

Машиностроение и машиноведение

УДК 621.833

doi: 10.18698/0536-1044-2023-7-3-11

Математическая модель волновой зубчатой передачи с генератором волн внешнего деформирования

Г.А. Тимофеев, И.Е. Люминарский, С.Е. Люминарский

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Mathematical model of a wave gear with the external deformation waves generator

G.A. Timofeev, I.E. Lyuminarsky, S.E. Lyuminarsky

Bauman Moscow State Technical University

Рассмотрена пространственная математическая модель волновой зубчатой передачи с кольцевым генератором волн внешнего деформирования. Расчетная методика основана на определении упругого взаимодействия гибкого колеса, жесткого колеса и генератора волн. Численными исследованиями подтверждена адекватность предложенной математической модели. Проведены теоретические исследования влияния натяга в зубчатом зацеплении и начального зазора между гибким колесом и деформирующими шайбами на силы, действующие на подшипники генератора волн. Показано, что уменьшение указанного зазора приводит к росту нагрузок на подшипники. Расчетным путем получены характеристики крутильной жесткости волновой зубчатой передачи с генератором волн внешнего деформирования при различных значениях натяга в зубчатом зацеплении и зазора.

Ключевые слова: волновая зубчатая передача, гибкое колесо, жесткое колесо, кольцевой генератор волн, крутильная жесткость, кинематическая точность

The paper considers a spatial mathematical model of a wave gear with the annular generator of the external deformation waves. Calculation method was based on determination of the elastic interaction between flexible wheel, rigid wheel and wave generator. Numerical studies confirmed the adequacy of the proposed mathematical model. Theoretical studies of the influence of preload in the gearing and initial clearance between the flexible wheel and the deforming washers on the forces acting on the wave generator bearings were conducted. It is shown that a decrease in the specified clearance leads to an increase in loads on the bearings. By calculation, torsional rigidity characteristics of the wave gear with an external deformation generator were obtained for various interference values in the gearing and the clearance.

Keywords: wave gear, flexible wheel, rigid wheel, ring wave generator, torsional rigidity, kinematic accuracy

В последние десятилетия резко повысились требования к надежности, долговечности, точности, жесткости приводов машин и станков, промышленных роботов и систем автоматического управления. Появилось новое направление, связанное с созданием прецизионных машин и станков с мехатронными узлами систем управления, в основу которых положены высокоточные механические передачи.

Самыми перспективными и удовлетворяющими многим перечисленным требованиям являются волновые зубчатые передачи (ВЗП). Электромеханический привод на основе ВЗП позволяет получать высокие показатели по кинематической точности, крутильной жесткости, нагрузочной способности, металлоемкости, габаритным размерам и массе.

Конструктивно-компоновочные возможности ВЗП с генератором волн (ГВ) внешнего деформирования, созданных на базе сдвоенных механизмов параллельных кривошипов, наиболее полно удовлетворяют требованиям, предъявляемым к передаточным механизмам систем автоматического управления и антенных приводов.

Методы расчета силового взаимодействия элементов и оценки основных качественных показателей ВЗП с кольцевыми ГВ внешнего деформирования в технической литературе практически отсутствуют. Следовательно, исследования, направленные на создание математических моделей методом расчета и проектирования таких передач для специальных приводов систем автоматического управления являются актуальными.

Разработка математических моделей ВЗП позволяет на этапе проектирования определять ее параметры, обеспечивающие качественную работу электроприводов. При разработке таких моделей необходимо учитывать пространственный характер деформации элементов ВЗП. Сложность разработки пространственных математических моделей заключается в расчете упругого взаимодействия гибкого (ГК) и жесткого (ЖК) колес с большим количеством мелких зубьев (около 200) и неизвестной зоной контакта.

Постановка задачи. Исследованию ВЗП с ГВ внутреннего деформирования посвящены многие труды, в частности [1–8]. В статьях [7, 8] предложена математическая модель таких ВЗП, учитывающая пространственный характер

упругого взаимодействия ее элементов и позволяющая достаточно точно оценивать различные характеристики.

Исследованию ВЗП с ГВ внешнего деформирования посвящены работы [9–12], где приведены результаты экспериментального определения крутильной жесткости и кинематической погрешности. Однако до настоящего времени не разработана математическая модель таких передач, учитывающая пространственное упругое взаимодействие элементов. Использование пространственной модели позволит на этапе проектирования достаточно точно оценивать работу ВЗП с ГВ внешнего деформирования.

Цель исследования — разработка математической модели ВЗП с ГВ внешнего деформирования, учитывающая пространственное упругое взаимодействие элементов передачи, и теоретическое исследование крутильной жесткости ВЗП на основе этой модели.

Математическая модель. Объектом исследования являлась ВЗП с ГВ внешнего деформирования с неподвижным ГК [9, 10, 13], конструктивная схема которой приведена на рис. 1. ГК 1 с внутренними зубьями деформируется внешним образом деформирующими шайбами (ДШ) 3 и 4, установленными на кривошипных валиках 6.

ГК, имеющее форму стакана, соединено с корпусом тонкостенной диафрагмой. ЖК 2 с внешними зубьями изготовлено совместно с выходным валом 5, имеющим внутреннюю полость. Кольцевые ДШ установлены на трех кривошипных валиках, один (а иногда все три) из которых является ведущим звеном.

