

# Транспортное и энергетическое машиностроение

УДК 629.033

## Математическое моделирование динамики прямолинейного движения роботизированного транспортного средства по деформируемому грунту

**В.Н. Наумов, К.Ю. Машков, Д.А. Чижов**

*Рассмотрены основные вопросы, отражающие суть методов математического моделирования прямолинейного движения роботизированных транспортных средств по деформируемому грунту в целях создания предпосылок к разработке систем автоматики, направленных на повышение опорной проходимости.*

**Ключевые слова:** буксование, энергетическая и сцепная характеристика, динамика, опорная проходимость.

*The article reviews the key issues reflecting the essence of mathematical modeling of rectilinear motion of robotic vehicles on deformable ground in order to create preconditions for the development of automation systems to improve the basic passability.*

**Keywords:** slipping, power and coupling characteristic, dynamics, basic passability.

**В** настоящее время актуальна проблема обеспечения опорной и профильной проходимости роботизированных транспортных средств (РТС).

Создано достаточно много различных систем автоматического управления для повышения плавности хода. Подобные системы ус-



**НАУМОВ**  
**Валерий Николаевич**  
доктор технических наук,  
профессор



**МАШКОВ**  
**Константин Юрьевич**  
кандидат технических  
наук, доцент



**ЧИЖОВ**  
**Дмитрий Александрович**  
ассистент  
кафедры «Многоцелевые  
гусеничные машины  
и мобильные роботы»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

пешно применяют в транспортной технике как на опытных, так и на серийных образцах.

Однако, если проблема профильной проходимости почти закрыта, то решений вопросов, связанных с созданием систем автоматического управления обеспечения опорной проходимости автоматических РТС, практически не существует.

Поэтому на первый план выходит задача создания системы автоматического управления системами РТС, целью которой является повышение опорной проходимости. Решение поставленной задачи следует начинать с разработки методов математического моделирования динамики транспортного средства, адекватно отражающих реальную картину взаимодействия, характерную для системы местность — машина.

### **Формализация метода математического моделирования прямолинейного движения РТС по деформируемому грунту**

Вопросам взаимодействия эластичного колесного движителя и деформируемого опорного основания посвящено достаточно много трудов как отечественных, так и зарубежных авторов. Прежде всего эти работы направлены на описание процесса взаимодействия колеса с грунтом в функции конструктивных параметров движителя и физико-механических свойств опорного основания.

Однако, когда движитель уже создан и необходимо исследовать его возможности в составе колесной машины (например, при оценке средней скорости движения на заданном маршруте) при решении задачи о рациональном распределении мощности по колесам для оценки нагруженности элементов трансмиссии целесообразно использовать характеристики тягово-сцепных свойств и потерь энергии для различных условий взаимодействия колеса с опорным основанием, полученные при экспериментальных исследованиях в грунтовом канале или на полигоне.

Характеристиками процесса прямолинейного качения колеса в различных случаях движения являются удельные потери энергии  $f_w$  (по-

тери энергии при качении на единицу пройденного колесом пути при единичной вертикальной нагрузке), удельная свободная тяга  $\varphi$  (продольная сила, приложенная к оси катящегося колеса, при единичной вертикальной нагрузке на его ось) и коэффициент буксования [1—3]:

$$S_6 = \frac{\omega_k r_{ко} - V_{xк}}{\omega_k r_k},$$

где  $\omega_k$  — угловая скорость вращения колеса;  $r_{ко}$  — радиус колеса в свободном режиме;  $r_k$  — радиус качения колеса;  $V_{xк}$  — скорость центра масс колеса в продольном направлении.

Результаты испытаний представляются в виде тягово-энергетических  $f_w = f(\varphi)$  и тягово-сцепных характеристик  $\varphi = f(S_6)$ .

Методика проведения экспериментальных исследований с целью получения представленных характеристик опирается на уравнение энергетического баланса, суть которого заключается в том, что подводимая энергия к равномерно катящемуся колесу расходуется на совершение работы продольной силой и на потери при взаимодействии с опорным основанием:

$$M_k \omega_k = P_x V_{xк} + f_w P_z V_{xк}, \quad (1)$$

Здесь  $M_k$  — крутящий момент, подводимый к колесу;  $P_x$  — продольная сила, действующая на ось колеса;  $P_z$  — вертикальная сила, действующая на ось колеса.

