

УДК 534.26:620.179.16

3D-рассеяние упругих волн на острие трещины в сварном шве

Л.Ю. Могильнер¹, Н.В. Крысько²¹ ООО «НИИ Транснефть»² МГТУ им. Н.Э. Баумана

Elastic wave 3D scattering on a crack edge in the weld joint

L.Yu. Mogilner¹, N.V. Krysko²¹ Transneft SRI LLC² Bauman Moscow State Technical University

Для расчета рассеяния ультразвуковых волн, падающих под острым углом на ребро трещины в сварных швах, металлах и пластмассах, обобщено ранее полученное решение трехмерной задачи рассеяния объемных упругих волн на полуплоскости со свободными от напряжений поверхностями. Предложено представление векторного потенциала смещения в поперечной волне, которое позволило свести 3D-задачу к трем независимым уравнениям Винера — Хопфа. Каждое из этих уравнений решено по аналогии с известными решениями для 2D-задачи о рассеянии волн, падающих на полуплоскость перпендикулярно ее ребру. Потенциалы и смещения в рассеянных волнах записаны в квадратурах. Верификация результатов расчета проведена путем сравнения с экспериментальными данными, полученными при рассеянии продольной волны на ребре полуплоскости в условиях, аналогичных имеющим место при ультразвуковой дефектоскопии сварных швов. Полученные результаты актуальны для совершенствования выявления и измерения координат трещин различной ориентации методами ультразвуковой дефектоскопии.

EDN: EUNZDH, <https://elibrary/eunzdh>

Ключевые слова: упругие волны, ребро трещины, 3D-рассеяние продольной волны, ультразвуковая дефектоскопия

The paper generalizes the previously obtained solution to the three-dimensional problem of the volumetric elastic waves scattering on half-planes with the stress-free surfaces to calculate the ultrasonic waves scattering at the acute angle on the crack edge in welds, metals and plastics. It proposes a representation of the vector displacement potential in the transverse making it possible to reduce the 3D problem to three Wiener-Hopf independent equations. Each of these equations was solved by analogy with the known solutions for the 2D problem of the scattering waves incident on a half-plane perpendicular to its edge. Scattering waves' potential and displacement were registered in the quadratures. Calculation results were verified by comparison with the experimental data obtained by scattering the longitudinal wave on the half-plane edge under conditions similar to those occurring during the weld ultrasonic flaw detection. The results obtained are relevant in improving identification and measurement of the crack coordinates with variable orientation using the ultrasonic flaw detection methods.

EDN: EUNZDH, <https://elibrary/eunzdh>

Keywords: elastic waves, crack edge, longitudinal wave 3D scattering, ultrasonic flaw detection

Задачу о рассеянии ультразвуковых волн (далее волны) на ребре трещины в условиях, актуальных для дефектоскопии сварных швов, изделий из металлов и пластмасс, можно формализовать, рассматривая рассеяние плоских упругих волн на ребре полубесконечной трещины в объеме материала при произвольном угле падения исходной волны на это ребро (рис. 1) [1, 2].

По результатам выявления трещины необходимо определить координаты ее вершины с точностью, требуемой для расчета прочности и долговечности конструкций разного назначения [1, 3]. Условно принимая поверхность трещины плоской, полагаем, что она чаще всего перпендикулярна поверхности изделия и может быть повернута относительно оси сварного шва на различные углы. Например, на рис. 1, а трещина 3 ориентирована преимущественно вдоль оси сварного шва (продольная трещина), а трещина 6 — поперек этой оси (поперечная трещина).

Для ультразвукового контроля (УЗК) при перемещении источника и приемника ультра-

звука в направлении 2 используют продольные волны, рассеивающиеся на ребре трещины (например, в дифракционно-временном методе (Time-of-Flight Diffraction — TOFD) источник расположен в положении 4, приемник — в положении 1) [4, 5], и поперечные волны, отраженные от трещины и/или донной поверхности изделия (в эхо-методе: источник находится в положении 4, приемник — в положении 4 или 5) [1, 6].

Будем считать, что поперечная волна линейно поляризована в плоскости, перпендикулярной поверхности изделия, и при изменении ориентации источника может иметь компоненты, поляризованные как в плоскости расположения трещины, так и перпендикулярно к ней. Наибольший интерес представляет повышение выявляемости поперечной трещины, так как до сих пор не разработаны надежные методы поиска и измерения координат таких дефектов в сварных швах с валиками усиления 7.

Начиная с работ А. Зоммерфельда в конце XIX века, рассеянию волн разного типа на реб-

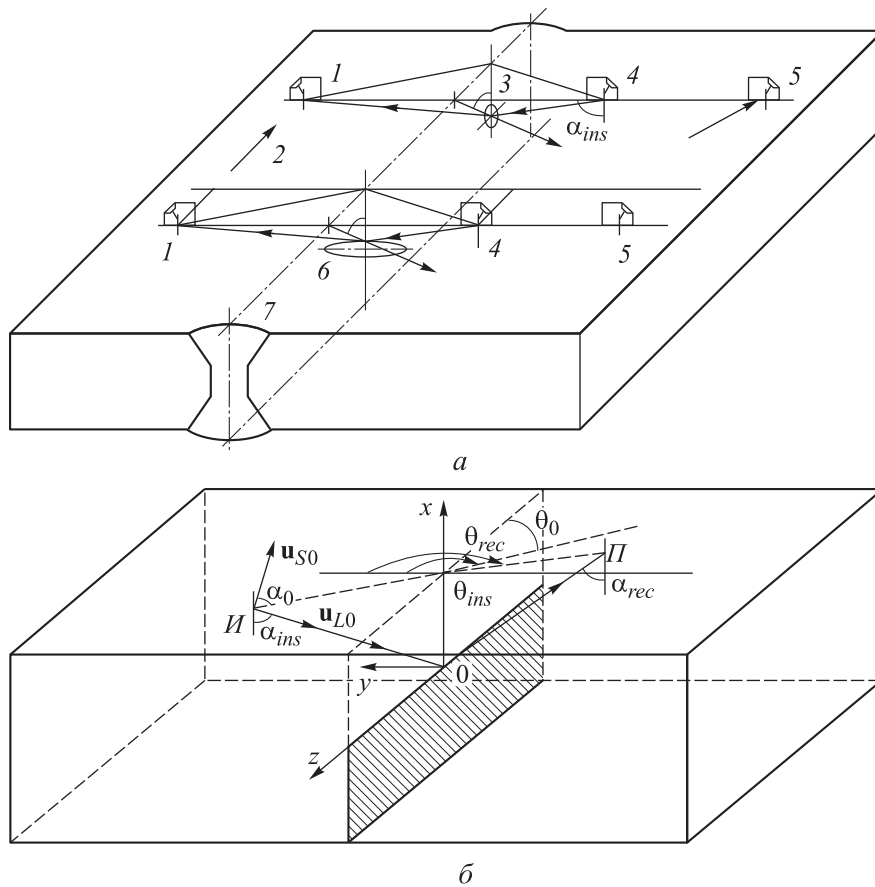


Рис. 1. Схемы прозвучивания сварного шва с трещинами: а — сканирование сварного шва; б — моделирование озвучивания острия полубесконечной трещины

ре посвящено много публикаций, в частности [7–10]. Авторы чаще всего рассматривают 2D-задачу, когда исходная волна падает на полуплоскость перпендикулярно ее ребру.

Также известны работы, например [11–13], касающиеся наклонного падения упругой волны на ребро полуплоскости, т. е. 3D-задачи. Однако ранее опубликованные результаты не доведены до формул, удобных для инженерных расчетов сигналов, рассеянных в условиях 3D-задачи, как показано на рис. 1. Между тем в статье [2] отмечено, что эта задача по-прежнему является актуальной для дефектоскопии, и ее общее решение можно записать в квадратурах.

Цель работы — обобщить и детализировать результат, полученный в статье [2], и представить формулы для инженерных расчетов параметров волн, расходящихся от ребра.

Постановка 3D-задачи о рассеянии упругих волн на полуплоскости. При УЗК угол ввода α_{ins} и углы, задающие ориентацию источника θ_{ins} и приемника θ_{rec} на поверхности изделия (рис. 1, б), обычно находятся в следующих диапазонах:

$$0 \leq \alpha_{ins} < \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta_{ins}; \quad \theta_{rec} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Как и в работе [2], будем считать, что в точке I в однородную изотропную упругую среду с коэффициентами Ламе λ и μ через поверхность с нормалью $\mathbf{n}_0 = (0, \cos \theta_0, -\sin \theta_0)$ введена плоская волна: продольная под углом $\alpha_{ins} = \alpha_{0f}$ с векторами смещения $\mathbf{u}_{L0} \neq 0$ и $\mathbf{u}_{S0} = 0$ (см. рис. 1, б) или линейно поляризованная поперечная под углом $\alpha_{ins} = \alpha_0$ с векторами смещения $\mathbf{u}_{S0} \neq 0$ и $\mathbf{u}_{L0} = 0$.