Кривошипные валики связаны с корпусом подшипниками качения. Шайбы, вращаясь с эксцентриситетом относительно оси ЖК,

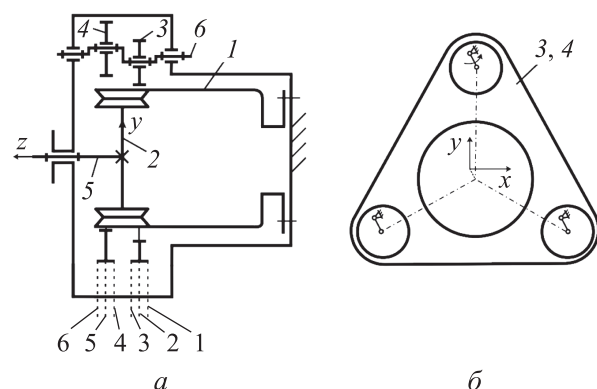


Рис. 1. Схемы ВЗП с ГВ внешнего деформирования (а) и ДШ (б)

деформируют ГК. Для выполнения указанного движения использован сдвоенный механизм параллельных кривошипов.

В предлагаемой математической модели учтены упругие деформации ГК, ЖК и подшипников, на которых установлены ДШ.

Для расчета упругого взаимодействия элементов ВЗП применена методика, использованная в статьях [7, 8]. Непрерывный контакт между поверхностями заменен контактом в дискретно выбранных точках возможного контакта (узлах взаимодействия). Взаимодействующими являются рабочие и нерабочие боковые поверхности обоих зубчатых колес, наружная поверхность ГК и внутренние цилиндрические поверхности ДШ.

Точки возможного контакта боковых поверхностей зубьев расположены в шести расчетных поперечных сечениях ГК 1–6 (см. рис. 1). На каждом зубе в одном расчетном сечении заданы две точки: одна на рабочей поверхности, другая — на нерабочей (рис. 2). Положение указанных точек по высоте зуба определяют расчетным путем.

Узловые силы в точках контакта по рабочей поверхности обозначены через $P_i^{(1)}$, по нерабочей — $P_i^{(2)}$. Здесь i — номер точки, $i = 1, \dots, N_1$, где $N_1 = 6z_f$ (z_f — число зубьев ГК).

Точки возможного контакта наружной поверхности ГК и внутренней поверхности ДШ расположены в трех расчетных сечениях: ДШ 3 — в сечениях 1–3, ДШ 4 — в сечениях 4–6 (см. рис. 2). Узловые силы в точках контакта с ДШ 3 обозначены через $P_k^{(3)}$, с ДШ 4 — $P_k^{(4)}$. Здесь k — номер точки, $k = 1, \dots, N_2$, где $N_2 = 3z_f$.

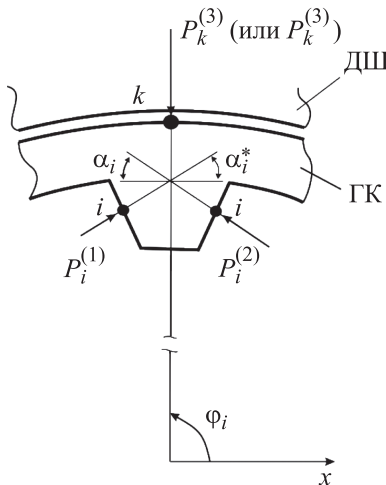


Рис. 2. Схема сил, действующих на зуб ГК

Векторы $\mathbf{P}^{(1)} = (P_1^{(1)} \dots P_{N_1}^{(1)})$ и $\mathbf{P}^{(2)} = (P_1^{(2)} \dots P_{N_1}^{(2)})$ являются векторами сил поверхностного взаимодействия зубьев по рабочей и нерабочей поверхностям, векторы $\mathbf{P}^{(3)} = (P_1^{(3)} \dots P_{N_2}^{(3)})$ и $\mathbf{P}^{(4)} = (P_1^{(4)} \dots P_{N_2}^{(4)})$ — векторами поверхностных сил, действующих на ГК со стороны ДШ 3 и 4 (см. рис. 1).

Аналогично обозначены векторы зазоров в точках возможного контакта: $\boldsymbol{\delta}^{(1)} = (\delta_1^{(1)} \dots \delta_{N_1}^{(1)})$ и $\boldsymbol{\delta}^{(2)} = (\delta_1^{(2)} \dots \delta_{N_1}^{(2)})$ — векторы зазоров между рабочими и нерабочими поверхностями зубьев; $\boldsymbol{\delta}^{(3)} = (\delta_1^{(3)} \dots \delta_{N_2}^{(3)})$ и $\boldsymbol{\delta}^{(4)} = (\delta_1^{(4)} \dots \delta_{N_2}^{(4)})$ — векторы зазоров между наружной поверхностью ГК и внутренними поверхностями ДШ 3 и 4.

При определении зазоров в точках возможного контакта учтены не только упругие деформации элементов ВЗП, но и их смещение как твердых тел. Вектор смещения ЖК содержит три элемента $\mathbf{a}^{(2)} = (\Delta x^{(2)}, \Delta y^{(2)}, \Delta \varphi^{(2)})^T$ — поступательные смещения вдоль осей x , y и поворот вокруг оси z .

Вектор смещения ЖК определяют из трех уравнений равновесия для плоской системы сил

$$\mathbf{G}^{(1)}\mathbf{P}^{(1)} - \mathbf{G}^{(2)}\mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{C}^{(2)}\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)},$$

Здесь $\mathbf{G}^{(1)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ — матрицы податливости;

$$\mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_\varphi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^{(2)} = [0 \quad 0 \quad -M_b]^T,$$

где k_x и k_φ — изгибная и крутильная жесткость вала ЖК; M_b — момент сопротивления, действующий на вал ЖК.