Тогда выражение для определения удельных энергетических потерь с учетом того, что  $\varphi = P_x / P_z$ , примет вид:

$$f_w = \frac{M_k}{P_z} \frac{\omega_k}{V_{xк}} - \frac{P_x}{P_z} = \frac{M_k}{P_z} \frac{\omega_k}{V_{xк}} - \varphi. \quad (2)$$

Величины, входящие в правую часть уравнения (1), определяются в процессе эксперимента. Экспериментальные исследования должны проводиться в разных скоростных режимах (для учета реологии опорного основания), при различном числе проходов колеса по колее и разных режимах качения (свободном, ведомом, ведущем, тормозном). Таким образом для

совокупности дорожных условий можно получить тягово-энергетические  $f_w = f(\varphi)$  и тягово-цепные  $\varphi = f(S_{\delta})$  характеристики.

Теоретический подход предполагает использование непосредственных экспериментальных характеристик качения и квазистатического взаимодействия колеса с деформируемым грунтом:

- тягово-цепных характеристик (удельной силы тяги);
- тягово-энергетических характеристик (удельных потерь энергии);
- деформационных характеристик.

Достоинство теоретического подхода, положенного в основу моделирования динамики прямолинейного движения многоосной полноприводной машины по деформируемому грунту, заключается в том, что в модели отсутствует формализация грунтового основания по какой-либо известной эмпирической теории, полное определение которой требует довольно большого набора экспериментальных данных, получаемых, как правило, по результатам штамповых испытаний [4]. Подобная формализация не всегда дает высокую сходимость результатов расчетов и натурных экспериментов.

В общем случае уравнения динамики прямолинейного движения РТС (рис. 1) выглядят следующим образом [6, 7]:

$$m_c \dot{V}_{xc} = 2 \sum_{i=1}^n P_{x_i} - (m_c g \sin(\alpha + \theta) + P_{кр});$$

$$J_{\kappa i} \dot{\omega}_{\kappa i} = M_{\kappa i} - (1 - S_{\delta i})(f_{wi} + \varphi_i) r_{\kappa o} R_{z_i}; \quad (3)$$

$$m_{\kappa i} \dot{V}_{x\kappa i} = \varphi_i R_{z_i} - P_{x_i} - m_{\kappa i} g \sin(\alpha + \theta),$$

где  $n = k = 3$  — число колес и амортизаторов по борту соответственно;  $m_c$  — масса РТС;  $m_{\kappa i}$  — масса деталей подвески, приведенная к оси  $i$ -го колеса;  $J_{\kappa i}$  — момент инерции колеса;  $i$  — номер колеса;  $\dot{\omega}_{\kappa i}$  — угловое ускорение  $i$ -го колеса;  $S_{\delta i}$  — степень буксования  $i$ -го колеса;  $f_{wi}$  — удельные потери энергии на качение  $i$ -го колеса;  $\varphi_i$  — удельная сила тяги, реализуемая на  $i$ -м колесе;  $r_{\kappa o}$  — радиус колеса в свободном режиме качения;  $R_{z_i}$  — нормальная реакция на  $i$ -м колесе;  $\dot{V}_{x\kappa i}$  — продольное ускорение центра масс  $i$ -го колеса;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\alpha$  — угол наклона профиля опорной поверхности;  $\theta$  — угол наклона корпуса относительно опорной поверхности;  $M_{\kappa i}$  — крутящий момент, реализуемый на соответствующей оси РТС;

