

**КУЗЕНКОВ**

Владимир Васильевич  
доцент, кандидат  
технических наук

**ТИМОФЕЕВ**

Геннадий Алексеевич  
профессор, доктор  
технических наук  
кафедры «Теория  
механизмов и машин»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

## Динамика следящего привода с волновой зубчатой передачей

**В.В. Кузенков, Г.А. Тимофеев**

*Рассмотрена динамика электромеханического следящего привода с силовой частью, состоящей из электрического двигателя постоянного тока и редуктора — волновой зубчатой передачи с генератором волн внешнего деформирования. Приведены уравнения движения основных элементов системы, позволяющие оценить частотные и переходные характеристики привода.*

**Ключевые слова:** электромеханический привод, волновая зубчатая передача, коллекторный электродвигатель, генератор волн.

*The article discusses the dynamics of electromechanical servo drive with the power unit, consisting of an electric DC motor and gear - wave gear with a generator of external deformation waves. The equations of motion of the system main elements allowing to assess the frequency and transient response of the drive are presented.*

**Keywords:** electromechanical actuator, wave gear, brushed motor, wave generator.

Входной управляющий сигнал, преобразованный в следящем приводе, с определенной точностью воспроизводится в виде перемещения управляемого объекта. Точность воспроизведения объектом управляющего сигнала зависит как от точности системы управления, так и от точности преобразующего механизма привода. Под воздействием периодических управляющих сигналов в приводе возбуждаются крутильные колебания, наибольшая амплитуда которых будет в резонансной зоне, когда частота изменения возбуждающего воздействия близка к частоте собственных колебаний привода. В этой зоне крутильные колебания существенно влияют на работу следящей системы, увеличивая ошибку воспроизведения объектом управляющего сигнала до величин, превышающих допустимые пределы. Поэтому при проектировании следящего привода необходимо стремиться к тому, чтобы зона рабочих частот системы была значительно удалена от резонансных частот привода. Для этого необходимо уже на стадии проектирования хотя бы ориентировочно знать частоты собственных крутильных колебаний привода. Анализ переходных характеристик при типовых входных воздействиях позволяет получить такие важные параметры, как быстродействие системы и склонность ее к колебаниям. На переходные характеристики электромеханических приводов оказывают влияние как собственные свойства редуктора, так и параметры электродвигателя [1–5].

Привод с волновой зубчатой передачей представляет собой сложную нелинейную механическую систему с распределенными параметрами. Однако, для оценки переходных характеристик привода можно ограничиться рассмотрением волновой зубчатой передачи как многомассной системы с нелинейными связями, обладающими упругими и диссипативными свойствами. Это позволяет упростить запись уравнений движения системы и их решение без существенной потери точности.

На рисунке 1 приведена расчетная схема электромеханического привода с волновой зубчатой передачей, имеющей кольцевой генератор волн внешнего деформирования, кинематическая схема которой рассмотрена в работе [6]. Схема содержит элементы, относящиеся к электродвигателю, промежуточной зубчатой передаче и зубчатой волновой передаче. В качестве входного воздействия принято напряжение на обмотке якоря электродвигателя, возмущающим воздействием является момент сопротивления нагрузки, а выходной величиной — угол поворота выходного вала.

Рассмотрим динамику электромеханического привода с волновой зубчатой передачей, имеющей кольцевой генератор волн внешнего деформирования.

Расчетная эквивалентная схема составляется с использованием обычных при подобных исследованиях допущений [1, 4, 5, 7, 8]: деформация упругих элементов линейна и подчиняется закону Гука, моменты инерции упругих элементов равны нулю, инерционные звенья не подвержены деформациям, потери энергии на деформацию звеньев не учитываются.

Коллекторный электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения представлен моментом инерции якоря, моментом трения, индуктивностью и сопротивлением обмотки якоря. Промежуточная зубчатая передача моделируется идеальной передачей, трением, инерционностью, зазором в зацеплении, упругостью и демпфером. Волновая передача представлена идеальной зубчатой передачей, инерционностью и нелинейным упругим элементом с потерями.

