



СОРОКИН
Федор Дмитриевич
профессор, доктор
технических наук



ЧАН КИ АН
аспирант
кафедры «Прикладная
механика»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Расчет сетчатой оболочки шинной геометрии с несимметричной укладкой нитей в случае нерастяжимых нитей корда

Ф.Д. Сорокин, Чан Ки Ан

Описана методика расчета перемещений и мембранных усилий для безмоментных сетчатых оболочек вращения с несимметрично уложенными нитями. Предложены соотношения, характеризующие шинную геометрию при несимметричной укладке нитей. Методом пристрелки решена нелинейная краевая задача для системы четырех дифференциальных уравнений сетчатой оболочки. Приведены примеры построения равновесных профилей и определения мембранных усилий для рассмотренного класса сетчатых оболочек при различных сочетаниях внешних нагрузок.

Ключевые слова: безмоментная сетчатая оболочка, шинная геометрия, несимметричная укладка нитей.

The article presents an approach to calculate the displacement and tension force of non-moment lattice shells obtained from asymmetrical arrangement of two systems of left and right wires. The characteristic relationship of tire geometry in case of asymmetrical winding is proposed. The system of four nonlinear differential equations of lattice shells has been solved using the numerical shooting method. As illustrative examples, we apply the approach to calculate the equilibrium profile and tension force of lattice shells with different values of parameters.

Keywords: non-moment lattice shells, tire geometry, asymmetrical arrangement.

Безмоментная сетчатая оболочка с шинной геометрией нитей — расчетная схема, разработанная В.Л. Бидерманом и Б.Л. Бухиным [1, 2] для исследования резинокордных оболочек. Резинокордные оболочки, выполненные методом вулканизации, широко распространены в различных отраслях машиностроения. Достаточно отметить их применение в качестве автомобильных шин, пневматических амортизаторов, оплеток рукавов и других изделий. Резинокордные оболочки обычно собирают на цилиндрическом барабане, что и определяет их специфическую «шинную» геометрию, которая при симметричной укладке нитей задается следующим соотношением [1, 2]:

$$\frac{\sin \beta}{r} = \chi, \quad (1)$$

где β — угол наклона нити к меридиану; r — радиус; χ — константа.

Профиль оболочки после вулканизации может значительно отличаться от цилиндра (например, профиль диагональной шины) однако вследствие соотношения (1) оболочка как бы «помнит», что при сборке она была цилиндрической. Таким образом, расчет безмоментной сетчатой оболочки шинной геометрии произвольного профиля всегда можно свести к расчету цилиндрической сетчатой оболочки.

Существует малоизученный класс сетчатых оболочек вращения, в которых углы укладки нитей правого и левого семейств не совпадают. Это может быть вызвано различными причинами:

- специальная укладка нитей под разными углами;
- погрешность изготовления;
- изменение углов вследствие приложения осевого крутящего момента.

В данной статье исследуются сетчатые оболочки шинной геометрии с несимметрично уложенными нитями. Под шинной геометрией здесь подразумевается технология изготовления, т. е. то, что оболочка была собрана на цилиндрическом барабане. Очевидно, что соотношение (1) в случае несимметричной укладки становится несправедливым.

Стенка сетчатой оболочки вращения образована сетью из двух несимметрично располо-