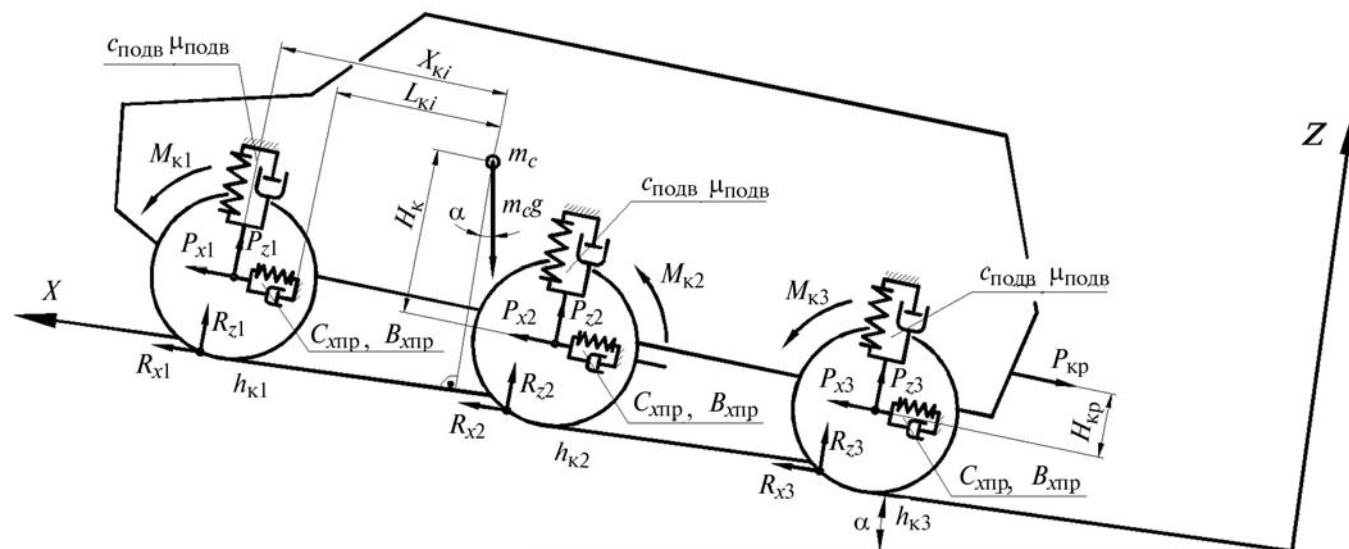


Рис. 1. Расчетная схема динамики прямолинейного движения РТС

$P_{xi}$  — сила, действующая на корпус РТС со стороны колеса по оси  $x$ ,

$$P_{xi} = (X_{ki} - L_{ki})C_{хпр} + (V_{xki} - V_{xc})B_{хпр}, \quad (4)$$

Здесь  $X_{ki}$  — расстояние от центра масс до оси колеса по оси  $x$ ;  $L_{ki}$  — расстояние от центра масс до точки крепления подвески по оси  $x$ ;  $V_{xc}$  — скорость центра масс РТС;  $C_{хпр}$  — коэффициент жесткости подвески в продольном направлении;  $V_{xki}$  — скорость центра масс колеса;  $B_{хпр}$  — коэффициент демпфирования в подвеске в продольном направлении.

Рассмотрим процесс движения РТС по деформируемому грунту более детально. Процесс взаимодействия колесной машины с неровной грунтовой поверхностью осложняется взаимным влиянием с одной стороны колебаний машины на деформацию грунта (глубину колеи), с другой стороны — деформации грунта на колебательные процессы машины.

В процессе неустановившегося движения РТС по деформируемому грунту, вследствие непостоянной силы тяги, изменения дорожных условий типа грунта возникают колебания корпуса, которые, в свою очередь вызывают перераспределение вертикальных реакций на колесах. Изменение вертикальных реакций приводит к изменению режима качения колеса и глубины колеи из-за чего происходит изменение удельной силы тяги и удельных затрат энергии.

Изменение реакций рессор (вертикальных реакций), вызванное отклонением корпуса от статического положения в процессе колебаний, определяется упругими силами  $P_{yi}$  и демпфирующими силами  $P_{di}$ , возникающими в упругодемпфирующем элементе системы поддрессорования, эластичной шине и грунте.

При движении многоосной колесной машины по деформируемому грунту происходит образование колеи, ширина которой зависит от количества проходов колеса и машины, от вертикальной нагрузки на колесо, режима качения (степени буксования) и времени взаимодействия с грунтом (скорости движения).

Следует отметить, что с увеличением скорости движения машины глубина колеи уменьшается, это обусловлено наличием реологиче-

ских, упругих и демпфирующих свойств грунтового основания.

