УДК 539.4

Об устойчивости функционирования механических систем при случайных параметрических воздействиях

А.С. Гусев, С.О. Найденов

ГУСЕВ
Александр Сергеевич
доктор технических наук, профессор

НАЙДЕНОВ
Сергей Олегович
кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Найдены вероятностные характеристики случайных параметрических воздействий, при которых системы, описываемые стохастическим аналогом уравнения Матье — Хилла, становятся неустойчивыми.

Ключевые слова: вероятностные характеристики, параметрические воздействия, неустойчивый.

Probabilistic characteristics of the random parametric excitations when the systems described by a stochastic analogue of Matie - Hill's equation became unsteady were found.

Keywords: probabilistic characteristics, parametric excitations, unsteady.

В предлагаемой статье рассмотрены механические системы, функционирование которых описывается следующим стохастическим аналогом уравнения Матье — Хилла:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2\bigl(1+\varepsilon(t)\bigr)q = 0, \tag{1}$$

где q — обобщенная координата; n — коэффициент демпфирования; ω_0 — частота свободных колебаний; $\varepsilon(t)$ — случайный процесс со спектральной плотностью $S(\omega)$.

Задача состоит в определении вероятностных характеристик параметрического воздействия $\varepsilon(t)$, при которых данная система будет устойчива. За условие стохастической неустойчивости принимается стремление дисперсии процесса $q(t)$ к бесконечности [1, 2].

Эффективное решение поставленной задачи можно получить, если дополнить уравнение (1) статистически независимым от $\varepsilon(t)$ белым шумом $f(t)$ с малой интенсивностью k_f, которым в дальнейшем можно будет пренебречь. Получим уравнение

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2\bigl(1+\varepsilon(t)\bigr)q = f(t). \tag{2}$$

Процесс $\varepsilon(t)$ также вначале будем считать белым шумом с интенсивностью k_ε. Тогда уравнение (2) можно представить в следующем виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega_0^2 q = P(t). \tag{3}$$

Здесь $P(t)$ — белый шум с интенсивностью $k_p = k_f + \omega_0^2 s_q^2 k_\varepsilon$, где s_q^2 — дисперсия процесса $q(t)$ [2].

Из уравнения (3) следует равенство

$$S_q^2 = \frac{k_f + \omega_0^2 S_q^2 k_\varepsilon}{4n}.$$

Отсюда получаем

$$s_q^2 = \frac{k_f}{4n - \omega_0^2 k_\varepsilon}. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что при любом малом $k \neq 0$ система в среднеквадратическом устойчива при

$$k_\varepsilon < \frac{4n}{\omega_0^2}. \qquad (5)$$

Если параметрическое воздействие $\varepsilon(t)$ не является белым шумом, а имеет некоторую спектральную плотность $S_\varepsilon(\omega)$, то его (в соответствии с понятием о главном параметрическом резонансе) можно приближенно заменить на белый шум с интенсивностью $\mathrm{In}S_\varepsilon(2\omega_0)$ [1, 3]. В этом случае условие устойчивости (5) принимает следующий вид:

$$S_\varepsilon(2\omega_0) < \frac{2n}{\pi\omega_0^2}. \qquad (6)$$

Возможность практического использования приближенного соотношения (6) требует проверки его правильности. С этой целью зададимся некоторой спектральной плотностью $S_\varepsilon(\omega)$ процесса $\varepsilon(t)$, смоделируем этот процесс на ПК, подставим его в уравнение (1) и вычислим траекторию процесса $q(t)$ при некоторых начальных условиях и значениях параметров n и ω_0. Если процесс $q(t)$ будет непрерывно возрастать, то это будет указывать на неустойчивость системы. В устойчивой системе процесс будет затухать. При заданной спектральной плотности $S_\varepsilon(\omega)$ процесс $\varepsilon(t)$ можно смоделировать с помощью следующего соотношения:

$$\varepsilon(t) = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \cos\left(\omega_i t + \alpha_i\right), \qquad (7)$$

где $\omega_i = i\Delta\omega$, $\Delta\omega$, $\Delta\omega$ — шаг квантования $S_\varepsilon(\omega)$; α — равномерно величина в интервале $(0, 2\pi)$, $c_i^2 = S_\varepsilon\left(\omega_i\right)\Delta\omega$.

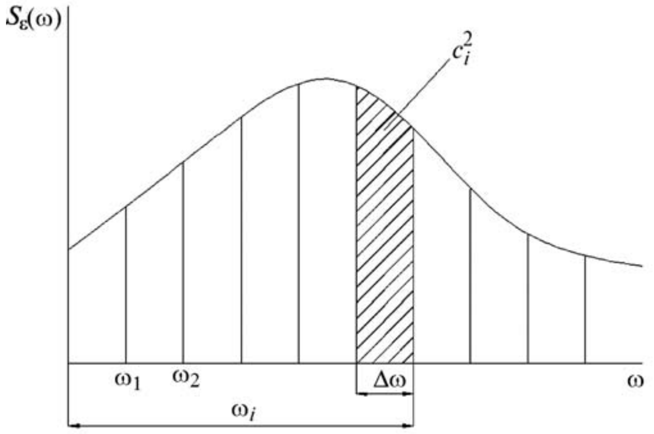

Рис. 1. Зависимость спектральной плоскости S_ε от ω

Зависимость спектральной плотности $S_\varepsilon(\omega)$ показана на рис. 1.