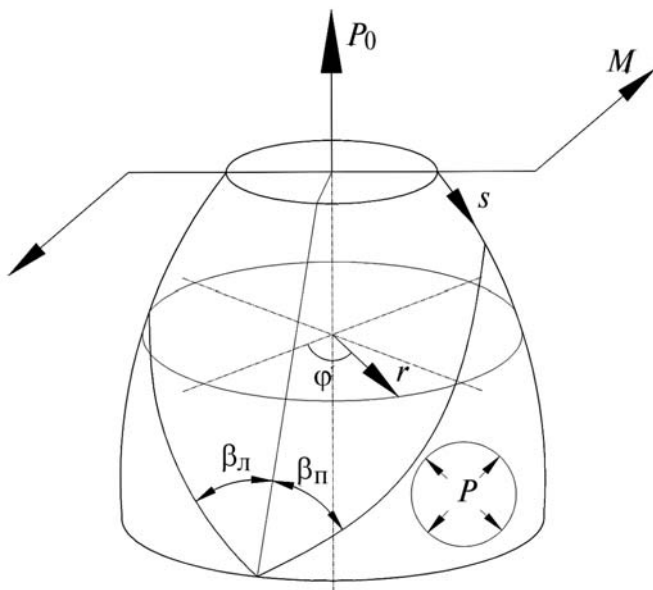


Рис. 1. Схема нагружения резинокордной оболочки, координаты и расположение нитей на срединной поверхности

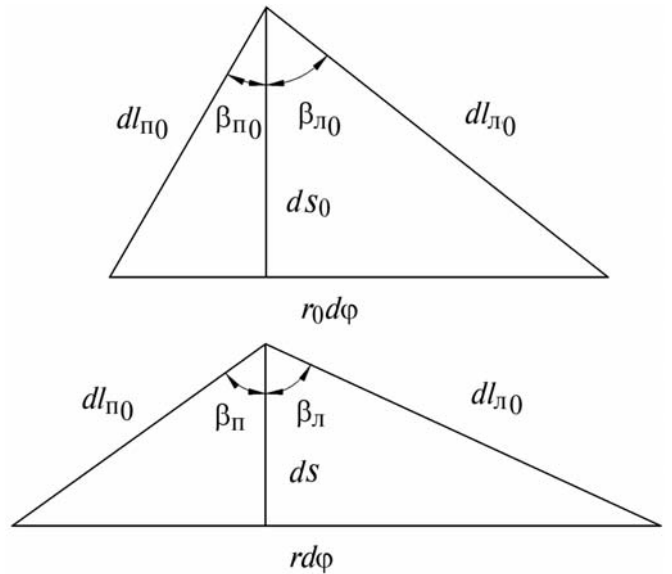


Рис. 2. Треугольный элемент до и после деформации (индексом «0» помечены величины в недеформированном состоянии)

женных систем нитей (рис. 1). На срединной поверхности оболочки задана обычная система гауссовых координат s, φ — дуга меридиана актуального состояния и полярный угол.

Исследуем геометрию деформирования сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей, при которой срединная поверхность оболочки остается поверхностью вращения. Для этого рассмотрим бесконечно малый треугольный элемент оболочки, образованный нитями и дугой окружности поперечного сечения (рис. 2).

Из рисунка 2 следуют соотношения, связывающие высоту и основание треугольника с длинами нитей и углами укладки нитей:

$$\begin{aligned} ds_0 &= dl_{n0} \cos \beta_{n0} = dl_{l0} \cos \beta_{l0}; \\ r_0 d\varphi &= dl_{n0} \sin \beta_{n0} + dl_{l0} \sin \beta_{l0}; \\ ds &= dl_{n0} \cos \beta_n = dl_{l0} \cos \beta_l; \\ r d\varphi &= dl_{n0} \sin \beta_n + dl_{l0} \sin \beta_l. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно соотношениям (2) углы β_n, β_l связаны друг с другом и с радиусом r :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \beta_n}{\cos \beta_l} &= \alpha; \\ \frac{\sin \beta_n + \alpha \sin \beta_l}{r} &= 2\chi, \end{aligned} \quad (3)$$

где α и χ — константы для оболочки в целом.

Левые части уравнений (3) являются константами, поскольку величины $\beta_{п0}$, $\beta_{л0}$, r_0 могут быть отнесены к любому промежуточному состоянию оболочки, в том числе и к ее положению при сборке на цилиндрическом барабане, т. е. могут рассматриваться как постоянные, а при деформировании длины нитей и угол $d\varphi$ (не меняются).