Если k_L и k_S — соответствующие волновые числа, то $k_L^2(\lambda + 2\mu) = k_S^2\mu$. Направления волновых векторов и смещений в исходных волнах с учетом диапазонов (1) заданы коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{0f} &= -\cos \alpha_{0f}; \quad b_{0f} = -\sin \alpha_{0f} \sin \theta_0; \\ c_{0f} &= -\sin \alpha_{0f} \cos \theta_0; \quad a_0 = -\cos \alpha_0; \\ b_0 &= -\sin \alpha_0 \sin \theta_0; \quad c_0 = -\sin \alpha_0 \cos \theta_0; \\ s_{0x} &= \sin \alpha_0; \quad s_{0y} = -\cos \alpha_0 \sin \theta_0; \\ s_{0z} &= -\cos \alpha_0 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Вдали от острия трещины (ребра полуплоскости) необходимо записать продольную и поперечную рассеянные волны в явном виде при следующих условиях:

- трещина смоделирована полуплоскостью $x < 0, y = \pm 0$;

- поверхности трещины не взаимодействуют друг с другом нигде, кроме ребра $x = y = 0$, напряжения на них равны нулю:

$$\sigma_{yjd}(x, \pm 0) + \sigma_{yj0}(x, \pm 0) = 0; \quad (3)$$

- зависимости векторов смещения \mathbf{u}_{L0} и \mathbf{u}_{S0} от времени t и координаты z имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{L0} &= \mathbf{u}_{L01}(x, y) \exp(ik_L c_{0f} z - i\omega t); \\ \mathbf{u}_{S0} &= \mathbf{u}_{S01}(x, y) \exp(ik_S c_0 z - i\omega t); \end{aligned} \quad (4)$$

- смещения в рассеянных волнах \mathbf{u}_{Ld} , \mathbf{u}_{Sd} и общие смещения $\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_{L0} + \mathbf{u}_{Ld}$, $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_{S0} + \mathbf{u}_{Sd}$ соответствуют уравнениям Гельмгольца;

- рассеянные волны \mathbf{u}_{Ld} и \mathbf{u}_{Sd} удовлетворяют:

- при $|r| \rightarrow \infty$ условию излучения Зоммерфельда на бесконечности;

- при $|r| \rightarrow 0$ условию на ребре полуплоскости $u_d = O(r^\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ [13, 14], $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_{Ld} + \mathbf{u}_{Sd}$. Здесь индекс « d » соответствует рассеянной волне, индекс « 0 » — исходной волне, индекс « l » — величинам, не зависящим от координаты z ; i — мнимая единица; $\omega = 2\pi/f$ (f — частота); $j = x, y, z$; r — расстояние от точки наблюдения до ребра в цилиндрической системе координат с осью z .

С учетом выражения (4), т. е. симметрии задачи по z , запишем

$$k_L c_{0f} = k_S c_0,$$

а смещения в рассеянных полях будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{jLd} &= u_{jL1}(x, y) \exp(ik_S c_0 z); \\ u_{jSd} &= u_{jS1}(x, y) \exp(ik_S c_0 z). \end{aligned} \quad (5)$$

Соответственно, получаем следующие уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_{jL1} + k_L^2 \left(1 - \frac{k_S^2}{k_L^2} c_0^2 \right) u_{jL1} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_{jS1} + k_S^2 (1 - c_0^2) u_{jS1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее будем использовать преобразование Фурье

$$U(\zeta, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\zeta x} dx.$$

Тогда для фурье-образов сомножителей с нижним индексом « l » из выражений (6) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} U_{jL1}(\zeta, y) - \gamma_L^2 U_{jL1}(\zeta, y) &= 0; \\ \frac{d^2}{dy^2} U_{jS1}(\zeta, y) - \gamma_S^2 U_{jS1}(\zeta, y) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_L &= [\zeta^2 - (k_L^2 - k_S^2 c_0^2)]^{1/2}; \\ \gamma_S &= [\zeta^2 - k_S^2 (1 - c_0^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для использования в методе Винера — Хопфа переменную ζ , как и в работе [15], будем считать комплексной величиной. В статье [2] отмечено, что $(1 - c_0^2) > 0$ при условии (1) для любых углов α_{ins} и θ_{ins} . Однако возможно, что $(k_L^2 - k_S^2 c_0^2) \leq 0$. В этом случае требуется дополнительный анализ, связанный с возможностью формирования неоднородных волн, распространяющихся вдоль ребра.

Введем потенциалы смещений f и ψ :

$$\mathbf{u}_L(x, y, z) = \text{grad } f; \quad \mathbf{u}_S(x, y, z) = \text{rot } \psi, \quad (9)$$

где $\text{div } \psi = 0$.

Традиционно потенциал смещений ψ представляют как сумму двух слагаемых, от вида которых зависит описание рассеянных полей. Предложенный в статье [2] вариант такого представления дал возможность записать в квадратурах потенциалы в рассеянных полях для 3D-задачи.

Обобщим эти результаты и представим потенциал ψ как сумму трех однотипных слагаемых

$$\psi = \sum_j \psi^{(j)},$$

которые в координатах x, y, z будем искать в виде

$$\psi^{(j)} = \text{rot}(\chi^{(j)} \mathbf{e}^{(j)}),$$

где $\chi^{(j)}$ — три неизвестные скалярные функции; $\mathbf{e}^{(j)}$ — орты осей; по j не суммируем.

Согласно данным работы [13], это допустимо, так как $\text{div } \psi^{(j)} = 0$. В дальнейшем количество независимых неизвестных будет уменьшено. Аналогично выражению (5) запишем

$$\begin{aligned} f_d(x, y, z) &= f_{d1}(x, y) \exp(ik_S c_0 z); \\ \chi_d^{(j)}(x, y, z) &= \chi_{d1}^{(j)}(x, y) \exp(ik_S c_0 z). \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через $F_d(\zeta, y)$ и $X_d^{(j)}(\zeta, y)$ фурье-образы функций $f_{d1}(x, y)$ и $\chi_{d1}^{(j)}(x, y)$. Параметры f и $\chi^{(j)}$ удовлетворяют уравнениям Гельм-

гольца, а значит, $F_d(\zeta, y)$ и $X_d^{(j)}(\zeta, y)$ — уравнениям вида (7). Из выражения (9) получаем

$$\begin{aligned} U_{xd} &= -i\zeta F_d + (k_S^2 - \zeta^2) X_d^{(x)} + k_S c_0 \zeta X_d^{(z)} - \\ &\quad - i\zeta \frac{\partial}{\partial y} X_d^{(y)}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} U_{yd} &= \frac{\partial}{\partial y} F_d - i \frac{\partial}{\partial y} [\zeta X_d^{(x)} - k_S c_0 X_d^{(z)}] + \\ &\quad + (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) X_d^{(y)}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U_{zd} &= ik_S c_0 F_d + k_S c_0 \zeta X_d^{(x)} + (k_S^2 - k_S^2 c_0^2) X_d^{(z)} + \\ &\quad + ik_S c_0 \frac{\partial}{\partial y} X_d^{(y)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь для сокращения записи опущены аргументы (ζ, y) функций U_{jd} , F_d и $X_d^{(j)}$.

