhа [A Mathematical Derivation Method of the Aerodynamic Forces Effected on a Spatial Rod by Air Flow] *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building]. 2013, no. 3, pp. 32–35.
3. Fershing G. *Osnovy aerouprugosti* [Fundamentals aeroelasticity]. Moscow, Mashinostroenie publ, 1984. 539 p.
4. Naumov A.M., Svetlitskii V.A. Opredelenie napriazhenno-deformirovannogo sostoianiiа «zhestkogo» shlanga, nakhodiashchegosia v potoke vozdukhа ili zhidkosti [Determination of the stress-strain state of a «hard», that runs in a stream of air or liquid]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1999, no. 6, pp. 167–172.
5. Svetlitskii V.A. *Mekhanika gibkikh stержnei i nitei* [Mechanics of flexible rods and wires]. Moscow, Mashinostroenie publ., 1978. 222 p.
6. Svetlitskii V.A. *Mekhanika stержnei, tom 2. Dinamika* [Mechanical rods, vol. 2. Dynamics]. Moscow, Fizmatlit publ., 2009. 384 p.

Статья поступила в редакцию 06.03.2013

## Информация об авторе

**НАУМОВ Андрей Михайлович** (Москва) — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: nam63@mail.ru).

## Information about the author

**NAUMOV Andrey Mikhailovich** (Moscow) — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor of «Applied Mechanics» Department. MSTU named after N.E. Bauman (BMSTU, building 1, 2-nd Baumanskaya str., 5, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail nam63@mail.ru).