Справедливость формулы (7) следует из определения корреляционной функции и ее связи со спектральной плотностью:

$$K_\varepsilon(\tau) = \langle \varepsilon_0 \varepsilon_r \rangle =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_i c_k \left\langle \cos\alpha_i \cos\left(\omega_k t + \alpha_k\right)\right\rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cos\omega_i t = \sum_{i=1}^{n} S_\varepsilon\left(\omega_i\right)\cos\left(\omega_i \tau\right)\Delta\omega.$$

При $n \to \infty$ имеем

$$K_\Sigma(i)\int_0^{+\infty} S(\omega_i)\cos(\omega t)d\omega.$$

Проверка применимости соотношения (6) выполнена для механической системы с параметрами: ω_0 = 4 рад/с, n = 0,4 рад/с, которая подвергается параметрическому воздействию со спектральной плотностью

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega - 20)^2 + 1}},$$

изображенной на рис. 2.

По формуле (7) моделировался случайный процесс, затем по решению дифференциального уравнения Рунге — Кутта построена траектория процесса. Пример смоделированного случайного процесса $\varepsilon(t)$ показан на рис. 3, а соответствующие ему устойчивые и неустойчивые траектории процесса $q(t)$ — на рис. 4 и 5.

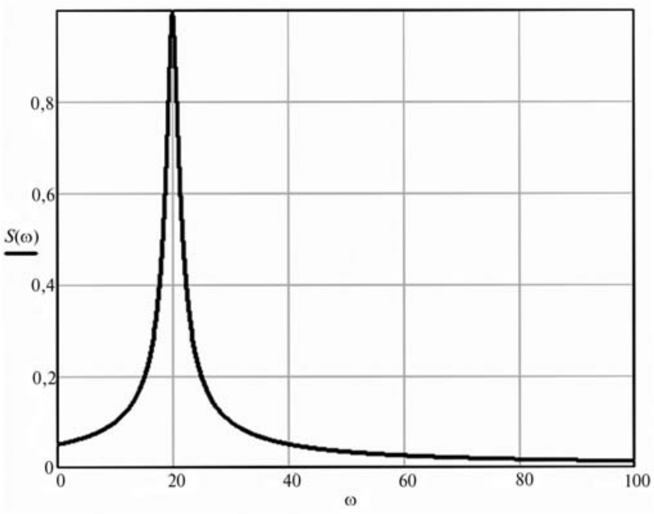

Рис. 2. Зависимость спектральной плотности S от ω

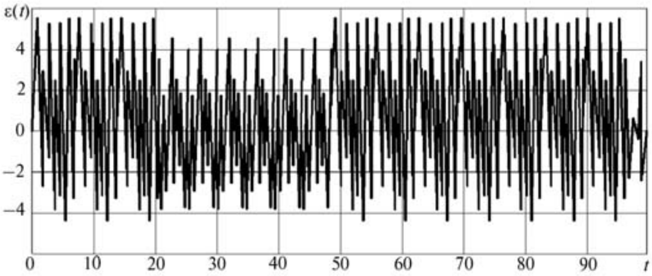

Рис. 3. Пример смоделированного случайного процесса

Из полученных результатов следует, что приближенное соотношение (6) может быть использовано в практических оценках стохастической устойчивости систем.

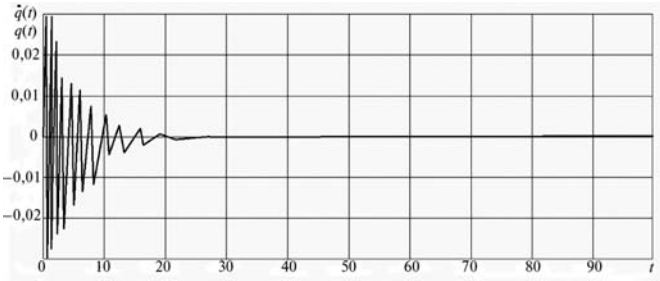

Рис. 4. Соответствующая смоделированному процессу $q(t)$ устойчивая траектория

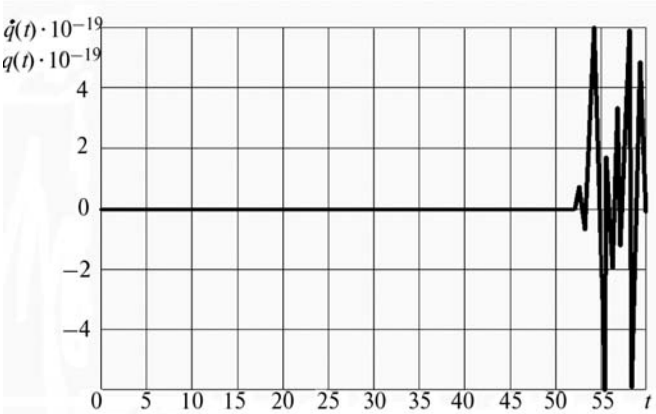

Рис. 5. Соответствующая смоделированному процессу $q(t)$ неустойчивая траектория

Выводы

1. Получены условия, при которых система в среднеквадратическом устойчива.
2. Проведена проверка возможности практического использования полученного приближенного соотношения (6).
3. Приведенные примеры численного моделирования случайного процесса в механической системе и приведены соответствующие этому процессу устойчивые и неустойчивые траектории процесса $q(t)$.

Литература

1. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.

2. *Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 223 с.

3. *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.

Статья поступила в редакцию 23.01.2012