Выразив компоненты тензора напряжений σ_{yy} через смещения \mathbf{u}_L и \mathbf{u}_S , а затем через потенциалы f и $\chi^{(j)}$, аналогично формулам (5) и (10), выделим в них сомножители σ_{yjd1} с нижним индексом «1», не зависящие от координаты z . Для фурье-образов этих сомножителей $\Sigma_{jd}(\zeta, y)$ запишем

$$\begin{aligned} \Sigma_{yd} &= \left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] F_d - \\ &\quad - i\gamma_S^2 [\zeta X_d^{(x)} - k_S c_0 X_d^{(z)}] - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \frac{\partial}{\partial y} X_d^{(y)}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{xd} &= -i\zeta \frac{\partial}{\partial y} F_d + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{2} k_S^2 - \zeta^2 \right) X_d^{(x)} + k_S c_0 \zeta X_d^{(z)} \right] + \\ &\quad + i\zeta \left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] X_d^{(y)}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{zd} &= ik_S c_0 \frac{\partial}{\partial y} F_d + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\zeta k_S c_0 X_d^{(x)} + \left(\frac{1}{2} k_S^2 - k_S^2 c_0^2 \right) X_d^{(z)} \right] - \\ &\quad - ik_S c_0 \left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] X_d^{(y)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как при УЗК используют импульсное излучение, вдали от трещины продольную и поперечную волны будем рассматривать независимо друг от друга, и из условия $|r| \rightarrow \infty$ для каждой из них в любом направлении получаем

$$\begin{aligned} |u_{jLd}| &\rightarrow 0; \quad |u_{jSd}| \rightarrow 0; \\ |\sigma_{yLd}| &\rightarrow 0; \quad |\sigma_{ySd}| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая, что функции F_d и $X_d^{(j)}$ удовлетворяют уравнениям вида (7), аналогично [15] будем искать их в следующем виде:

$$F_d = \begin{cases} A_f(\zeta) e^{-\gamma_L y} & \text{при } y \geq 0; \\ B_f(\zeta) e^{\gamma_L y} & \text{при } y \leq 0; \end{cases} \quad (17)$$

$$X_d^{(j)} = \begin{cases} A^{(j)}(\zeta) e^{-\gamma_S y} & \text{при } y \geq 0; \\ B^{(j)}(\zeta) e^{\gamma_S y} & \text{при } y \leq 0, \end{cases}$$

где A_f , B_f , $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ — коэффициенты.

Для вычисления рассеянных полей в рассматриваемой 3D-задаче необходимо найти функции U_{jd} в выражениях (11)–(13), т. е. коэффициенты A_f , B_f , $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ в формуле (17).

Условия на поверхностях $y = \pm 0$ и уравнения Винера — Хопфа. Как и в работе [15], введем следующие обозначения:

$$U_{jd}(\zeta, y) = U_{jd}^{(+)} + U_{jd}^{(-)} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} u_{jd1}(x, y) e^{i\zeta x} dx + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 u_{jd1}(x, y) e^{i\zeta x} dx; \quad (18)$$

$$\Sigma_{jd}(\zeta, y) = \Sigma_{jd}^{(+)} + \Sigma_{jd}^{(-)} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \sigma_{yjd1}(x, y) e^{i\zeta x} dx + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \sigma_{yjd1}(x, y) e^{i\zeta x} dx, \quad (19)$$

где знаки «+» и «-» в верхних индексах параметров относятся к первым и вторым слагаемым соответственно.

Оба интеграла в выражении (18) и первый в уравнении (19) определены искомыми функциями U_{jd} , а второй интеграл в формуле (19) — падающей волной исходя из граничных условий на поверхности трещины, т. е. при $x < 0$ и $y = \pm 0$.

Вне трещины поля непрерывны, а следовательно, и функции $U_{jd}^{(+)}(\zeta, y)$, $\Sigma_{yjd}^{(+)}(\zeta, y)$ при $x > 0$ и $y = \pm 0$. В силу граничных условий (3) функции $\Sigma_{jd}^{(-)}(\zeta, y)$ также являются непрерывными при $x < 0$ и $y = \pm 0$, т. е. $\Sigma_{jd}(\zeta, y)$ непрерывны при $y = \pm 0$. Поэтому запишем

$$\Sigma_{jd}(\zeta, +0) = \Sigma_{jd}(\zeta, -0) = \Sigma_{jd}(\zeta, 0).$$

Однако функции $U_{jd}^{(-)}(\zeta, y)$ могут иметь на трещине разрывы, для которых введем обозначение

$$[U_{jd}(\zeta, \pm 0)] = U_{jd}^{(-)}(\zeta, +0) - U_{jd}^{(-)}(\zeta, -0). \quad (20)$$

Подставляя формулу (17) в уравнения (11)–(16) при $y = \pm 0$ и учитывая выражение (3), получаем пятнадцать алгебраических уравнений

с двадцатью неизвестными: восемь коэффициентов $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$, по шесть величин $U_{jd}(\zeta, \pm 0)$ и $\Sigma_{jd}(\zeta, \pm 0)$.

Далее будет учтено условие на ребре, т. е. при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, но и с ним, не ограничивая общности, на искомые коэффициенты $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$, можно налагать дополнительные связи. Например, полагаем, что

$$\zeta X_d^{(x)}(\zeta, y) - k_S c_0 X_d^{(z)}(\zeta, y) = 0, \quad (21)$$

а функции U_{yd} и Σ_{yd} не зависят от $X_d^{(x)}$ и $X_d^{(z)}$. Изначально вид дополнительной связи (21) был неизвестен, и он может меняться в зависимости от выбранной системы координат.

Учитывая выражения (3), (17)–(19) и выполняя алгебраические преобразования в уравнениях (11)–(16), можно показать, что при $y = \pm 0$ из формулы (21) следует

$$A^{(x)}(\zeta) = -B^{(x)}(\zeta), \quad A^{(z)}(\zeta) = -B^{(z)}(\zeta), \quad (22)$$

т. е. коэффициенты $A^{(x)}(\zeta)$, $B^{(x)}(\zeta)$ и $A^{(z)}(\zeta)$, $B^{(z)}(\zeta)$ попарно противоположны по знаку, либо равны нулю.

С учетом выражения (22) из формулы (21) получаем

$$\zeta [A^{(x)}(\zeta) - B^{(x)}(\zeta)] = k_S c_0 [A^{(z)}(\zeta) - B^{(z)}(\zeta)]. \quad (23)$$

Тогда граничные условия (3) принимают вид

$$\left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] [A_f(\zeta) - B_f(\zeta)] + (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \gamma_S [A^{(y)}(\zeta) + B^{(y)}(\zeta)] = 0; \quad (24)$$

$$i\zeta \gamma_L [A_f(\zeta) + B_f(\zeta)] + i\zeta \left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] \times [A^{(y)}(\zeta) - B^{(y)}(\zeta)] = 0; \quad (25)$$

$$ik_S^2 c_0^2 \gamma_L [A_f(\zeta) + B_f(\zeta)] + ik_S^2 c_0^2 \left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] \times [A^{(y)}(\zeta) - B^{(y)}(\zeta)] = 0. \quad (26)$$

Подставляя выражение (22) в формулу (14) при $y = \pm 0$ и складывая почленно левые и правые части полученных соотношений с учетом непрерывности функции $\Sigma_{jd}(\zeta, y)$, получаем

$$\Sigma^{(1)}(\zeta) = \Sigma_{yd}(\zeta, 0) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \right] [A_f(\zeta) + B_f(\zeta)] + (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \gamma_S [A^{(y)}(\zeta) - B^{(y)}(\zeta)] \right\}. \quad (27)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(\zeta) &= k_s c_0 \Sigma_{xd}(\zeta, 0) + \zeta \Sigma_{zd}(\zeta, 0); \\ \Sigma^{(3)}(\zeta) &= \zeta \Sigma_{xd}(\zeta, 0) - k_s c_0 \Sigma_{zd}(\zeta, 0). \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя выражение (22) в формулу (15) при $y = \pm 0$ и складывая левые и правые части полученных соотношений, как и в выражении (16), с учетом уравнений (22) и (28) получаем

$$\Sigma^{(2)}(\zeta) = -\frac{1}{2} \frac{k_s^2}{k_s c_0} \gamma_s (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) A^{(x)}(\zeta); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)}(\zeta) &= \frac{1}{2} i (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \left\{ \gamma_L [A_f(\zeta) - B_f(\gamma)] + \right. \\ &\left. + \left[\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \right] [A^{(y)}(\zeta) + B^{(y)}(\zeta)] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом выражения (20) введем аналогичные соотношениям (28) обозначения

$$\begin{aligned} [U^{(1)}(\zeta)] &= [U_{yd}(\zeta, \pm 0)]; \\ [U^{(2)}(\zeta)] &= k_s c_0 [U_{xd}(\zeta, \pm 0)] + \zeta [U_{zd}(\zeta, \pm 0)]; \\ [U^{(3)}(\zeta)] &= \zeta [U_{xd}(\zeta, \pm 0)] - k_s c_0 [U_{zd}(\zeta, \pm 0)], \end{aligned}$$

а также функцию Релея для рассматриваемой 3D-задачи

$$R(\rho) = \left[\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \right]^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \gamma_L \gamma_s,$$

где

$$\rho^2 = \zeta^2 + k_s^2 c_0^2.$$

Как и в работе [2], устранив путем алгебраических преобразований коэффициенты A_f , B_f , $A^{(j)}$, $B^{(j)}$ из уравнений (11)–(16) с учетом выражений (3) и (21), получаем три формально независимые друг от друга уравнения типа Винера — Хопфа:

$$\Sigma^{(1)}(\zeta) = -\frac{R(\rho)}{k_s^2 \gamma_L} [U^{(1)}(\zeta)]; \quad (31)$$

$$\Sigma^{(2)}(\zeta) = -\frac{\gamma_s}{4} [U^{(2)}(\zeta)]; \quad (32)$$

$$\Sigma^{(3)}(\zeta) = \frac{R(\rho)}{k_s^2 \gamma_s} [U^{(3)}(\zeta)]. \quad (33)$$

Следует отметить, что при выводе уравнений (31)–(33) описанным способом предполагалось, что $(\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \neq 0$ и $k_s c_0 \neq 0$. Однако, полагая одну из этих величин или обе равными нулю в исходных уравнениях (11)–(16), с учетом выражений (3) и (22) также придем к уравнениям (31)–(33), т. е. последние выполняются всюду на комплексной плоскости ζ .