Элементы матриц $\mathbf{G}^{(1)}$ и $\mathbf{G}^{(2)}$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} G_{1i}^{(1)} &= \sin(\varphi_i + \alpha_i); & G_{2i}^{(1)} &= -\cos(\varphi_i + \alpha_i); \\ G_{3i}^{(1)} &= -R_{b2}; & G_{1i}^{(2)} &= -\sin(\varphi_i - \alpha_i^*); \\ G_{2i}^{(2)} &= \cos(\varphi_i - \alpha_i^*); & G_{3i}^{(2)} &= R_{b2}; \quad i = 1, \dots, N_1, \end{aligned}$$

где φ_i — угловая координата зуба ЖК, на котором расположена i -я точка возможного контакта; α_i и α_i^* — углы профиля эвольвенты в точке контакта на рабочей и нерабочей поверхностях; R_{b2} — радиус основной окружности ЖК.

Векторы смещения ДШ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(3)} &= (\Delta x_o^{(3)}, \Delta y_o^{(3)}, \Delta \varphi^{(3)})^T; \\ \mathbf{a}^{(4)} &= (\Delta x_o^{(4)}, \Delta y_o^{(4)}, \Delta \varphi^{(4)})^T. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta x_o^{(3)}$, $\Delta y_o^{(3)}$ и $\Delta x_o^{(4)}$, $\Delta y_o^{(4)}$ — поступательные смещения ДШ 3 и 4 вдоль осей x и y соот-

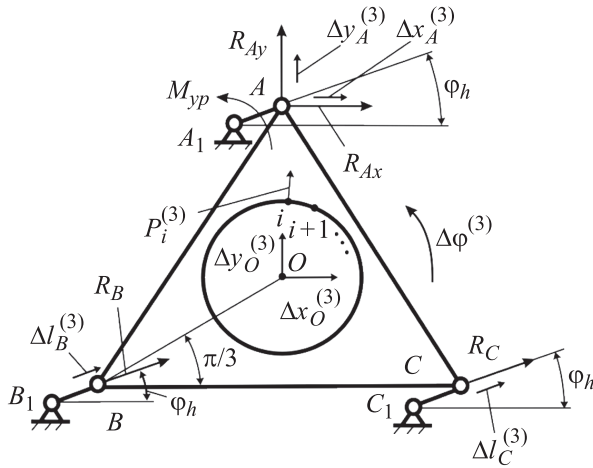


Рис. 3. Расчетная схема для деформирующей шайбы ($l_{AB} = l_{AC} = l_{BC} = l$)

ветственно; $\Delta\varphi^{(3)}$ и $\Delta\varphi^{(4)}$ — углы поворота этих ДШ вокруг их центров (точки O) в плоскости xOy (рис. 3).

При определении векторов смещений шайб $\mathbf{a}^{(3)}$ и $\mathbf{a}^{(4)}$ учтены упругие радиальные деформации подшипников, на которых они установлены. Радиальные перемещения опор подшипников определяются выражением [13]

$$\Delta l = b \left(\frac{4,37}{z_{ш}} \right)^{2/3} R^{2/3} = \frac{R}{k(R)}, \quad (1)$$

где b — коэффициент, значения которого приведены в работе [14]; $z_{ш}$ — число тел качения; R — радиальная сила, действующая на подшипник; $k(R)$ — коэффициент жесткости опоры ДШ, зависящий от реакций.

Уравновешивающий момент M_{yp} , действующий на ведущий кривошипный валик, можно определить через реакции R_{Ax} и R_{Ay} .

Коэффициент жесткости опоры шайб выражают из формулы (1) следующим образом:

$$k(R) = \frac{1}{b \left(\frac{4,37}{z_{ш}} \right)^{2/3} R^{-1/3}}. \quad (2)$$

Векторы смещений шайб как твердых тел определяют из уравнений равновесия, в которых реакции выражены через смещения, указанные на рис. 3:

$$\begin{aligned} -\sum P_{ix}^{(m)} + R_{Ax}^{(m)} + R_B^{(m)} \cos \varphi_h + R_C^{(m)} \cos \varphi_h &= 0; \\ -\sum P_{iy}^{(m)} + R_{Ay}^{(m)} + R_B^{(m)} \sin \varphi_h + R_C^{(m)} \sin \varphi_h &= 0; \\ -R_{Ax}^{(m)} h - R_B^{(m)} h \sin(\varphi_h - \pi/6) + \\ + R_C^{(m)} h \sin(\varphi_h + \pi/6) &= 0, \end{aligned}$$

где $P_{ix}^{(m)}$ и $P_{iy}^{(m)}$ — проекции сил, действующих на ГК со стороны ДШ, $m = 3, 4$; $R_{Ax}^{(m)}$, $R_B^{(m)}$,

$R_C^{(m)}$, $R_{Ay}^{(m)}$ — реакции в опорах m -й ДШ; $h = l_{OA} = l_{OB} = l_{OC} = l/\sqrt{3}$; φ_h — угол поворота ГВ.

Реакции в опорах m -й ДШ определяются как

$$\begin{aligned} R_{Ax}^{(m)} &= k_A^{(m)} \Delta x_A^{(m)}; \quad R_{Ay}^{(m)} = -k_A^{(m)} \Delta y_A^{(m)}; \\ R_B^{(m)} &= -k_B^{(m)} \Delta l_B^{(m)}; \quad R_C^{(m)} = -k_C^{(m)} \Delta l_C^{(m)}, \end{aligned}$$

где $k_A^{(m)}$, $k_B^{(m)}$, $k_C^{(m)}$ — коэффициенты жесткости опор, вычисляемые по формуле (2) итерационным способом; $\Delta x_A^{(m)}$, $\Delta y_A^{(m)}$, $\Delta l_B^{(m)}$, $\Delta l_C^{(m)}$ — смещения.