### Дифференциальные уравнения продольно-угловых, вертикальных колебаний корпуса машины и вертикальных колебаний колес

Вертикальное ускорение  $\ddot{z}_{ki}$  оси  $i$ -го колеса определяется уравнением [5]:

$$\ddot{z}_{ki} m_{ki} = P_{ши} - P_{подви} - m_{ki} g, \quad (5)$$

где  $P_{ши}$  — усилие в шине  $i$ -го колеса;  $P_{подви}$  — усилие в подвеске  $i$ -го колеса,

Вертикальное ускорение центра масс корпуса  $\ddot{z}_c$  определяется уравнением

$$m_c \ddot{z}_c = 2 \sum_{i=1}^n P_{подви} - m_c g. \quad (6)$$

Угловое ускорение корпуса  $\ddot{\theta}$  [5] определяется уравнением

$$J_y \ddot{\theta} = 2 \sum_{i=1}^n P_{подви} X_{ki} + \left( m_c \dot{V}_{xc} H_c + P_{кр} H_{кр} + \sum_{i=1}^n M_{ki} \right). \quad (7)$$

Здесь  $J_y$  — момент инерции корпуса относительно поперечной оси, проходящей через центр масс корпуса;  $H_c$  — высота центра масс;  $H_{кр}$  — высота приложения силы тяги на крюке  $P_{кр}$ ;  $M_{ki}$  — момент на  $i$ -м колесе.

Следует отметить, что слагаемое  $\left( m_c \dot{V}_{xc} H_c + P_{кр} H_{кр} + \sum_{i=1}^n M_{ki} \right)$  является источником возмущающего воздействия, вследствие которого могут возникать колебания.

Сила в подвеске колеса равна сумме сил в упругом и демпфирующем элементе, которые определяют по соответствующим характеристикам элементов системы поддрессорования в соответствии с ходом и скоростью хода колеса [5]:

$$P_{\text{подв}i} = P_{\text{д}i} + P_{\text{ш}i}; P_{\text{ш}i} = P_y(h_i); P_{\text{д}i} = P_d(\dot{h}_i), \quad (8)$$

где  $h_i$  — ход  $i$ -го колеса относительно корпуса машины;  $\dot{h}_i$  — скорость хода колеса относительно корпуса машины;  $P_{\text{д}i}$  и  $P_{\text{ш}i}$  — упругие и демпфирующие силы в подвеске  $i$ -го колеса соответственно.

В самом простом виде

$$P_{\text{ш}i} = c_{\text{подв}i} h_i; P_{\text{д}i} = \mu_{\text{подв}i} \dot{h}_i. \quad (9)$$

Здесь  $c_{\text{подв}i}$  — приведенная жесткость  $i$ -й рессоры;  $\mu_{\text{подв}i}$  — приведенный коэффициент демпфирования  $i$ -й рессоры.

Ход колеса относительно корпуса машины:

$$\begin{aligned} h_i &= -z_c - X_{\text{к}i} \theta + z_{\text{к}i} - z_{\text{ст.к}i}; \\ \dot{h}_i &= -\dot{z}_c - \dot{\theta} X_{\text{к}i} - \dot{X}_{\text{к}i} \theta + \dot{z}_{\text{к}i}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $z_{\text{ст.к}i}$  — расстояние от центра масс до оси колеса при нулевом ходе подвески.

Силы в шинах колес, определяемые по величине и скорости деформации бандажа катка, включают в себя упругую и демпфирующую составляющую:

$$\begin{aligned} P_{\text{ш}i} &= P_{\text{ш}i} + P_{\text{шд}i}; P_{\text{ш}i} = P_y(\delta r_{\text{к}i}); \\ P_{\text{шд}i} &= P_d(\delta \dot{r}_{\text{к}i}). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\delta r_{\text{к}i}$  — деформация шины  $i$ -го колеса,

$$\begin{aligned} \delta r_{\text{к}i} &= r_{\text{к}0} - z_{\text{к}i} + z_{\text{гр}}(x); \\ \delta \dot{r}_{\text{к}i} &= -\dot{z}_{\text{к}i} + \frac{dz_{\text{гр}}(x)}{dx} V_{\text{хк}i}. \end{aligned} \quad (12)$$

где  $z_{\text{гр}}(x)$  — координата грунта под колесом;  $\frac{dz_{\text{гр}}(x)}{dx}$  — тангенс угла наклона профиля трассы относительно горизонтали;  $V_{\text{хк}i}$  — горизонтальная скорость движения  $i$ -го колеса.