Согласно соотношениям (2), при $k_s c_0 = 0$ волна падает на полуплоскость перпендикулярно ребру, как показано на рис. 1, а для продольной трещины. При этом выражение (32) относится к рассеянию поперечной волны, горизонтально поляризованной относительно поверхности полуплоскости, а соотношения (33) — к рассеянию продольной и вертикально поляризованной поперечной волны, т. е. к хорошо изученным 2D-задачам.

Далее будут рассмотрены нули функций γ_L , γ_s , и $R(\rho)$.

Для решения уравнений (31)–(33) с учетом выражения (19) запишем

$$\Sigma^{(m)}(\zeta) = \Sigma_{d1}^{(m+)}(\zeta) - \Sigma_{l0}^{(m-)}(\zeta), \quad m = 1, 2, 3, \quad (34)$$

где $\Sigma_{d1}^{(m+)}$ — неизвестные, а результат расчета $\Sigma_{l0}^{(m-)}$ с учетом формулы (3) для исходной (продольной или поперечной) волны приведен в таблице при условиях, показанных на рис. 1, б.

По аналогии с выражениями, приведенными в работе [2], можно записать

$$\begin{aligned} \Sigma_{l0}^{(m-)}(\zeta) &= \Sigma_{l0}^{(m-)}(\zeta, \alpha, \theta_0) = \\ &= P_l^{(m)}(\alpha, \theta_0) + \frac{Q_l^{(m)}(\alpha, \theta_0)}{\zeta + G}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\Sigma_{l0}^{(m-)}(\zeta, \alpha, \theta_0)$ — одна из функций, указанных в первой графе таблицы; α и θ_0 — углы, определяющие направление исходной (поперечной или продольной) волны (см. рис. 1, б); индекс « m » равен 1, 2 или 3 в соответствии со строками этой же графы, а индекс « l » — f или u_{s0} в соответствии с типом падающей волны согласно строкам второй графы; $P_l^{(m)}(\alpha, \theta_0)$ и $Q_l^{(m)}(\alpha, \theta_0)$ — коэффициенты, независимые от переменной ζ , причем любой из них или одновременно оба могут обращаться в нуль; G — параметр, зависящий от типа исходной волны,

$$G = \begin{cases} k_L a_{0f} & \text{при падении продольной волны } f_0; \\ k_s a_{0u} & \text{при падении поперечной волны } u_{s0}. \end{cases}$$

Для дальнейших вычислений методом Винера — Хопфа потребуется факторизация функций γ_L , γ_s и R , введенных в выражениях (8) и (32):

$$R(\rho) = R^+(\rho) R^-(\rho), \quad \gamma_L = \gamma_L^+ \gamma_L^-, \quad \gamma_s = \gamma_s^+ \gamma_s^-, \quad (36)$$

где знаки «+» и «-» относятся к функциям, регулярным в соответствующих каждой паре верхней и нижней полуплоскостей комплексной плоскости ζ , и для каждой пары функций

Параметры падающих волн

Функция $\Sigma_{j_0}^{(m-)}(\zeta)$	Падающая волна	Функция $\Sigma_{j_0}^{(m-)}(\zeta)$ в явном виде	Коэффициенты $Q_l^{(m)}$
$\Sigma_{10}^{(1-)}(\zeta)$	$f_0(x, y, z) \neq 0,$ $\mathbf{u}_{s0} \equiv 0$	$i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{1}{2} k_s^2 - k_L^2 (1 - b_{0f}^2) \right] \frac{1}{\zeta + k_L a_{0f}}$	$-i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{1}{2} k_s^2 - k_L^2 (1 - b_{0f}^2) \right]$
	$f_0 \equiv 0,$ $\mathbf{u}_{s0}(x, y, z) \neq 0$	$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_s b_0 s_{0y} \frac{1}{\zeta + k_s a_0}$	$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_s b_0 s_{0y}$
$\Sigma^{(2-)}(\zeta)$	$f_0(x, y, z) \neq 0,$ $\mathbf{u}_{s0} \equiv 0$	$i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_L b_{0f} k_s c_0$	0
	$f_0 \equiv 0,$ $\mathbf{u}_{s0}(x, y, z) \neq 0$	$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_s \left[(s_{0z} b_0 + s_{0y} c_0) + k_s b_0 (s_{0x} c_0 - s_{0z} a_0) \frac{1}{\zeta + k_s a_0} \right]$	$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_s k_s b_0 (s_{0x} c_0 - s_{0z} a_0)$
$\Sigma^{(3-)}(\zeta, 0)$	$f_0(x, y, z) \neq 0,$ $\mathbf{u}_{s0} \equiv 0$	$i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_L b_{0f} \left(k_L a_{0f} - \frac{k_L^2 a_{0f}^2 + k_s^2 c_0^2}{\zeta + k_L a_{0f}} \right)$	$-i \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_L b_{0f} (k_L^2 a_{0f}^2 + k_s^2 c_0^2)$
	$\mathbf{u}_{s0}(x, y, z) \neq 0,$ $f_0 \equiv 0$	$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_s \left\{ (s_{0x} b_0 + s_{0y} a_0) - [k_s a_0 \times \right.$ $\left. \times (s_{0x} b_0 + s_{0y} a_0) + k_s c_0 (s_{0z} b_0 + s_{0y} c_0) \right] \frac{1}{\zeta + k_s a_0} \left. \right\}$	$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} k_s [k_s a_0 (s_{0x} b_0 + s_{0y} a_0) + k_s c_0 (s_{0z} b_0 + s_{0y} c_0)]$

соответствующие полуплоскости имеют общую полосу.

Для функций γ_L и γ_S в соотношениях (8) согласно выражениям (17) выбираем ветви, при которых выполняется условие излучения. При этом справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_L^\pm &= \left[(\zeta^2 + k_L^2 c_0^2)^{1/2} \mp k_L^2 \right]^{1/2}; \\ \gamma_S^\pm &= \left[(\zeta^2 + k_S^2 c_0^2)^{1/2} \mp k_S^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{37}$$

В выражениях (36), (37) и далее одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Факторизацию функции $R(\rho)$ выполняют стандартным путем согласно [15]. После ввода волнового числа волны Релея k_R запишем

$$R^\pm(\rho) = 2^{1/2} (k_S^2 - k_L^2)^{1/2} (k_R \mp \rho) \exp A,$$

где

$$A = -\frac{1}{\pi} \int_{k_L}^{k_S} \arctg \left[\frac{4\omega^2 [(k_S^2 - \omega^2)(\omega^2 - k_L^2)]^{1/2}}{[(1/2)k_S^2 - \omega^2]^2} \right] \frac{d\omega}{\omega \pm \rho}.$$

В качестве примера решим уравнение (32) методом Джонса [15], для чего введем функции

$$\begin{aligned} N_{12}^+(\zeta) &= \frac{Q_l^{(2)}}{\zeta + G} \left[\frac{1}{\gamma_S^+} - \frac{1}{(k_S + G)^{1/2}} \right], \\ N_{12}^-(\zeta) &= \frac{Q_l^{(2)}}{(\zeta + G)(k_S + G)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом выражений (34) и (35) представим уравнение (32) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_S^+} \Sigma_{d1}^{(2+)}(\zeta, 0) - \frac{1}{\gamma_S^+} P_l^{(2)} - N_{12}^+(\zeta) &= \\ = -\frac{\gamma_S^-}{4} [U^{(2)}(\zeta)] + N_{12}^-(\zeta). \end{aligned} \tag{38}$$

Следует отметить, что в статье [2] у аналогичных выражений в знаменателях перед параметром k_S ошибочно указан знак «минус». Однако это не повлияло на общее заключение по этой статье.