Уравнения движения записывают с помощью уравнений Лагранжа — Максвелла, имеющих форму уравнений Лагранжа второго рода. В качестве обобщенных фазовых координат принимаются ток в индуктивности электрической части и углы поворота вращающихся инерционных элементов механической части. Учитывая последовательное соединение инерционных элементов, для каждой инерционности записываются дифференциальные

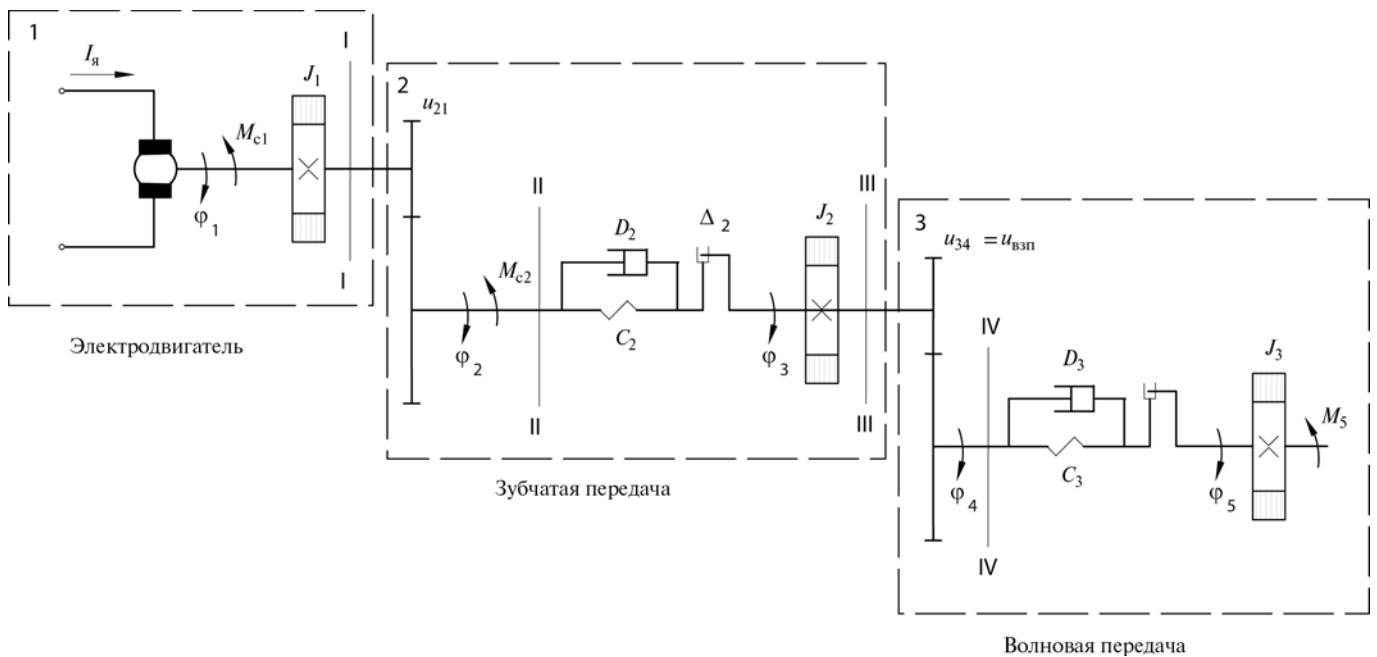


Рис. 1. Принципиальная схема электромеханического привода с волновой зубчатой передачей

уравнения ее движения, а также уравнения геометрических и дифференциальных связей между обобщенными координатами. Ниже приведены результаты применения указанного метода для записи уравнений движения элементов привода.

Электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения с учетом электромагнитной и электромеханической постоянных времени

$$\frac{dJ_{я}}{dt} = \frac{U_{д} - J_{я}r_{я} - c_1\omega_1}{L}; \quad (1)$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{c_1J_{я} - M_1 - M_{C1}}{J_1}; \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad (3)$$

$$M_{C1} = -M_{тр1} \text{sign}(\omega_1), \quad (4)$$

где  $J_{я}$  — ток в якорной цепи электродвигателя;  $U_{д}$  — напряжение питания якорной цепи;  $r_{я}$  — активное сопротивление якорной цепи;  $c_1$  — коэффициент, учитывающий конструктивные особенности электродвигателя;  $\omega_1$  — угловая скорость якоря электродвигателя;  $L$  — индуктивность якорной цепи;  $M_1$  — момент в сечении I — I расчетной схемы;  $J_1$  — момент инерции якоря электродвигателя совместно с входным колесом промежуточной зубчатой передачи;  $\varphi_1$  — угол поворота якоря;  $M_{тр1}$  — момент сухого трения в подшипниках и коллекторе электродвигателя;  $\text{sign}$  — функция знака.

Промежуточная зубчатая передача с учетом упругости, зазора и трения описывается системой уравнений:

$$\varphi_2 = \varphi_1 U_{21}; \quad (5)$$

$$\omega_2 = \omega_1 U_{21}; \quad (6)$$

$$M_1 = (M_{II} - M_{C2}) U_{21}; \quad (7)$$

$$M_2 = M_{2упр} + M_{2дис}; \quad (8)$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{M_{II} - M_{III}}{J_2}; \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3; \quad (10)$$

$$M_{C2} = -M_{тр2} \text{sign}(\omega_2); \quad (11)$$

$$M_{2дис} = -k_2(\omega_2 - \omega_3), \quad (12)$$

$$M_{2упр} = \begin{cases} 0 & \text{при } |\varphi_2 - \varphi_3| < \Delta_2 \\ c_2(\varphi_2 - \varphi_3 - \Delta_2) & \text{при } \varphi_2 - \varphi_3 > \Delta_2 \\ c_2(\varphi_2 - \varphi_3 + \Delta_2) & \text{при } \varphi_2 - \varphi_3 < -\Delta_2 \end{cases}, \quad (13)$$

где  $\varphi_2$  — угол поворота сечения II — II расчетной схемы;  $\omega_2$  — угловая скорость сечения II — II расчетной схемы;  $U_{21}$  — модуль передаточного отношения;  $M_{II}$  — момент в сечении II — II расчетной схемы;  $M_{C2}$  — момент трения в промежуточной зубчатой передаче, приведенный к ее выходному валу;  $M_{2упр}$  — упругая составляющая момента;  $M_{2дис}$  — составляющая момента, отражающая потери на трение в передаче;  $\omega_3$  — угловая скорость выходного вала промежуточной зубчатой передачи;  $M_{III}$  — момент в сечении III — III расчетной схемы;  $J_2$  — момент инерции выходного колеса передачи совместно с приведенным к выходному звену моментом инерции параллельных кривошипов;  $\varphi_3$  — угол поворота выходного вала промежуточной зубчатой передачи;  $M_{тр}$  — момент сухого трения передачи, приведенный к выходному валу;  $k_2$  — коэффициент вязкого трения, приведенный к выходному валу;  $2 \cdot \Delta_2$  — зазор в зацеплении, приведенный к выходному валу;  $c_2$  — жесткость кинематической цепи от входного зубчатого колеса до деформирующих колец генератора волн, приведенная к выходному валу.

Волновая передача с учетом нелинейной жесткости

$$\omega_4 = \omega_3 / U_{взп}; \quad (14)$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 / U_{взп}; \quad (15)$$

$$M_{III} = M_{IV} / U_{взп}; \quad (16)$$

$$\frac{d\omega_5}{dt} = \frac{M_{IV} - M_5}{J_3}; \quad (17)$$

$$\frac{d\varphi_5}{dt} = \omega_5; \quad (18)$$

$$M_{IV} = f_4(\varphi_4, \varphi_5, \omega_4, \omega_5), \quad (19)$$

где  $\varphi_4$  — угол поворота сечения IV — IV расчетной схемы;  $U_{вп} = U_{43}$  — модуль передаточного отношения волновой передачи;  $M_{IV}$  — момент в сечении IV — IV расчетной схемы;  $\omega_5$  — угловая скорость выходного вала волновой передачи;  $M_5 = M_H$  — момент сопротивления нагрузки, приведенный к выходному валу волновой передачи;  $\varphi_5$  — угол поворота выходного вала волновой передачи;  $f$  — нелинейная функция, учитывающая переменную жесткость и потери в волновой передаче, приведенные к ее выходному валу.

