

УДК 62-526

doi: 10.18698/0536-1044-2023-3-14-24

Обобщенная задача динамического уравнивания и перспективные направления ее применения

А.С. Горобцов

Волгоградский государственный технический университет

Dynamic Balance Generalized Problem and the Promising Areas of its Application

A.S. Gorobtsov

Volgograd State Technical University

Рассмотрена обобщенная задача динамического уравнивания машин и механизмов в части обеспечения заданных законов изменения реакций в выбранных связях. Использовано представление уравнений динамики механических систем в форме дифференциально-алгебраических уравнений, позволяющее получать математические модели динамики нелинейных механических систем с произвольной структурой кинематических и силовых связей. При таком подходе реакции связей определяются алгебраическими уравнениями от координат системы. Решение задачи основано на изменении выбранных реакций связей вследствие воздействия на реакции в других выделенных связях путем добавления в уравнения последних нестационарных членов. Показаны условия строгого решения задачи оптимального управления для механической системы при интегральном критерии качества, не содержащем явно функции управления. Метод ориентирован на численные модели механических систем, широко используемых в программах динамического анализа связанных систем тел. Приведены тестовые примеры для манипулятора, антропоморфного робота и управляемой подвески транспортной машины. Метод реализован в программном комплексе моделирования динамики управляемого движения связанных систем тел.

Ключевые слова: динамика машин, динамическое уравнивание, зооморфные роботы, оптимальное управление, нелинейные системы

The paper considers the generalized problem of the machines and mechanisms dynamic balance in terms of ensuring the given laws of altering reactions in the selected links. Representation of equations of the mechanical systems dynamics in the form of differential algebraic equations was used making it possible to obtain mathematical models of the nonlinear mechanical systems dynamics with the arbitrary structure of kinematic and force connections. With this approach, the constraint reactions are determined by algebraic equations from the system coordinates. The problem solution is based on changing the bonds selected reactions due to the impact on reactions in the other selected bonds by adding non-stationary terms to the selected bonds equation. Conditions for rigorous solution of the optimal control problem for a mechanical system are shown for the integral quality criterion not explicitly containing the control functions. The method is aimed at numerical models of the mechanical systems widely used in the programs for dynamic analysis of the coupled systems of bodies. Test examples are provided for manipulator, anthropomorphic robot and controlled suspension of a transport vehicle. The method

was realized in the software package for simulating the controlled motion dynamics of the coupled systems of bodies.

Keywords: machine dynamics, dynamic balance, zoomorphic robots, optimal control, non-linear systems

Теоретическое описание. Обеспечение определенных значений реакций в связях является актуальной задачей динамики машин. К этому сведена, например, классическая задача балансировки вращающихся тел [1]. Можно утверждать, что к указанной задаче в произвольной постановке сводится большое количество задач робототехники, динамики транспортных машин и др. Обобщенная задача динамического уравнивания машин и механизмов ставилась в работах Ф.М. Диментберга [2].

Цель работы — разработка метода получения заданных законов изменения реакций в выбранных связях механических систем произвольной размерности и структуры путем управления реакциями в других связях.

Сформулируем обобщенную задачу динамического уравнивания. Рассмотрим уравнения движения механической системы как связанной системы твердых тел [3, 4]

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t); \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь M — матрица инерции; \mathbf{x} — вектор координат механической системы размера n ; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ — вектор позиционных, диссипативных и внешних сил; t — время; $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ — вектор уравнений связей размера $k \leq n$.

Для численного решения используют систему уравнений (1) в следующем виде [3–6]:

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} + D^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t); \\ D\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \end{cases} \quad (2)$$

где D — матрица коэффициентов уравнений связей размера $k \times n$; \mathbf{p} — вектор множителей Лагранжа (реакций связей) размера k ; $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ — вектор правых частей вторых производных уравнений связей.

Второе уравнение системы (2) получено двукратным дифференцированием уравнений связей по времени. В механических системах множители Лагранжа имеют физический смысл реакций связей.

Систему дифференциально-алгебраических уравнений (2) широко применяют в компьютерных системах моделирования динамики связанных систем тел [6, 7]. Особенности числен-

ного интегрирования системы (2), обусловленные обеспечением устойчивости, рассмотрены в работе [8].

При численном интегрировании системы (2) на каждом шаге находят ускорения и множители Лагранжа из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} M & D^T \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Введя соответствующие обозначения, решение системы (3) можно записать как

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (4)$$

где \mathbf{A} — матрица коэффициентов; \mathbf{b} — матрица правых частей системы (3).