Очевидно, что при симметричной укладке $\alpha = 1$ и соотношения (3) преобразуются в (1). Таким образом, соотношения (3) можно рассматривать как *определение шинной геометрии* в случае несимметричной укладки нитей. Множитель «2» используется в соотношении (3) для сохранения смысла константы χ при переходе к симметричной укладке, т. е. для преемственности с соотношением (1).

Напряженно-деформированное состояние сетчатой оболочки описывается известными уравнениями равновесия безмоментной оболочки, записанными для актуального состояния, и известными геометрическими соотношениями [1]:

$$\begin{cases} \frac{d(T_1 r)}{r ds} - \frac{T_2}{r} \cos\theta = 0; \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p; \\ \frac{dr}{ds} = \cos\theta; \\ \frac{dz}{ds} = \sin\theta, \end{cases} \quad (4)$$

где T_1 , T_2 — мембранные силы в меридиональном и окружном направлениях; z — осевая координата; R_1 , R_2 — главные радиусы кривизны; θ — угол наклона нормали к оси.

Поскольку длина дуги деформированного состояния s неизвестна, то в уравнении (4) выполнялась замена независимой переменной

$$ds = A ds_0. \quad (5)$$

Здесь A — параметр Ламе; s_0 — дуга меридиана в недеформированном состоянии.

Кроме того, в формулах (4) главные кривизны были представлены их выражениями из работы [1]:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin\theta}{r}. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) система (4) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d(T_1 r)}{ds_0} = AT_2 \cos\theta; \\ \frac{d\theta}{ds_0} = \frac{A}{T_1} \left(p - \frac{\sin\theta}{r} T_2 \right); \\ \frac{dr}{ds_0} = A \cos\theta; \\ \frac{dz}{ds_0} = A \sin\theta, \end{cases} \quad (7)$$

где параметр A (совместно с $\beta_{п}$, $\beta_{л}$) должен быть найден из нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\cos\beta_{п}}{\cos\beta_{п0}} = A; \\ \frac{\cos\beta_{л}}{\cos\beta_{л0}} = A; \\ \frac{r}{r_0} = \frac{1}{A} \frac{\sin(\beta_{п} + \beta_{л})}{\sin(\beta_{п0} + \beta_{л0})}. \end{cases} \quad (8)$$

Каждое из уравнений системы (8) несложно выводится из уравнений (2). Кроме того, последнее уравнение (8) становится практически очевидным при сопоставлении площадей исходного и деформированного треугольников, представленных на рис. 2.

Покажем, что параметры $\beta_{п}$, $\beta_{л}$ и A могут быть явно выражены через r с помощью тригонометрических тождеств. Из (2) и (3) следует

$$\begin{cases} \cos\beta_{п} - \alpha \cos\beta_{л} = 0; \\ \sin\beta_{п} + \alpha \sin\beta_{л} = 2\chi r. \end{cases} \quad (9)$$

Возводя в квадрат и суммируя уравнения (9) друг с другом получим

$$\cos(\beta_{п} + \beta_{л}) = \frac{1}{2\alpha} (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r^2). \quad (10)$$

Аналогичное выражение можно записать и для величин с индексом «0». Выразим $\sin(\beta_{п} + \beta_{л})$ в (8) через $\cos(\beta_{п} + \beta_{л})$ из (10) и получим явные выражения A , $\beta_{п}$, $\beta_{л}$ через r :

$$A = \frac{r_0 \sqrt{4\alpha^2 - (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r^2)^2}}{r \sqrt{4\alpha^2 - (1 + \alpha^2 - 4\chi^2 r_0^2)^2}};$$