Выражая смещения $\Delta x_A^{(m)}$, $\Delta y_A^{(m)}$, $\Delta l_B^{(m)}$, $\Delta l_C^{(m)}$ через вектор смещения ДШ $\mathbf{a}^{(m)}$, получают уравнения равновесия в виде

$$\mathbf{G}^{(m)} \mathbf{P}^{(m)} + \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{a}^{(m)} = 0, \quad m = 3, 4,$$

где $\mathbf{A}^{(m)}$ — матрицы, связывающие векторы смещений $\mathbf{a}^{(m)}$ с реакциями в опорах ДШ.

Элементы матриц $\mathbf{G}^{(m)}$ и $\mathbf{A}^{(m)}$ определяются следующими выражениями:

$$G_{1i}^{(m)} = \cos \varphi_i; \quad G_{2i}^{(m)} = \sin \varphi_i; \quad G_{3i}^{(m)} = 0, \quad i = 1, \dots, N_2;$$

$$\begin{aligned} A_{11}^{(m)} &= [k_B^{(m)} \cos(\varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \cos(\varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})] \cos \varphi_h + k_A^{(m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12}^{(m)} &= [k_B^{(m)} \cos(\varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \cos(\varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})] \sin \varphi_h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13}^{(m)} &= h [k_B^{(m)} \sin(\pi/6 - \varphi_h) \cos(\varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \sin(\pi/6 + \varphi_h) \cos(\varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})] - h k_A^{(m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21}^{(m)} &= [k_B^{(m)} \sin(\varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \sin(\varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})] \cos \varphi_h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22}^{(m)} &= [k_B^{(m)} \sin(\varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \sin(\varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})] \sin \varphi_h + k_A^{(m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{23}^{(m)} &= h^2 [k_B^{(m)} \sin(\pi/6 - \varphi_h) \sin(\varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \sin(\pi/6 + \varphi_h) \sin(\varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)}) + k_A^{(m)}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31}^{(m)} &= h \cos \varphi_h [k_B^{(m)} \sin(\pi/6 - \varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \sin(\pi/6 + \varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})] - k_A^{(m)} h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{32}^{(m)} &= h \sin \varphi_h [k_B^{(m)} \sin(\pi/6 - \varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + k_C^{(m)} \sin(\pi/6 + \varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{33}^{(m)} &= h^2 k_B^{(m)} \sin(\pi/6 - \varphi_h) \sin(\pi/6 - \varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}) + \\ + h^2 k_C^{(m)} \sin(\pi/6 + \varphi_h) \sin(\pi/6 + \varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)}) + h^2 k_A^{(m)}. \end{aligned}$$

Здесь $a_w = |AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$ — межосевое расстояние;

$$\varphi_{hB}^{(m)} = \varphi_h + \Delta\varphi_{hB}^{(m)}; \quad \varphi_{hC}^{(m)} = \varphi_h + \Delta\varphi_{hC}^{(m)};$$

$$\Delta\varphi_{hB}^{(m)} = -\frac{\sin\varphi_h}{a_w}\Delta x_O^{(m)} + \frac{\cos\varphi_h}{a_w}\Delta y_O^{(m)} - h\frac{\cos(\varphi_h - \pi/6)}{a_w}\Delta\varphi^{(m)};$$

$$\Delta\varphi_{hC}^{(m)} = -\frac{\sin\varphi_h}{a_w}\Delta x_O^{(m)} + \frac{\cos\varphi_h}{a_w}\Delta y_O^{(m)} + h\frac{\cos(\varphi_h + \pi/6)}{a_w}\Delta\varphi^{(m)};$$

где $\Delta\varphi_{hB}^{(m)}$ и $\Delta\varphi_{hC}^{(m)}$ — приращения углов поворота кривошипов B_1B и C_1C от смещения ДШ как жестких тел.

Система разрешающих уравнений упругого взаимодействия элементов передачи в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(11)} & \mathbf{D}^{(12)} & \mathbf{D}^{(13)} & \mathbf{D}^{(14)} & \mathbf{G}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^{(21)} & \mathbf{D}^{(22)} & \mathbf{D}^{(23)} & \mathbf{D}^{(24)} & \mathbf{G}^{(2)} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^{(31)} & \mathbf{D}^{(32)} & \mathbf{D}^{(33)} & \mathbf{D}^{(34)} & 0 & \mathbf{G}^{(3)} & 0 \\ \mathbf{D}^{(41)} & \mathbf{D}^{(42)} & \mathbf{D}^{(43)} & \mathbf{D}^{(44)} & 0 & 0 & \mathbf{G}^{(4)} \\ \mathbf{G}^{(1)} & \mathbf{G}^{(2)} & 0 & 0 & \mathbf{C}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{G}^{(3)} & 0 & 0 & -\mathbf{A}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{G}^{(4)} & 0 & 0 & -\mathbf{A}^{(4)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(1)} \\ \mathbf{P}^{(2)} \\ \mathbf{P}^{(3)} \\ \mathbf{P}^{(4)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{a}^{(3)} \\ \mathbf{a}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0^{(1)} - \delta_0^{(1)} \\ \delta_0^{(2)} - \delta_0^{(2)} \\ \delta_0^{(3)} - \delta_0^{(3)} \\ \delta_0^{(4)} - \delta_0^{(4)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$\delta_j \geq 0, j = 1, \dots, N;$$