В самом простом виде

$$P_{\text{ш}i} = c_{\text{ш}i} \delta r_{\text{к}i}; P_{\text{шд}i} = \mu_{\text{ш}i} \delta \dot{r}_{\text{к}i}, \quad (13)$$

При отрыве колеса от грунта

$$P_{\text{шд}i} = P_{\text{ш}i} = 0, \quad (14)$$

Вертикальная реакция в пятне контакта колеса с опорной поверхностью

$$R_{zj} = (P_{\text{ш}i} + P_{\text{шд}i}) \cos(\alpha). \quad (15)$$

Таким образом, с учетом всего сказанного выше (3)–(15), система дифференциальных уравнений описывающих динамику продольного движения машины выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} m_c \dot{V}_{\text{хс}} &= 2 \sum_{i=1}^n P_{\text{ш}i} - (m_c g \sin(\alpha + \theta) + P_{\text{кр}}); \\ J_{\text{к}i} \dot{\omega}_{\text{к}i} &= M_{\text{к}i} - (1 - S_{\delta i})(f_{\text{ш}i} + \varphi_i) r_{\text{к}0} R_{zj}; \\ m_{\text{к}i} \dot{V}_{\text{хк}i} &= \varphi_i R_{zj} - P_{\text{ш}i} - m_{\text{к}i} g \sin(\alpha + \theta); \\ \ddot{z}_{\text{к}i} m_{\text{к}i} &= (c_{\text{ш}i} \delta r_{\text{к}i} + \mu_{\text{ш}i} \delta \dot{r}_{\text{к}i}) - \\ &\quad - (c_{\text{подв}i} h_i + \mu_{\text{подв}i} \dot{h}_i) - m_{\text{к}i} g; \\ m_c \ddot{z}_c &= 2 \sum_{i=1}^n c_{\text{подв}i} h_i + 2 \sum_{i=1}^k \mu_{\text{подв}i} \dot{h}_i - m_c g; \\ J_y \ddot{\theta} &= 2 \sum_{i=1}^n c_{\text{подв}i} h_i X_{\text{к}i} + \sum_{i=1}^k \mu_{\text{подв}i} \dot{h}_i X_{\text{к}i} + \\ &\quad + \left( m_c \dot{V}_{\text{хс}} H_c + P_{\text{кр}} H_{\text{кр}} + \sum_{i=1}^n M_{\text{к}i} \right); \\ \delta r_{\text{к}i} &= r_{\text{к}0} - z_{\text{к}i} + z_{\text{гр}}(x); \\ \delta \dot{r}_{\text{к}i} &= -\dot{z}_{\text{к}i} + \frac{dz_{\text{гр}}(x)}{dx} V_{\text{хк}i}; \\ h_i &= -z_c - X_{\text{к}i} \theta + z_{\text{к}i} - z_{\text{смк}i}; \\ \dot{h}_i &= -\dot{z}_c - \dot{\theta} X_{\text{к}i} - \dot{X}_{\text{к}i} \theta + \dot{z}_{\text{к}i}; \\ R_{zj} &= (P_{\text{ш}i} + P_{\text{шд}i}) \cos(\alpha + \theta); \\ P_{\xi} &= (X_{\text{к}i} - L_{\text{к}i}) C_{\text{хпр}} + (V_{\text{хк}i} - V_{\text{хс}}) B_{\text{хпр}}; \\ P_{z_i} &= (P_{\text{подв}i} + P_{\text{подвд}i}) \cos(\alpha + \theta). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку в уравнениях системы имеются перекрестные связи, следовательно, необходимо рассматривать только их совместное решение.

Следует отметить, что в предлагаемой математической модели отсутствует модель привода колес, т. е. необходимо задаться некоторыми связями моментов и оборотов на колесах, тем самым смоделировать трансмиссию. Это обстоятельство позволяет расширить возможности применения данной модели.