Уравнения, связывающие  $M_{IV}$  и  $\varphi_4 - \varphi_5$  имеют следующий вид:

$$M_O = a(\varphi_4 - \varphi_5) + b(\varphi_4 - \varphi_5)^3 + c(\varphi_4 - \varphi_5)^5; \quad (20)$$

$$M_3 = M_{30} + e|M_O|; \quad (21)$$

$$M_1 = M_O + M_3 \text{sign}(\omega_{45}); \quad (22)$$

$$M_{30} = h(\varphi_{45 \max} - \varphi_{45 \min}); \quad (23)$$

$$\frac{d\varphi_{45 \max}}{|d\varphi_{45}|} = l(\varphi_{45 \max} - \varphi_{45}); \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi_{45 \min}}{|d\varphi_{45}|} = l(\varphi_{45 \min} - \varphi_{45}); \quad (25)$$

$$\frac{dM_4}{|d\varphi_{45}|} = g(M_1 - M_4); \quad (26)$$

$$\varphi_{45 \max} \geq \varphi_{45}; \quad (27)$$

$$\varphi_{45 \min} \leq \varphi_{45}, \quad (28)$$

где  $a, b, c$  — коэффициенты полинома, аппроксимирующего среднюю линию зависимости ( $M_{IV}(\varphi_{45})$ );  $M_{30}$  — начальное значение момента трения;  $e$  — коэффициент, учитывающий влияние нагрузочного момента;  $h$  — коэффициент, учитывающий диапазон изменения нагрузочного момента в цикле деформации;  $g, l$  — коэффициенты восстановления формы петли гистерезиса.

Система уравнений (1)–(28), описывающая динамику привода с волновой зубчатой переда-

чей, преобразованная по Лапласу, приведена ниже:

$$sLJ_{я} = U_{д} - J_{я}r_{я} - c_1\omega_1; \quad (29)$$

$$sJ_1\omega_1 = c_1j_{я} - M_1 - M_{C1}; \quad (30)$$

$$s\varphi_1 = \omega_1; \quad (31)$$

$$M_{C1} = f_1(\omega_1); \quad (32)$$

$$M_I = (M_{II} - M_{C2})U_{21}; \quad (33)$$

$$M_2 = M_{2\text{упр}} - M_{2\text{дис}}; \quad (34)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 U_{21}; \quad (35)$$

$$\omega_2 = \omega_1 U_{21}; \quad (36)$$

$$sJ_2\omega_3 = M_{II} - M_{III}; \quad (37)$$

$$s\varphi_3 = \omega_3; \quad (38)$$

$$M_{C2} = f_2(\omega_2); \quad (39)$$

$$M_{2\text{дис}} = -k_2(\omega_2 - \omega_3); \quad (40)$$

$$M_{2\text{упр}} = f_3(\varphi_2 - \varphi_3); \quad (41)$$

$$\omega_4 = \omega_3 u_{43}; \quad (42)$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 u_{43}; \quad (43)$$

$$M_{III} = M_{IV} u_{43}; \quad (44)$$

$$sJ_3\omega_5 = M_4 - M_5; \quad (45)$$

$$s\varphi_5 = \omega_5; \quad (46)$$

$$M_{IV} = f_4(\varphi_4, \varphi_5, \omega_4, \omega_5), \quad (47)$$

где  $s$  — оператор Лапласа;  $f_1, f_2, f_3, f_4$  — нелинейные зависимости, отражающие наличие сухого трения, люфтов и переменной жесткости.

Структурная схема системы, описываемая уравнениями (29)–(47), приведена на рис. 2.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (1)–(28) может быть решена только численными методами с использованием ЭВМ. Моделирование структурной схемы (см. рис. 2) также возможно только с помощью ЭВМ. При этом некоторые важные параметры системы могут быть получены путем линеаризации системы (1)–(28).