$$P_j \geq 0, j = 1, \dots, N;$$

$$\delta_j P_j = 0, j = 1, \dots, N,$$

где $\mathbf{D}^{(11)} \dots \mathbf{D}^{(44)}$ — матрицы узловых податливостей; $\mathbf{P}^{(1)} \dots \mathbf{P}^{(4)}$ — векторы сил; $\mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{a}^{(4)}$ — векторы смещений; $\delta_0^{(1)} \dots \delta_0^{(4)}$ — векторы зазоров между взаимодействующими поверхностями в узловых точках; $\delta_0^{(1)} \dots \delta_0^{(4)}$ — векторы зазоров в недеформированном состоянии элементов ВЗП; $N = 2N_1 + 2N_2$ — количество узлов, в которых может происходить взаимодействие поверхностей.

Первые четыре строки системы (3) выражают взаимодействие поверхностей в узловых точках возможного контакта, пятая–седьмая — условия равновесия ЖК и двух деформирующихся дисков, а последние два неравенства и уравнение — односторонний характер взаимодействия поверхностей.

Начальные зазоры между недеформированным ГК и шайбами 3 и 4 ВГ вычисляются по формулам

$$\delta_{0i}^{(3)} = a_w \cos(\varphi_i - \varphi_h) + \sqrt{R_{ш}^2 - a_w^2 \sin^2(\varphi_i - \varphi_h)} - R_n;$$

$$\delta_{0i}^{(4)} = a_w \cos(\varphi_i - \varphi_h + \pi) + \sqrt{R_{ш}^2 - a_w^2 \sin^2(\varphi_i - \varphi_h + \pi)} - R_n,$$

где $R_{ш}$ — радиус внутренней поверхности шайбы; R_n — радиус наружной поверхности недеформированного ГК.

Формулы для определения начальных зазоров между зубьями $\delta_0^{(1)}$ и $\delta_0^{(2)}$ приведены в работе [7].

При определении коэффициентов матриц узловых податливостей $\mathbf{D}^{(11)}, \mathbf{D}^{(12)}, \dots, \mathbf{D}^{(44)}$ учитывают упругие деформации ГК как оболочки вращения и контактные деформации боковых поверхностей зубьев. Для расчета деформации ГК используют линейную теорию оболочек, при этом ГК заменяют ортотропной оболочкой с эквивалентными жесткостями в области зубчатого венца.

Уравнения и неравенства (3) описывают упругую систему с односторонними связями. В результате решения указанной системы определяют точки, в которых происходит контакт взаимодействующих поверхностей, а также реакции и зазоры в точках возможного контакта. Для решения уравнений (3) используют метод введения восстанавливающих сил [8].

Коэффициенты матриц податливости $\mathbf{D}^{(11)} \dots \mathbf{D}^{(44)}$ и матриц $\mathbf{G}^{(1)} \dots \mathbf{G}^{(4)}$ зависят от результатов решения системы (3), поэтому расчеты проводят с помощью итерационного уточнения решения при многократном решении системы (3).

Вычисления выполняют следующим образом. Из системы (3) определяют значения векторов сил $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \mathbf{P}^{(3)}, \mathbf{P}^{(4)}$ и смещений $\mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{a}^{(4)}$. По полученным результатам уточняют радиусы контакта зубьев и жесткости опор $k_B^{(m)}, k_C^{(m)}, k_A^{(m)}$. Пересчитывают коэффициенты матриц податливости $\mathbf{D}^{(11)} \dots \mathbf{D}^{(44)}$, матриц $\mathbf{G}^{(1)} \dots \mathbf{G}^{(4)}$ и вектора начальных зазоров между зубьями δ_0 . Из системы уравнений (3) определяют уточненные значения векторов сил и смещений.

Результаты исследования. Для численного исследования выбрана ВЗП с ГВ внешнего дефор-

мирования (см. рис. 1), имеющая следующие параметры: числа зубьев ГК $z_r = 362$ и ЖК $z_{ж} = 360$; модуль зацепления $m = 0,5$ мм; коэффициенты смещения ГК $x_r = 3,17$ и ЖК $x_{ж} = 3,12$; толщина оболочки ГК $h_c = 2,25$ мм; толщина обода ГК под зубчатым венцом $h_l = 2,5$ мм; ширина зубчатого венца $b_w = 24$ мм; длина оболочки ГК $l = 150$ мм; диаметр наружной поверхности ГК $D_{ГК} = 190,28$ мм; внутренний диаметр ДШ $D_{ш} = 192,07$ мм; высота зубьев — 0,94 мм; диаметр окружности вершин ГК и ЖК — 183,40 и 183,8 мм соответственно; начальная деформация ГК $w_0 = 0,467$ мм; начальный зазор между ДШ и ГК $\Delta_0 = 1,8$ мм; межосевое расстояние $a_w = w_0 + \Delta_0/2 = 1,367$ мм. При расчете начальный зазор варьировали в интервале $\Delta_0 = 1,8...3,0$ мм, а начальную деформацию — в диапазоне $w_0 = 0,467...0,6$ мм.

Зависимости реакции в наиболее нагруженном подшипнике ГВ R^* от начального зазора между внутренними поверхностями ДШ и ГК Δ_0 приведены на рис. 4. Рассматриваемая реакция определена после сборки ГВ и ГК до установки ЖК. Начальный зазор Δ_0 равен разности внутреннего диаметра ДШ и наружного диаметра недеформированного ГК: $\Delta_0 = D_{ш} - D_{ГК}$.