Как и в работе [15], используя указанное ранее условие на ребре и полагая $\text{Im } k_S > 0$, получаем

$$|U_{jd}(\zeta, +0)| < C_1 |\zeta|^{-1} \text{ при } \zeta \rightarrow \infty \text{ и } \text{Im } \zeta < \text{Im } k_S |a_0|;$$

$$|\Sigma_{jd}^{(+)}(\zeta, 0)| < C_2 |\zeta|^{-\epsilon} \text{ при } \zeta \rightarrow \infty \text{ и } \text{Im } \zeta > -\text{Im } k_S$$

и далее

$$\left| \frac{1}{\gamma_s^+} \Sigma_d^{(2+)}(\zeta, 0) - \frac{1}{\gamma_s^+} P_l^{(2)} - N_{l_2}^+(\zeta) \right| < C_3 |\zeta|^{1/2-\epsilon};$$

$$\left| -\frac{\gamma_s^-}{4} [U^{(2)}(\zeta)] + N_{l_2}^-(\zeta) \right| < C_4 |\zeta|^{1/2},$$

где $C_1 \dots C_4$ — произвольные постоянные.

Таким образом, левая и правая части выражения (38) содержат функции, регулярные в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости ζ , которые имеют общую полюсу

$$-\text{Im } k_s < \text{Im } \zeta < \text{Im } k_s |a_0|.$$

При $\zeta \rightarrow \infty$ эти функции могут возрастать не быстрее, чем $|\zeta|^{1/2}$. В силу теоремы Луивилля получаем

$$\frac{1}{\gamma_s^+} \Sigma_{d1}^{(2+)}(\zeta, 0) - \frac{1}{\gamma_s^+} P_l^{(2)} = N_{l_2}^+(\zeta) + N, \quad (39)$$

где N — постоянная, которая может быть отлична от нуля.

Однако, используя еще одну возможность вносить ограничения на искомые функции, полагаем $N = 0$.

При решении уравнений (31) и (33) проблема со слагаемым типа N не возникает, так как из условий на ребре следует, что после факторизации функций γ_L, γ_S, R и приведения уравнений к виду, аналогичному выражению (38), левые части в них при $\zeta \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, а правые могут возрастать, но не быстрее, чем $|\zeta|^{1/2}$.

Прочие необходимые условия для применения теоремы Луивилля также выполняются, и функции $\Sigma^{(1,3)}(\zeta)$ могут быть однозначно определены. Тогда, подставляя выражения (34) и (19) в формулу (39) и аналогичные уравнения для $\Sigma_{d1}^{(1+)}$ и $\Sigma_{d1}^{(3+)}$, получаем

$$\Sigma^{(1)}(\zeta) = -\frac{Q_l^{(1)} R^+(\rho)}{\zeta + G} \frac{1}{\gamma_L^+ (k_s^2 - k_L^2)^{1/2} (k_s + G)^{1/2}}; \quad (40)$$

$$\Sigma^{(2)}(\zeta) = -\gamma_s^+ \frac{Q_l^{(2)}}{\zeta + G} \frac{1}{(k_s + G)^{1/2}}; \quad (41)$$

$$\Sigma^{(3)}(\zeta) = -\frac{Q_l^{(2)} R^+(\rho)}{\zeta + G} \frac{1}{\gamma_s^+ (k_s^2 - k_L^2)^{1/2} (k_s + G)^{1/2}}. \quad (42)$$

Следует отметить, что уравнения (11)–(16) можно записать в матричной форме. В этом случае соотношения (40)–(42) можно рассмат-

ривать как результат факторизации матрицы для решаемой 3D-задачи.

Тогда с учетом условия на ребре и дополнительных ограничений, наложенных на коэффициенты $A_f, B_f, A^{(j)}, B^{(j)}$ и N , двадцать неизвестных величин будут связаны девятнадцатью уравнениями. Таким образом, остается одна неиспользованная возможность для дополнительного ограничения, налагаемого на искомые коэффициенты.

Расчет коэффициентов $A_f, B_f, A^{(j)}, B^{(j)}$ и рассеянной продольной волны. Из выражений (27), (29) и (30) следует, что коэффициенты $A_f, B_f, A^{(j)}, B^{(j)}$ разделены на три группы, которые можно рассматривать независимо друг от друга:

1) комбинации $[A_f(\zeta) + B_f(\zeta)]$ и $[A^{(y)}(\zeta) - B^{(y)}(\zeta)]$ согласно формулам (25)–(27) вычислены через $\Sigma^{(1)}(\zeta)$ из (40);

2) коэффициент $A^{(x)}(\zeta)$ согласно (29) определен через $\Sigma^{(2)}(\zeta)$ из (41); из (22) и (23) также найдены коэффициенты $B^{(x)}(\zeta), A^{(z)}(\zeta)$ и $B^{(z)}(\zeta)$;

3) комбинации $[A_f(\zeta) - B_f(\zeta)]$ и $[A^{(y)}(\zeta) + B^{(y)}(\zeta)]$ согласно (24) и (30) определены через $\Sigma^{(3)}(\zeta)$ из (42).

Таким образом, на данном этапе решения 3D-задачи коэффициенты из второй группы найдены по аналогии с решением 2D-задачи о рассеянии акустической волны или поперечной волны, поляризованной вдоль ребра трещины [7, 11], а коэффициенты первой и третьей групп — как в 2D-задаче, разделенной на симметричную и антисимметричную части. Для первой и третьей групп используем оставшуюся возможность наложить одну связь на коэффициенты A и B .

Для первой группы полагаем $A_f^{(1)}(\zeta) = B_f^{(1)}(\zeta)$. Тогда из соотношения (24) получаем $A^{(y1)}(\zeta) = -B^{(y1)}(\zeta)$ и из выражений (26) и (27) находим

$$A_f^{(1)}(\zeta) = \frac{\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)}{R(\rho)} \Sigma^{(1)}(\zeta); \quad (43)$$

$$A^{(y1)}(\zeta) = -\frac{\gamma_L}{R(\rho)} \Sigma^{(1)}(\zeta).$$

Для третьей группы полагаем $A_f^{(3)}(\zeta) = -B_f^{(3)}(\zeta)$. Тогда из выражения (25) или (26) имеем $A^{(y3)}(\zeta) = B^{(y3)}(\zeta)$ и из уравнений (24) и (30) получаем

$$A_f^{(3)}(\zeta) = i \frac{\gamma_s}{R(\rho)} \Sigma^{(3)}(\zeta);$$

$$A^{(y3)}(\zeta) = -i \frac{\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)}{(\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) R(\rho)} \Sigma^{(3)}(\zeta). \quad (44)$$

Искомые значения коэффициентов A_f , B_f , $A^{(y)}$ и $B^{(y)}$ в выражениях (17) представляют собой сумму линейно независимых значений, полученных в формулах (43) и (44):

$$A_f(\zeta) = A_f^{(1)}(\zeta) + A_f^{(3)}(\zeta);$$

$$B_f(\zeta) = A_f^{(1)}(\zeta) - A_f^{(3)}(\zeta); \quad (45)$$

$$A^{(y)}(\zeta) = A^{(y1)}(\zeta) + A^{(y3)}(\zeta);$$

$$B^{(y)}(\zeta) = -A^{(y1)}(\zeta) + A^{(y3)}(\zeta). \quad (46)$$

Остальные коэффициенты A_f , B_f , $A^{(y)}$ и $B^{(y)}$ определены в выражении (29) с учетом соотношений (22).