$$\beta_{II} = \arccos(A \cos \beta_{II0}); \quad (11)$$

$$\beta_{I} = \arccos(A \cos \beta_{I0}).$$

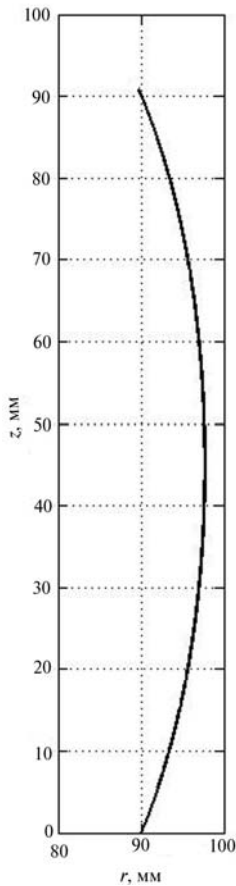


Рис. 3. Форма меридиана деформированной оболочки при $M = 100$ Н·м, $P_0 = 0$

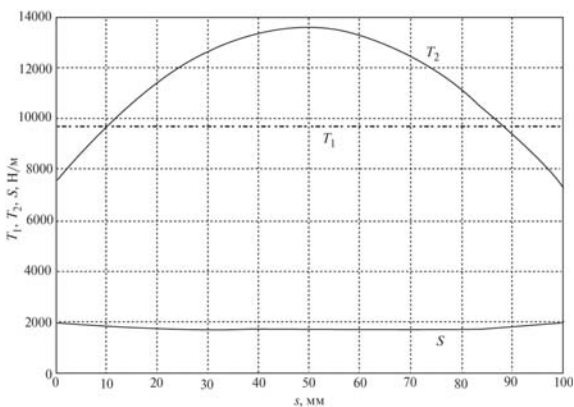


Рис. 4. Мембранные силы T_1 , T_2 , S при $M = 100$ Н·м, $P_0 = 0$:

— — — T_1 ; — — T_2 ; — — S

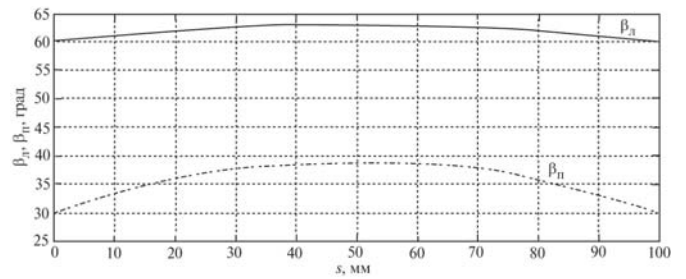


Рис. 5. Углы наклона нитей к меридиану при $M = 100$ Н·м, $P_0 = 0$:

— — — β_{II} ; — — β_I

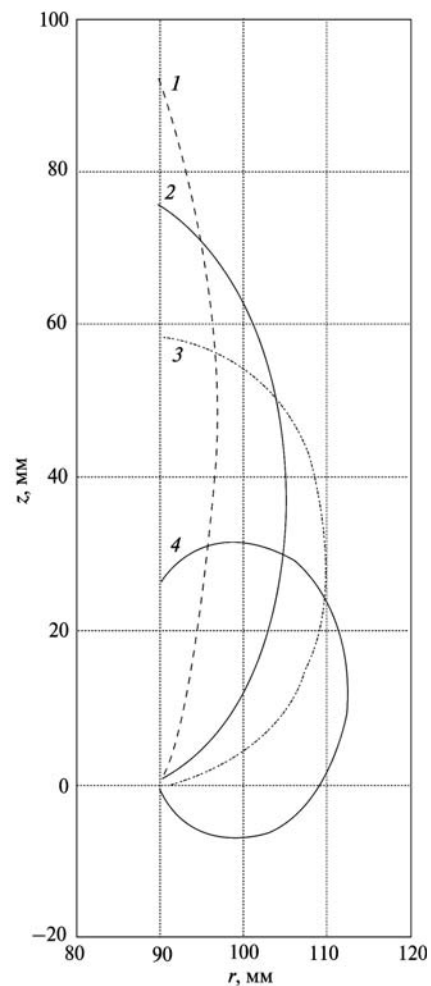


Рис. 6. Форма меридиана деформированной оболочки при $M = 0$ и различных значениях безразмерной осевой силы $k = \{0, -0.7, -1.0, -1.2117\}$ (в порядке возрастания номера графика)

Отметим, что при выводе уравнений (11) не предполагалось, что параметры r_0 , β_{II0} , β_{I0} постоянны, т. е. выражения (11) пригодны для произвольной начальной формы сетчатой оболочки шинной геометрии, не обязательно цилиндрической.