С уменьшением зазора Δ_0 реакция R^* увеличивается. Значение зазора, начиная с которого реакция резко возрастает, обозначено как Δ_0^* . Для ВЗП с начальной деформацией $w_0 = 0,467$ мм зазор $\Delta_0^* = 2,03$ мм. С ростом начальной деформации w_0 ГК зазор Δ_0^* становится больше.

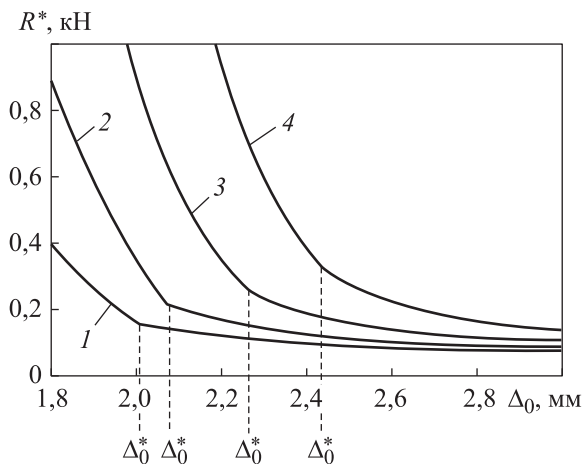


Рис. 4. Зависимости реакции в наиболее нагруженном подшипнике ГВ R^* от начального зазора между ДШ и недеформированным ГК Δ_0 при начальной деформации ГК $w_0 = 0,467$ (1), 0,500 (2), 0,550 (3) и 0,600 мм (4)

После полной сборки ВЗП в зубчатом зацеплении может образоваться натяг. Для его определения проведен расчет упругого взаимодействия ГК и ДШ без учета взаимодействия зубьев ГК и ЖК. Натяг в зубчатом зацеплении N принят равным сумме натягов по рабочей и нерабочей поверхностям зуба ЖК, расположенного на малой оси деформации ГК. Такое определение натяга N учитывает пространственную деформацию ГК после установки на него ДШ.

Чтобы увеличить натяг N , изменяли коэффициент смещения ЖК $x_{ж}$. Зависимости натяга в зубчатом зацеплении N от коэффициента смещения ЖК $x_{ж}$ при начальном зазоре $\Delta_0 = 2,2$ мм и различных значениях начальной деформации ГК w_0 приведены на рис. 5. Видно, что с ростом $x_{ж}$ и w_0 натяг в зубчатом зацеплении увеличивается.

Расчетные зависимости реакции в наиболее нагруженном подшипнике ГВ R^* от натяга в зубчатом зацеплении N при начальных деформации $w_0 = 0,55$ мм и зазоре $\Delta_0 = 2,2$ мм приведены на рис. 6. Видно, что при $N > 80$ мкм нагрузка на подшипники резко возрастает.

Поэтому при выборе коэффициентов смещения зубчатых колес необходимо ограничивать натяг в зацеплении. Например, если нагрузку на подшипники деформирующих шайб в номинальном режиме работы (при моменте нагрузки (сопротивления) $M_c = 160$ Н·м) ограничить 1,5 кН, то натяг в зубчатом зацеплении следует задавать не более 80 мкм.

Зависимости крутильной жесткости ВЗП $\varphi_{ж}$ от момента сопротивления M_c при начальной деформации $w_0 = 0,55$ мм, натяге в зубчатом зацеплении $N = 55$ мкм и начальном зазоре

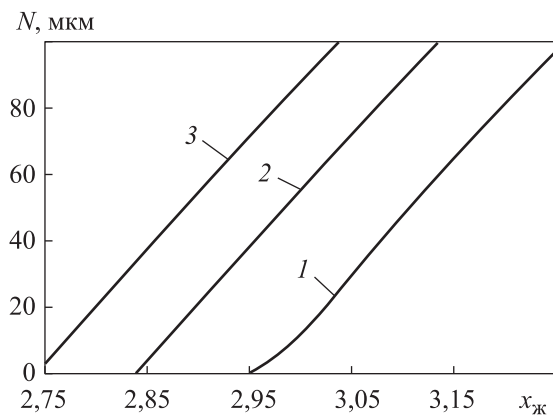


Рис. 5. Зависимости натяга в зубчатом зацеплении N от коэффициента смещения ЖК $x_{ж}$ при зазоре $\Delta_0 = 2,2$ мм и начальной деформации $w_0 = 0,50$ (1), 0,55 (2) и 0,60 мм (3)

$\Delta_0 = 2,2, 2,4$ и $2,8$ мм приведены на рис. 7. Анализ графиков показывает, что при неизменном натяге в зубчатом зацеплении N и увеличении начального зазора между ДШ и ГК Δ_0 с $2,2$ до $2,28$ мм секущая крутильная жесткость передачи снижается в 2 раза. Чтобы сохранить значение натяга N при увеличении зазора Δ_0 , изменяли коэффициент смещения ЖК.

Зависимости крутильной жесткости ВЗП от момента M_c при деформации $w_0 = 0,55$ мм, зазоре $\Delta_0 = 2,2$ мм и различных значениях натяга в зубчатом зацеплении N приведены на рис. 8. Кривая 1 получена для ВЗП, собранной без натяга с боковым зазором на малой оси генератора волн $S = 18$ мкм. Увеличение натяга в зубчатом зацеплении приводит к возрастанию крутильной жесткости более чем в 2 раза.