Расчет амплитуд рассеянных волн выполним, учитывая, что вдали от ребра продольные и поперечные волны следует рассматривать независимо. Если исходная волна — продольная, то в силу выражений (9) для расчета диаграммы направленности рассеянной продольной волны достаточно, обратив фурье-образ F_d , найти функцию $f_{d1}(x, y)$. Из уравнений (45) и (17) получаем

$$f_{d1}^{\pm}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(k_s^2 - k_L^2)^{\frac{1}{2}} (k_s + k_L a_{of})^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{ -Q_L^{(1)}(\alpha, \theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(\zeta) e^{-i\zeta x \mp \gamma_L y} d\zeta \pm \right.$$

$$\left. \pm i Q_L^{(3)}(\alpha, \theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(2)}(\zeta) e^{-i\zeta x \mp \gamma_L y} d\zeta \right\}, \quad (47)$$

где

$$f^{(1)}(\zeta) = \frac{\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)}{R^-(\rho)} \frac{1}{\gamma_L^+ \zeta + k_L a_{of}};$$

$$f^{(2)}(\zeta) = \frac{\gamma_s^-}{R^-(\rho)} \frac{1}{\zeta + k_L a_{of}};$$

$Q_L^{(1)}$ и $Q_L^{(3)}$ — коэффициенты, приведенные в таблице; верхние знаки применяют при $y \geq 0$, что соответствует использованию эхо-метода ультразвукового контроля при выявлении дефекта 3 источником 4 и приемником 5 (см. рис. 1, а), а нижние — при $y \leq 0$, когда дефект 6 озвучивается (см. рис. 1, б) по методу TOFD с вращением источника и приемника

вокруг оси x ; второй случай является наиболее важным для выявления поперечных трещин.

Интегралы в выражении (47) можно вычислить методом перевала, используя первое приближение функции Ханкеля, т. е. сохраняя в результирующих формулах только члены порядка $r^{-1/2}$. При этом после необходимого преобразования контура интегрирования аналогично тому, как это выполнено в работе [7] для 2D-задачи, потребуется учесть вычеты в корнях функций γ_L и $R(\rho)$.

Это даст возможность получить выражения для продольной волны, зеркально отраженной от трещины в освещенную зону перед ней, и для волн Релея, распространяющихся от ребра вдоль трещины. Также необходимо учесть интегралы вдоль разрезов комплексной плоскости по линиям ветвления функций γ_L и γ_s . Вычисление этих слагаемых позволяет описать неоднородные головные волны, распространяющиеся вдоль трещины.

Однако при применении к выявлению ребра трещины (см. рис. 1, б) по методу TOFD достаточно учесть только диаграмму направленности продольной волны, рассеивающейся непосредственно на ребре. Применяя к интегралам в выражении (47) метод перевала с учетом уравнений (10), получаем расчетную формулу

$$f_d(r_L, \varphi_L, z_L) = \frac{p^{1/2}}{(k_s^2 - k_L^2)^{1/2} (k_s + k_L a_{of})^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{ -Q_L^{(1)}(\alpha, \theta_0) f^{(1)}(\zeta) \mp i Q_L^{(3)}(\alpha, \theta_0) f^{(2)}(\zeta) \right\} \times$$

$$\times \sin \varphi_L r_L^{-1/2} e^{i(p r_L + k_L c_0 f z_L) - i\pi/4}. \quad (48)$$

Здесь r_L , φ_L , z_L — координаты точки наблюдения в цилиндрической системе координат с осью z ;

$$p = k_L (1 - c_0^2)^{1/2}; \quad \zeta = \mp p \cos \varphi_L.$$

Как и в работе [15], следует отметить, что переход от выражения (47) к (48) требует исключения окрестности значений $\varphi = 0$ и π , так как в этих точках $\sin \varphi = 0$, и нельзя безусловно пренебрегать слагаемыми с r^{-1} и r^{-2} . Точка $\varphi = \pi/2$ соответствует 2D-задаче и также исключена из расчета по формуле (48). Поэтому для вычислений принято условие $\varphi \neq 0, \pi/2$ и π .

Если необходимо рассмотреть поведение решения в окрестности $\varphi \neq 0, \pi/2$ и π , то будем считать, что угол φ достаточно близок к этим значениям, например, $\varphi \approx 5^\circ$ или $\varphi \approx \pi - 5^\circ$, а расстояние r достаточно велико, чтобы скомпенсировать малые значения $\sin \varphi$.

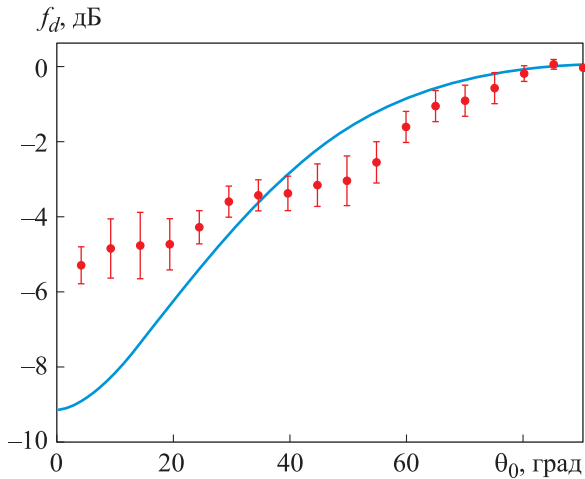


Рис. 2. Расчетная (—) и экспериментальная (•) зависимости потенциала рассеянной на ребре полуплоскости продольной волны f_d от угла θ_0

В качестве примера на рис. 2 приведена зависимость потенциала продольной волны, рассеянной на ребре полуплоскости, при симметричном расположении источника и приемника (см. рис. 1, б) от угла θ_0 (определяющего ориентацию пары источник — приемник), рассчитанная по формуле (48) с нижними знаками при $\alpha_{ins} = \alpha_{rec} = 60^\circ$, $\theta_{ins} = \theta_{rec}$. Расчет выполнен стандартным программным средством (Python 3 с общедоступными библиотеками).

Также на рис. 2 приведены результаты эксперимента для образца из алюминиевого сплава, в котором трещина выполнена методом сварки трением с перемешиванием [16]. При измерении расстояние между острием дефекта и поверхностью сварного шва составляло 15...17 мм, что при частоте 5 МГц соответствует ориентировочно 13...15 длинам волн, т. е. r можно считать достаточно большим.

На рис. 2 показаны 95%-ные доверительные интервалы, полученные при усреднении измерений в каждой точке. Учитывая конечную ширину острия модельной трещины, которую можно оценить как 0,2...0,3 длины волн, и традиционное для дефектоскопии влияние неоднородности среды на параметры принимаемого сигнала, можно считать совпадение результатов расчета и эксперимента удовлетворительным.

Расчет рассеянной поперечной волны. Для случая, когда на ребро падает продольная волна, диаграмму направленности рассеянной поперечной волны также можно рассчитать по соотношениям (11)–(13) с учетом найденных

значений коэффициентов A_f , B_f , $A^{(y)}$ и $B^{(y)}$. Однако такую схему редко используют при УЗК, поэтому ее изучать не будем.

Более интересно рассмотреть диаграмму направленности рассеянной поперечной волны при падении поперечной волны по схеме, показанной на рис. 1, б. В этом случае необходимо учесть поляризацию падающей и рассеянной волн, т. е. вычислить не только потенциалы, но и составляющие смещений u_{sd} .

Для составляющей смещений u_{Syd1} расчетную формулу получим, выделяя из выражения (12) второе и третье слагаемые, соответствующие поперечной волне, причем, согласно формуле (22), считаем, что второе слагаемое тождественно равно нулю. Тогда, обращая преобразование Фурье для третьего слагаемого, с учетом выражений (46) запишем

$$u_{Syd1}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(k_S^2 - k_L^2)^{1/2} (k_S + k_S a_0)^{1/2}} \times \left\{ \pm Q_S^{(1)}(\alpha, \theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(3)}(\zeta) e^{-i\zeta x \mp \gamma_S y} d\zeta + i Q_S^{(3)}(\alpha, \theta_0) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(4)}(\zeta) e^{-i\zeta x \mp \gamma_S y} d\zeta \right\}, \quad (49)$$

где $Q_S^{(1)}$ и $Q_S^{(3)}$ — коэффициенты, указанные в таблице;

$$f^{(3)}(\zeta) = \frac{(\zeta^2 + k_S^2 c_0^2) \gamma_L^-}{R^-(\rho)} \frac{1}{\zeta + k_S a_0};$$

$$f^{(4)}(\zeta) = \frac{\frac{1}{2} k_S^2 - (\zeta^2 + k_S^2 c_0^2)}{\gamma_S^+ R^-(\rho)} \frac{1}{\zeta + k_S a_0}.$$

Как и в выражениях (45), для вычисления с точностью до членов порядка $r^{-1/2}$ можно использовать метод перевала, при необходимости, с учетом обхода полюсов — нулей функции γ_S (они же — точки ветвления) и корней функции Релея. Вычеты в этих полюсах в освещенной зоне дают описание поперечной волны, зеркально отраженной от трещины, и волн Релея, возбуждаемых на ее поверхностях.