## Характеристики взаимодействия колесного движителя с деформируемой опорной поверхностью

Как известно, движение РТС высокой проходимости по несвязным грунтам характеризуется большими затратами энергии, обусловленными значительным буксованием ведущих колес. Такое буксование, связанное с экскавацией грунта и бульдозерным эффектом, приводит к значительным энергетическим затратам. При этом, как известно из многочисленных работ и, в частности, из работ [1–3], энергетические потери значительно возрастают с увеличением коэффициента буксования, а коэффициент свободной тяги при этом растет незначительно и имеет определенное предельное значение, как показано на рис. 2.

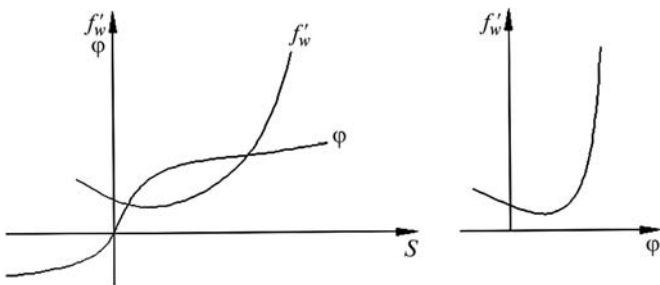


Рис. 2. Зависимости  $f_w = f_w(S)$ ,  $\varphi = \varphi(S)$  и  $f_w = f_w(\varphi)$

На рисунке 2 видно, что движение возможно только с определенным ограниченным значением тяги. С ростом буксования тяга перестает увеличиваться, и вся энергия двигателя тратится на преодоление увеличивающейся силы сопротивления движению.

### Заключение

Полученная математическая модель отражает совместную динамику корпуса машины, ходовой части, включая систему поддрессоривания и деформируемую шину. В изложенной выше методике математического моделирования динамики прямолинейного движения колесной многоосной машины по деформируемому грунту учтено колеобразование, цикличность нагружения грунта колесом (многопроходность), радиальная деформация, жесткость и демпфирование шин, колебательные процессы, характерные для неустановившихся режимов движе-

ния, влияние системы поддрессоривания, неподдрессоренных масс и продольной податливости направляющих элементов подвески.

На основании сказанного можно заключить, что одной из задач по обеспечению опорной проходимости колесного транспортного средства является разработка системы управления подводимой мощностью к ведущим колесам с целью реализации потенциальных возможностей движителя.

### Выводы

1. Суть системы управления, направленной на повышение опорной проходимости, заключается в том, чтобы ограничить потери энергии, возникающие при буксовании.

2. Практическая реализация состоит в регулировании степени буксования и момента, подводимого к колесам. Регулирование степени буксования на практике трудно реализовать, так как буксование это кинематический параметр, получаемый как следствие приложения момента к колесу, находящемуся в данных внешних условиях.

3. Реально работоспособной системой управления является управление раздачей моментов по колесам.

### Литература

1. Наумов В.Н. Развитие теории взаимодействия движителя с грунтом и ее реализация при повышении уровня проходимости транспортных роботов: Дис. ... д-ра. техн. наук: 05.05.03. М., 1993. 410 с.
2. Рождественский Ю.Л. Анализ и прогнозирование тяговых качеств колесных движителей планетоходов: Дис. ... канд. техн. наук: 05.05.03. М., 1982. 260 с.
3. Машков К.Ю. Метод оценки тягово-сцепных качеств специального транспортного средства в режиме бортового поворота на стадии проектирования: Дис. ... канд. техн. наук: 05.05.03. М., 1991. 165 с.
4. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин: М.: Машиностроение, 1990. 352 с.
5. Дмитриев А.А., Чобиток В.А., Тельминов А.В. Теория и расчет нелинейных систем поддрессоривания гусеничных машин. М.: Машиностроение, 1976. 207 с.
6. Котиев Г.О., Горелов В.А. Моделирование прямолинейного движения полноприводной колесной машины по несвязным грунтам // Труды НАМИ. Автомобили и двигатели. Сб. науч. тр. Вып. 241. М.: изд. ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ». 2009. С. 25–39.
7. Серебрянный И.В., Котиев Г.О. Повышение проходимости автомобиля за счет рационального распределения потоков мощности по колесам // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2008. Специальный выпуск. С. 193–201.

Статья поступила в редакцию 12.12.2011