Как показано в работе [3] усилия в стенке оболочки T_1, T_2, S связаны между собой соотношением

$$T_2 = S(\operatorname{tg}\beta_n - \operatorname{tg}\beta_n) + T_1 \operatorname{tg}\beta_n \operatorname{tg}\beta_n, \quad (12)$$

где сдвигающая сила S может быть выражена через крутящий момент M следующей формулой:

$$S = \frac{M}{2\pi r^2}. \quad (13)$$

Уравнения (7), (11)—(13) представляют собой замкнутую систему нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений, пригодную для численного интегрирования.

Ниже приводится пример расчета напряженно-деформированного состояния сетчатой оболочки шинной геометрии со следующими параметрами:

- радиус цилиндрического барабана $r_0 = 90$ мм;
- исходная длина меридиана $l = 100$ мм;
- углы укладки нитей на барабане $\beta_{n0} = \frac{\pi}{6}, \beta_{n0} = \frac{\pi}{3}$;
- внутреннее давление $p = 0,2$ МПа;
- $\alpha = \sqrt{3}, \chi = \frac{1}{r_0}$ (следует из (3)).

Края оболочки $s_0 = 0$ и $s_0 = l$ соединяются с жесткими торцами радиуса r_0 . Кроме внутреннего давления оболочка нагружалась также крутящим моментом M или осевой силой P_0 (см. рис. 1). Осевая сила задавалась в долях равнодействующей сил давления на торцы:

$$P_0 = k p \pi r_0^2. \quad (14)$$

Нелинейная краевая задача для системы уравнений (7), (11)—(13) решалась методом пристрелки. На опорном торце оболочки задавались все четыре граничных условия, необходимые для решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} T_1(0) &= \frac{(k+1)p\pi r_0^2}{2\pi r_0 \sin\theta_0}; \\ \theta(0) &= \theta_0; \\ r(0) &= r_0; \\ z(0) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Единственным неизвестным параметром в условиях (15) является начальный угол наклона нормали θ_0 , который определялся подбором (метод пристрелки в сочетании с приемом

половинного деления) из граничного условия на другом торце оболочки

$$r(l) = r_0. \quad (16)$$

Численное интегрирование уравнений (7), (11)—(13) с начальными условиями (15) выполнялось методом Рунге — Кутты четвертого порядка (встроенная процедура компьютерного пакета MATLAB).

Равновесный профиль и эпюры мембранных усилий, а также распределение углов нитей вдоль меридиана для сетчатой оболочки, нагруженной давлением p и крутящим моментом M , изображены на рис. 3—5. На рисунке 6 представлены равновесные профили сетчатой оболочки, нагруженной давлением p и осевой силой P_0 .

При построении одного из графиков ($k = -1.0$) на рис. 6 начальное условие для угла наклона нормали известно $\theta_0 = 0$, поэтому вместо θ_0 варьировалось начальное условие для $T_1(0)$. Значение $k = -1.2117$ соответствует углу наклона нормали $\theta_0 = -\pi/2$ на опорном торце $s = 0$.

Выводы

1. Получены соотношения, обобщающие закон шинной геометрии для несимметричной укладки нитей.
2. Разработана методика расчета и построения равновесных профилей сетчатых оболочек шинной геометрии с несимметричной укладкой нитей.
3. Представлены примеры численного решения нелинейной краевой задачи для полученной системы дифференциальных уравнений методом пристрелки. Напряженно-деформированное состояние сетчатой оболочки исследовано при различных сочетаниях внешних нагрузок.

Литература

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
2. Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1966. № 1. С. 81—89.
3. Чан Ки Ан. Равновесная конфигурация сетчатой оболочки с несимметричной укладкой нитей по геодезическим линиям // Изв. вузов. Машиностроение. 2011. № 12. С. 1—10.

Статья поступила в редакцию 28.12.2011