Кривая крутильной жесткости $\varphi_{ж}(M_c)$ на начальном участке при малом натяге в зубча-

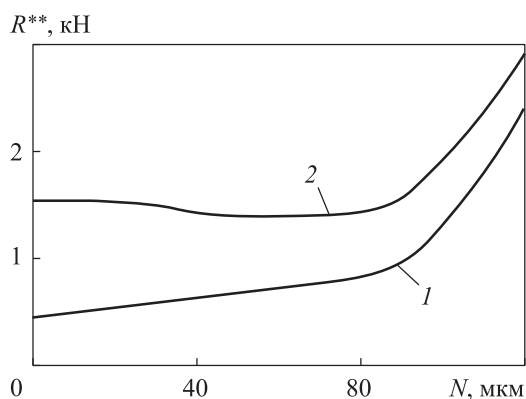


Рис. 6. Расчетные зависимости реакции в наиболее нагруженном подшипнике ГВ R^{**} от натяга в зубчатом зацеплении N при начальных деформации $w_0 = 0,55$ мм, зазоре $\Delta_0 = 2,2$ мм и моменте сопротивления $M_c = 0$ (1) и 160 Н·м (2)

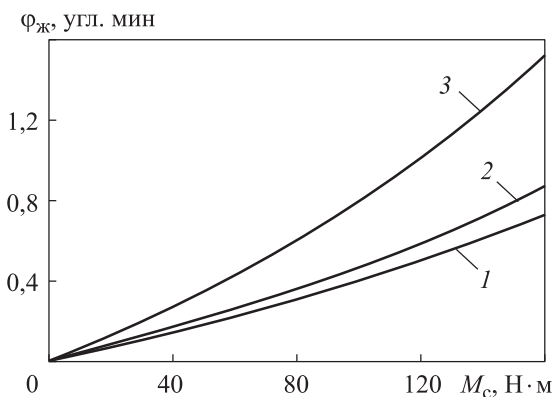


Рис. 7. Зависимости крутильной жесткости ВЗП $\varphi_{ж}$ от момента сопротивления M_c при начальной деформации $w_0 = 0,55$ мм, натяге в зубчатом зацеплении $N = 55$ мкм и начальном зазоре $\Delta_0 = 2,2$ (1), $2,4$ (2) и $2,8$ мм (3)

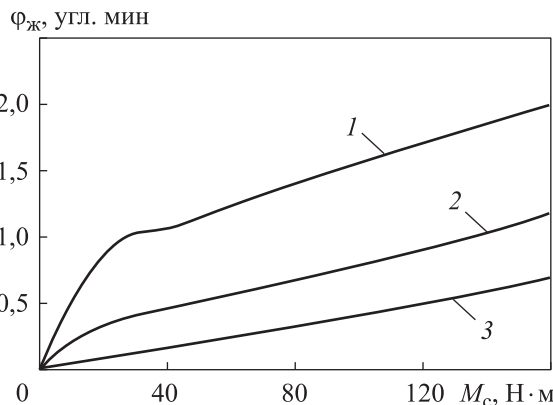


Рис. 8. Зависимости крутильной жесткости ВЗП $\varphi_{ж}$ от момента сопротивления M_c при начальных деформации $w_0 = 0,55$ мм и зазоре $\Delta_0 = 2,2$ мм: 1 — $S = 18$ мкм; 2 — $N = 20$ мкм; 3 — $N = 55$ мкм

том зацеплении N имеет выпуклость вверх (см. рис. 8, кривая 1), т. е. с ростом момента сопротивления увеличивается крутильная жесткость. Такой характер зависимости объясняется увеличением зоны контакта зубьев. При сборке ВЗП с натягом и большим начальным зазором между ДШ и ГК кривая крутильной жесткости имеет выпуклость вниз, т. е. крутильная жесткость с ростом момента сопротивления уменьшается (см. рис. 7, кривая 1).

Выводы

1. Предложена математическая модель ВЗП с ГВ внешнего деформирования, учитывающая пространственное упругое взаимодействие ГК, ГВ и ЖК.
2. Расчетным путем показано, что уменьшение зазора между ГК и ДШ приводит к увеличению секущей крутильной жесткости передачи. Снижение зазора ниже определенного значения вызывает резкое возрастание реакций в подшипниках ГВ и деформации ГК. Рост деформации ГК снижает крутильную жесткость ВЗП.
3. Увеличение натяга в зубчатом зацеплении повышает крутильную жесткость ВЗП.
4. Уменьшение зазора между ГК и ДШ и увеличение натяга в зубчатом зацеплении при проектировании ВЗП с ГВ внешнего деформирования ограничено ростом нагрузки на подшипники ГВ.
5. Применение разработанной математической модели и результатов проведенного теоретического исследования позволит на этапе проектирования назначать параметры ВЗП, обеспечивающие требуемые характеристики.