Как отмечено в работе [2], при достаточно больших углах между направлением падающей волны и ребром, когда выполняется условие $(k_L^2 - k_S^2 c_0^2) \leq 0$, может потребоваться учесть интеграл вдоль линии ветвления функции γ_S . Если же этот угол меньше критического, то такой необходимости не возникает, и преобразование контура интегрирования можно выполнить

аналогично тому, как это сделано в работе [7] для 2D-случая и в предыдущем случае 3D-рассеяния продольной волны.

Если требуется найти только диаграммы направленности поперечной волны, рассеянной на ребре, то не надо учитывать вычеты в корнях функций γ_s , $R(\rho)$ и интеграл вдоль разрезов комплексной плоскости ζ для этих функций, и для составляющей смещений u_{Syd1} в выражении (49) будут получены интегралы, аналогичные вычисленным в формуле (47).

Для составляющих смещений $u_{Sxd1}(x, y)$ и $u_{Szd1}(x, y)$ после подстановки найденных коэффициентов A_f , B_f , $A^{(y)}$ и $B^{(y)}$ из выражений (22), (29), (46) в уравнения (11) и (13) получаем

$$u_{Szd1}(\zeta, \pm 0) = ik_s c_0 \frac{\gamma_s \gamma_L}{R(\rho)} \Sigma^{(1)}(\zeta) \pm \frac{k_s c_0}{\gamma_s (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)} \left\{ -2 \frac{\zeta}{k_s c_0} \Sigma^{(2)}(\zeta) - \frac{1}{R(\rho)} \left[\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \right] \gamma_s^2 \Sigma^{(3)}(\zeta) \right\}; \quad (50)$$

$$u_{Sxd1}(\zeta, \pm 0) = -i \zeta \gamma_s \frac{\gamma_L}{R(\rho)} \Sigma^{(1)}(\zeta) \pm \frac{1}{\gamma_s (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)} \times \left\{ -2 k_s c_0 \Sigma^{(2)}(\zeta) + \frac{1}{R(\rho)} \left[\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \right] \zeta \gamma_s^2 \Sigma^{(3)}(\zeta) \right\}, \quad (51)$$

т. е. при вычислении функций u_{xd1} и u_{zd1} под интегралами появляется знаменатель $(\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)$, имеющий нули при $\zeta = \pm k_s c_0$.

Однако с учетом выражения (21) можно показать, что

$$\Sigma^{(3)}(\pm k_s c_0) = \pm i \Sigma^{(1)}(\pm k_s c_0)$$

и

$$\gamma_s^2 = -k_s^2, \quad R(\rho) = \frac{1}{4} k_s^4.$$

Тогда в правых частях уравнений (50) и (51) выражения в скобках при $\zeta \rightarrow \pm k_s c_0$ стремятся к нулю, как $\rho^2 = (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2)$. Поэтому при вычислении интегралов типа (47) в этих точках дополнительные вычеты не возникают.

Выражения для составляющей смещений u_{Sjd} в точке наблюдения (r_s, φ_s, z_s) запишем по аналогии с выражением (48), опуская вычеты в корнях функций γ_L , γ_s , $R(\rho)$ и интегралы вдоль разрезов:

$$u_{Sxd}^{\pm}(r_s, \varphi_s, z_s) = \frac{(\cos \varphi_s)^2}{1 + (\cos \varphi_s)^2} \frac{1}{k_s^2 c_0^2} \frac{p^{1/2}}{(k_s + k_s a_0)^{1/2}} \times \left\{ \frac{p}{(k_s^2 - k_L^2)^{1/2}} [i Q_{S1}(\alpha, \theta_0) f^{(5)}(\zeta) \mp \mp Q_{S3}(\alpha, \theta_0) f^{(6)}(\zeta)] \pm k_s c_0 Q_{S2}(\alpha, \theta_0) f^{(7)}(\zeta) \right\} \times \sin \varphi_s r_s^{-1/2} e^{i(p r_s + k_s c_0 z_s) - i\pi/4}, \quad (52)$$

$$u_{Syd}^{\pm}(r_s, \varphi_s, z_s) = \frac{p^{1/2}}{(k_s + k_s a_0)^{1/2} (k_s^2 - k_L^2)^{1/2}} \times \left\{ \pm Q_{S1}(\alpha, \theta_0) f^{(3)}(\zeta) + i Q_{S3}(\alpha, \theta_0) f^{(4)}(\zeta) \right\} \times \sin \varphi_s r_s^{-1/2} e^{i(p r_s + k_s c_0 z_s) - i\pi/4}, \quad (53)$$

$$u_{Szd}^{\pm}(r_s, \varphi_s, z_s) = \frac{(\cos \varphi_s)^2}{1 + (\cos \varphi_s)^2} \frac{1}{k_s^2 c_0^2} \frac{p^{1/2}}{(k_s + k_s a_0)^{1/2}} \times \left\{ \frac{k_s c_0}{(k_s^2 - k_L^2)^{1/2}} [\mp i Q_{S1}(\alpha, \theta_0) f^{(5)}(\zeta) + + Q_{S3}(\alpha, \theta_0) f^{(6)}(\zeta)] \pm 2 p Q_{S2}(\alpha, \theta_0) f^{(7)}(\zeta) \right\} \times \sin \varphi_s r_s^{-1/2} e^{i(p r_s + k_s c_0 z_s) - i\pi/4}, \quad (54)$$

где

$$p = k_s (1 - c_0^2)^{1/2}; \quad \zeta = \mp p \cos \varphi_s;$$

$$f^{(5)}(\zeta) = \frac{(\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \gamma_L \gamma_s}{R^-(\rho)} \frac{1}{\zeta + k_s a_0};$$

$$f^{(6)}(\zeta) = \frac{\left[\frac{1}{2} k_s^2 - (\zeta^2 + k_s^2 c_0^2) \right] \gamma_s^-}{R^-(\rho)} \frac{1}{\zeta + k_s a_0};$$

$$f^{(7)}(\zeta) = \frac{1}{\gamma_s^-} \frac{1}{\zeta + k_s a_0}.$$

В выражении (54) верхние знаки берутся при $y \geq 0$, а нижние — при $y \leq 0$.

Проектируя параметры (52)–(54) на эту плоскость поляризации приемника (см. рис. 1), с учетом соотношений (2) для поперечной волны, рассеивающейся на ребре, получаем

$$u_{Sd}^{\pm}(r_s, \varphi_s, z_s) = u_{Sxd}^{\pm} s_{0x} \pm u_{Syd}^{\pm} s_{0y} - u_{Szd}^{\pm} s_{0z}. \quad (55)$$

Оценки по выражению (55) показывают, что, в отличие от приема продольной волны, амплитуда принимаемой от ребра поперечной волны резко падает при вращении пары источник — приемник вокруг оси z более чем на 40 дБ при повороте этой пары на 10...15°. По-

этому нецелесообразно использовать поперечную волну для выявления поперечных трещин по методу TOFD.

Выводы

1. Решение 3D-задачи о рассеянии продольной или поперечной волны на ребре трещины в упругой среде, выполненное методом Винера — Хопфа, записано в квадратурах. Полученные формулы, описывающие потенциалы и смещения в рассеянных волнах, удобны для инженерных расчетов диаграмм направленности волн, дифрагированных на ребре. Такие расче-

ты можно выполнить с помощью стандартных программных средств (Python 3 с общедоступными библиотеками NumPy или Scipy). Полученные данные можно использовать, например, для расчета параметров акустических систем в дифракционно-временном методе ультразвукового контроля TOFD.

2. Анализ результатов экспериментальной проверки выведенных соотношений на примере рассеяния на острие трещины продольной волны показал, что совпадение данных расчета и эксперимента можно считать удовлетворительным.

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук, доценту кафедры акустики МГУ им. Н.В. Ломоносова А.В. Шанину за консультации и обсуждения при подготовке данной работы. А.В. Шанин обратил внимание авторов на то, что, используя дивергентную теорему, уравнения Винера — Хопфа (31)–(33) можно получить непосредственно через смещения, не вводя потенциалы волн. При этом нули функции $(\zeta^2 + k_0^2 c_0^2)$ не создают дополнительные вычеты при обращении преобразования Фурье.