При исследовании и проектировании следящего привода возникают две основные задачи, одна из которых связана с определением регуляторных (скоростных), моментных (силовых) и энергетических характеристик силовой части СП — усилителя мощности, исполни-

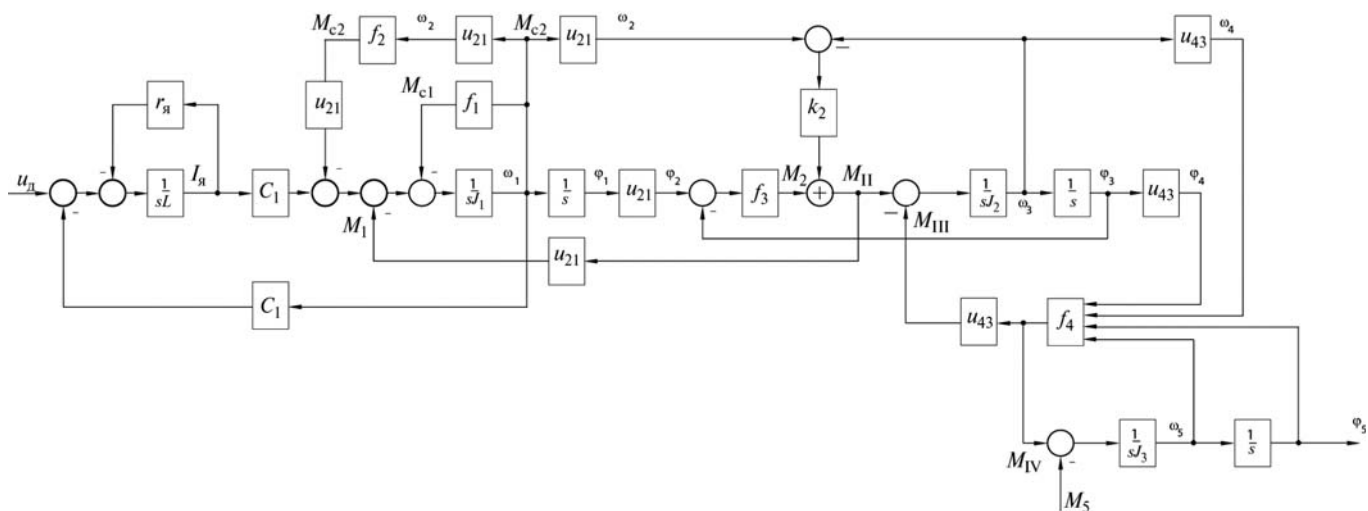


Рис. 2. Структурная схема электромеханического привода с волновой зубчатой передачей

тельного двигателя и механической передачи, а другая — с анализом и синтезом динамических характеристик СП. Этим вопросам будут посвящены следующие работы.

### Литература

1. Бор-Раменский А.Е., Гордеев Д.Е. Исследование электромеханического волнового модуля как элемента системы автоматического регулирования // Волновые зубчатые передачи. 1973. С. 26—27.
2. Крашенинников В.И. Экспериментальное исследование динамики зубчатого редуктора // Известия вузов. Машиностроение. 1973. № 1. С. 39—43.
3. Кулешов В.С., Лакота Н.А. Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971. 304 с.
4. Следящие приводы / Под ред. Б.К. Чемоданова. Т. 1: Теория и проектирование следящих приводов; Е.С. Блейз,

А.В. Зимин, Е.С. Иванов и др. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 904 с.

5. Динамика следящих приводов / Под ред. Л.В. Рабиновича. М.: Машиностроение, 1982. 496 с.

6. Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Исследование качественных показателей волновых зубчатых передач внешнего деформирования с гибким колесом — кольцом // Приводы и компоненты машин. 2011. № 4. С. 16—19.

7. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.

8. Марголин Ш.М. Дифференциальный электропривод. М.: Энергия, 1975. 253 с.

Статья поступила в редакцию 20.02.2012