Литература

- [1] Иванов М.Н. *Волновые зубчатые передачи*. Москва, Высшая школа, 1981. 184 с.
- [2] Гинзбург Е.Г. *Волновые зубчатые передачи*. Ленинград, Машиностроение, 1969. 159 с.
- [3] Янгулов В.С. *Волновые и винтовые механизмы и передачи*. Томск, Изд-во ТПУ, 2011. 184 с.
- [4] Полетучий А.И. *Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов*. Харьков, Изд-во НАУ ХАИ, 2005. 675 с.
- [5] Ardelean F.A. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA". *Annals of the Oradea University*, 2007, vol. 6, no. 16, pp. 882–885.
- [6] Dhaouadi R., Ghorbel F.H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gear. *Int. J. Model. Simul.*, 2008, vol. 28, no. 3, pp. 329–336, doi: <https://doi.org/10.1080/02286203.2008.11442485>
- [7] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е., Люминарская Е.С. Влияние степени точности зубчатых колес на кинематическую погрешность волновой зубчатой передачи. *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*, 2022, № 4, с. 11–16.
- [8] Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Математическая модель волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. *Машиностроение и инженерное образование*, 2012, № 2, с. 45–52.
- [9] Тимофеев Г.А. *Разработка методов расчета и проектирования волновых зубчатых передач для приводов следящих систем*. Дисс. ... д-ра техн. наук. Москва, Ин-т машиноведения, 1997. 352 с.
- [10] Тимофеев Г.А., Костиков Ю.В., Фурсяк Ф.И. Волновые редукторы внешнего деформирования. *Вестник машиностроения*, 1977, № 1, с. 21.
- [11] Костиков Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Крутильная жесткость волновых зубчатых передач внешнего деформирования. *Приводы и компоненты машин*, 2013, № 1, с. 10–13.
- [12] Тимофеев Г.А., Костиков Ю.В. Расчет крутильной жесткости волновых зубчатых передач. *Вестник машиностроения*, 2016, № 9, с. 28–31.
- [13] Тарабарин В.Б., Тимофеев Г.А. *Волновая передача*. Патент СССР 541057. Заявл. 14.08.1973, опубл. 30.12.1976.
- [14] Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я. *Подшипники качения*. Москва, Машиностроение, 1975. 572 с.

References

- [1] Ivanov M.N. *Volnovye zubchatye peredachi* [Wave gear transmissions]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981. 184 p. (In Russ.).
- [2] Ginzburg E.G. *Volnovye zubchatye peredachi* [Wave gear transmissions]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1969. 159 p. (In Russ.).
- [3] Yangulov V.S. *Volnovye i vintovye mekhanizmy i peredachi* [Wave and screw mechanisms and transmissions]. Tomsk, Izd-vo TPU Publ., 2011. 184 p. (In Russ.).
- [4] Poletuchiy A.I. *Teoriya i konstruirovaniye vysokoeffektivnykh volnovykh zubchatykh mekhanizmov* [Theory and design of high-efficiency wave gear mechanisms]. Kharkov, Izd-vo NAU KhAI Publ., 2005. 675 p. (In Russ.).
- [5] Ardelean F.A. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA". *Annals of the Oradea University*, 2007, vol. 6, no. 16, pp. 882–885. (In Russ.).
- [6] Dhaouadi R., Ghorbel F.H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gear. *Int. J. Model. Simul.*, 2008, vol. 28, no. 3, pp. 329–336, doi: <https://doi.org/10.1080/02286203.2008.11442485>
- [7] Lyuminarskiy I.E., Lyuminarskiy S.E., Lyuminarskaya E.S. The influence of the degree of accuracy gears on the kinematic error of the wave gear. *Fundamentalnye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology], 2022, no. 4, pp. 11–16. (In Russ.).
- [8] Lyuminarskiy S.E., Lyuminarskiy I.E. Mathematical model of a harmonic drive with the disk wave generator. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2012, no. 2, pp. 45–52. (In Russ.).

- [9] Timofeev G.A. *Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya volnovykh zubchatykh peredach dlya privodov sledyashchikh sistem*. Diss. dok. tekhn. nauk [Development of calculation and design methods for wave gears of servo drives. Doc. tech. sci. diss.]. Moscow, In-t mashinovedeniya, 1997. 352 p. (In Russ.).
- [10] Timofeev G.A., Kostikov Yu.V., Fursyak F.I. External deformation wave reducers. *Vestnik mashinostroeniya*, 1977, no. 1, p. 21. (In Russ.).
- [11] Kostikov Yu.V., Timofeev G.A., Fursyak F.I. Torsional stiffness of external deformation wave gears. *Privody i komponenty mashin*, 2013, no. 1, pp. 10–13. (In Russ.).
- [12] Timofeev G.A., Kostikov Yu.V. Analysis of torsional stiffness of harmonic gear drives. *Vestnik mashinostroeniya*, 2016, no. 9, pp. 28–31. (In Russ.).
- [13] Tarabarin V.B., Timofeev G.A. *Volnovaya peredacha* [Wave gear]. Patent SSSR 541057. Appl. 14.08.1973, publ.30.12.1976. (In Russ.).
- [14] Beyzelman R.D., Tsyarkin B.V., Perel L.Ya. *Podshipniki kacheniya* [Rolling bearings]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 572 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.01.2023

Информация об авторах

ТИМОФЕЕВ Геннадий Алексеевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: timga@bmstu.ru).

ЛЮМИНАРСКИЙ Игорь Евгеньевич — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: lie260@mail.ru).

ЛЮМИНАРСКИЙ Станислав Евгеньевич — кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

Information about the authors

TIMOFEEV Gennady Alekseevich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Head of the Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Bauman-skaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

LYUMINARSKY Igor Evgenievich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: lie260@mail.ru).

LYUMINARSKY Stanislav Evgenievich — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Тимофеев Г.А., Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Математическая модель волновой зубчатой передачи с генератором волн внешнего деформирования. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 7, с. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2023-7-3-11

Please cite this article in English as:

Timofeev G.A., Lyuminarsky I.E., Lyuminarsky S.E. Mathematical model of a wave gear with the external deformation waves generator. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 7, pp. 3–11, doi: 10.18698/0536-1044-2023-7-3-11