Литература

- [1] Алешин Н.П. Физические методы неразрушающего контроля сварных соединений. Москва, Машиностроение, 2013. 574 с.
- [2] Алешин Н.П., Могильнер Л.Ю. Рассеяние упругой волны на плоской трещине: применение для дефектоскопии. Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки, 2023, т. 509, № 1, с. 67–75.
- [3] Неганов Д.А. Основы детерминированных нормативных методов обоснования прочности трубопроводов. Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, 2018, т. 8, № 6, с. 608–617.
- [4] Гинзел Э. TOFD. Дифракционно-временной метод ультразвуковой дефектоскопии. Москва, ДПК Пресс, 2021. 312 с.
- [5] Неганов Д.А., Филиппов О.И., Михайлов И.И. и др. Применение метода TOFD для контроля разнотолщинных сварных швов стенок вертикальных стальных резервуаров. Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, 2019, т. 9, № 3, с. 306–314.
- [6] Ермолов И.Н., Вopilкин А.Х., Бадалян В.Г. Расчеты в ультразвуковой дефектоскопии. Москва, Эхо+, 2000. 110 с.
- [7] Miklowitz J. *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland, 1978. 626 p.
- [8] Бабич В.М., Лялинов М.А., Грикуров В.Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции. Санкт-Петербург, СПбГУ, 2003. 104 с.
- [9] Данилов В.Н. Рассеяние продольных волн полубесконечной трещиной в упругой среде. Дефектоскопия, 1988, № 3, с. 79–85.
- [10] Данилов В.Н. К вопросу о рассеянии поперечной SV-волны полубесконечной трещиной. Дефектоскопия, 1990, № 10, с. 20–25.
- [11] Achenbach J.D., Gantesen A.K. Geometrical theory of diffraction for three-D elastodynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977, vol. 61, no. 2, pp. 413–421, doi: <https://doi.org/10.1121/1.381332>
- [12] Исраилов М.Ш. Точные решения трехмерных задач дифракции плоских упругих волн на клине. Доклады Академии наук СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 815–818.
- [13] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. Москва, Наука, 1986. 328 с.
- [14] Будаев Б.В. Дифракция упругих волн от свободного клина. Редукция к сингулярному интегральному уравнению. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1989, т. 179, с. 37–45.

- [15] Нобл Б. *Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*. Москва, Изд-во Иностранной литературы, 1962. 279 с.
- [16] Алешин Н.П., Могильнер Л.Ю., Щипаков Н.А. и др. Об использовании пазов для моделирования трещин при ультразвуковой дефектоскопии. *Дефектоскопия*, 2022, № 2, с. 3–12.

References

- [1] Aleshin N.P. *Fizicheskie metody nerazrushayushchego kontrolya svarnykh soedineniy* [Physical methods of non-destructive testing of welded joints]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2013. 574 p. (In Russ.).
- [2] Aleshin N.P., Mogilner L.Yu. Elastic-wave scattering by a plane crack: flaw detection application. *Doklady Rossiyskoy Akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki*, 2023, vol. 509, no. 1, pp. 67–75. (In Russ.).
- [3] Neganov D.A. Basics of deterministic normative methods of pipeline strength substantiation. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefi i nefteproduktov* [Science and Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation], 2018, vol. 8, no. 6, pp. 608–617. (In Russ.).
- [4] Ginzel E. *Ultrasonic time of flight diffraction*. Eclipse Scientific, 2013. 249 p. (Russ. ed.: *TOFD. Difraktsionno-vremennoy metod ultrazvukovoy defektoskopii*. Moscow, DPK Press Publ., 2021. 312 p.)
- [5] Neganov D.A., Filippov O.I., Mikhaylov I.I. et al. Application of the TOFD method to monitor the transition welded joints of the vertical steel tank walls. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefi i nefteproduktov* [Science and Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation], 2019, vol. 9, no. 3, pp. 306–314. (In Russ.).
- [6] Ermolov I.N., Vopilkin A.Kh., Badalyan V.G. *Raschety v ultrazvukovoy defektoskopii* [Calculations in ultrasound defectoscopy]. Moscow, Ekho+ Publ., 2000. 110 p. (In Russ.).
- [7] Miklowitz J. *The theory of elastic waves and waveguides*. North-Holland, 1978. 626 p.
- [8] Babich V.M., Lyalinov M.A., Grikurov V.E. *Metod Zommerfelda-Malyuzhintsa v teorii diffraktsii* [Sommerfeld-Malyuzhinets method in diffraction theory]. Sankt-Petersburg, SPBGU Publ., 2003. 104 p. (In Russ.).
- [9] Danilov V.N. Scattering of longitudinal waves by a semi-infinite crack in an elastic medium. *Defektoskopiya*, 1988, no. 3, pp. 79–85. (In Russ.).
- [10] Danilov V.N. To a question about scattering of transverse SV-wave by a semi-infinite crack. *Defektoskopiya*, 1990, no. 10, pp. 20–25. (In Russ.).
- [11] Achenbach J.D., Gautesen A.K. Geometrical theory of diffraction for three-D elastodynamics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977, vol. 61, no. 2, pp. 413–421, doi: <https://doi.org/10.1121/1.381332>
- [12] Israilov M.Sh. Exact solutions of three-dimensional problems of the diffraction of plane elastic waves by a wedge. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1979, vol. 247, no. 4, pp. 815–818. (In Russ.).
- [13] Poruchikov V.B. *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of dynamic elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 328 p. (In Russ.).
- [14] Budaev B.V. Diffraction of elastic waves by a free wedge. Reduction to a singular integral equation. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, 1989, vol. 179, pp. 37–45. (In Russ.). (Eng. version: *J. Sov. Math.*, 1991, vol. 57, no. 3, pp. 3087–3092, doi: <https://doi.org/10.1007/BF01098973>)
- [15] Noble B. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*. University Microfilms, 1962. 246 p. (Russ. ed.: *Primenenie metoda Vinera-Khopfa dlya resheniya differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh*. Moscow, Izd-vo Inostrannoy literatury Publ., 1962. 279 p.)
- [16] Aleshin N.P., Mogilner L.Yu., Shchipakov N.A. et al. On use of slots in modelling cracks in ultrasonic testing. *Defektoskopiya*, 2022, no. 2, pp. 3–12. (In Russ.). (Eng. version: *Russ. J. Nondestruct. Test.*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 71–80, doi: <https://doi.org/10.31857/S0130308222020014>)

Информация об авторах

МОГИЛЬНЕР Леонид Юрьевич — доктор технических наук, главный научный сотрудник. ООО «НИИ Транснефть» (117186, Москва, Российская Федерация, Севастопольский проспект, д. 47а, e-mail: mogilner@mail.ru).

КРЫСЬКО Николай Владимирович — кандидат технических наук, заведующий лабораторией ФГАУ «НУЦ «Сварка и контроль», доцент кафедры «Сварка, диагностика и специальная робототехника». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: kryskonv@bmstu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Могильнер Л.Ю., Крысько Н.В. 3D-рассеяние упругих волн на острие трещины в сварном шве. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2024, № 3, с. 42–55.

Please cite this article in English as:

Mogilner L.Yu., Krysko N.V. Elastic wave 3D scattering on a crack edge in the weld joint. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2024, no. 3, pp. 42–55.

Information about the authors

MOGILNER Leonid Yurievich — Doctor of Science (Eng.), Chief Researcher. Transneft SRI LLC (117186, Moscow, Russian Federation, Sevastopolskiy prospect, Bldg. 47a, e-mail: mogilner@mail.ru).

KRYSKO Nikolay Vladimirovich — Candidate of Science (Eng.), Head of the Laboratory. FSAE “SEC “Welding and Control”; Associate Professor, Department of Welding, Diagnostics and Special Robotics. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: kryskonv@bmstu.ru).



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям монографию «Логистика замкнутого цикла в экономических системах»

Авторы: И.Н. Омельченко, Ю.Г. Герцик, И.И. Фокина

Рассмотрены актуальные вопросы расширения использования ресурсосберегающих и экологически эффективных технологий в производственных и логистических системах промышленных предприятий на основе принципов устойчивого развития и их внедрения в рамках экономики замкнутого цикла. Исследование является продолжением научных изысканий авторов в области устойчивого развития как концепции, позволяющей обеспечивать экономический рост без ущерба окружающей среде благодаря разработке и внедрению логистических систем замкнутого цикла.

Для научных работников и специалистов в области промышленной логистики и устойчивого развития, руководителей и менеджеров производственных предприятий, сотрудников отделов менеджмента качества, студентов и аспирантов, обучающихся по направлениям подготовки «Логистика и управление цепями поставок», «Менеджмент», «Инноватика», а также для широкого круга читателей, интересующихся современными тенденциями в экономике и логистике.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://press.bmstu.ru>