Поставим обобщенную задачу динамического уравнивания следующим образом [9]. Пусть в векторе реакций связей \mathbf{p} есть подмножество реакций \mathbf{p}_1 с номерами из множества K_1 , числом k_1 , значения которых должны принимать заданные величины, описываемые некоторыми функциями $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k_1$, или в матричном виде

$$\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\varphi}(t).$$

Предположим, что в векторе реакций связей \mathbf{p} имеется подмножество реакций \mathbf{p}_2 с номерами из множества K_2 , числом k_2 . Их можно варьировать изменением значений неизвестных функций $h_{2j}(t)$, $j = 1, 2, \dots, k_2$, которые назовем корректирующими слагаемыми. Множества номеров реакций K_1 и K_2 не пересекаются. Корректирующие слагаемые $h_{2j}(t)$ образуют матрицу-столбец \mathbf{h}_2 размера k_2 .

Так как реакции \mathbf{p}_2 в общем случае можно реализовывать только приводами, считаем k_2 числом приводов, а \mathbf{p}_2 — силами в приводах. С учетом выражения (4) и корректирующих слагаемых реакции приобретают вид

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} [\mathbf{b} + \mathbf{h}_2^*(t)], \quad (5)$$

где \mathbf{A}_1^{-1} — соответствующая множеству K_1 подматрица \mathbf{A}^{-1} , состоящая из строк \mathbf{A}^{-1} , номера которых принадлежат K_1 ; \mathbf{h}_2^* — матрица-

столбец размера $n+k$, в которой не равны нулю только компоненты с номерами из K_2 .

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{p}_{10} = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b}; \quad \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{h}_2^* = \mathbf{C}\mathbf{h}_2,$$

где \mathbf{C} — матрица размера $k_1 \times k_2$, содержащая только столбцы матрицы \mathbf{A}_1^{-1} с номерами из K_2 .

Тогда выражение (5) принимает вид

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_{10} + \mathbf{C}\mathbf{h}_2(t). \quad (6)$$

С учетом того, что $\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\varphi}(t)$, из выражения (6) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения $\mathbf{h}_2(t)$

$$\mathbf{C}\mathbf{h}_2(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10}. \quad (7)$$

Зная $\mathbf{h}_2(t)$, находим реакции в приводах

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{A}_2^{-1}[\mathbf{b} + \mathbf{h}_2^*(t)], \quad (8)$$

где \mathbf{A}_2^{-1} — соответствующая множеству K_2 подматрица \mathbf{A}^{-1} , состоящая из строк \mathbf{A}^{-1} , номера которых входят в K_2 .

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{p}_{20} = \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{b}; \quad \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{h}_2^* = \mathbf{V}\mathbf{h}_2,$$

где \mathbf{V} — матрица размера $k_2 \times k_2$, содержащая только столбцы матрицы \mathbf{A}_2^{-1} с номерами из K_2 .

Тогда уравнение (8) можно записать как

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{20} + \mathbf{V}\mathbf{h}_2(t). \quad (9)$$

Выражение (7) дает величины изменения правых частей уравнений связей, которые обеспечивают достижение желаемых значений реакций \mathbf{p}_1 . Так как $\mathbf{h}_2(t)$ влияют на все переменные системы (4), при интегрировании уравнений математической модели ускорения и реакции связей определяют из системы с измененной правой частью

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{b} + \mathbf{h}_2^*(t)].$$

Уравнение (7) имеет единственное решение, если $k_1 = k_2$ и матрица \mathbf{C} является невырожденной. Свойства матрицы \mathbf{C} определяются таковыми матрицы \mathbf{A} . Основной причиной сингулярности матрицы \mathbf{A} служат избыточные связи, т. е. линейно зависимые строки в матрице \mathbf{D} . Избыточные связи могут быть присущи структуре механизма или введены специально, как это имеет место в механизмах параллельной структуры.

В первом случае избыточные связи исключают путем введения дополнительных степеней свободы. Например, в трансмиссиях транспортных средств это достигается введением дифференциалов, а в строительных конструкциях — подвижных роликовых опор. Избыточные связи также можно исключить путем их перевода в податливые — подшипники скольжения в многоопорных валах.

В случае механизмов параллельной структуры с избыточными связями матрицей \mathbf{A}^{-1} может стать матрица псевдоинверсии и др. Если это не оговорено, то считается, что квадратная матрица \mathbf{A} невырожденная.

Отметим, что в отдельных случаях, заданных значений реакций можно добиться варьированием матрицы \mathbf{A} , в частности ее подматрицы \mathbf{M} . Такой прием широко применяют при балансировке вращающихся твердых тел.

Случай $k_1 = k_2$ является простейшим, больший интерес представляют случаи $k_1 \neq k_2$, поэтому рассмотрим их.

Системы с $k_1 > k_2$ принято называть неполноприводными системами, анализ управляемого движения которыми описан в работе [10]. В рамках рассматриваемого подхода получить содержательное решение для таких систем сложно.

Системы с $k_2 > k_1$ принято называть системами с избыточными приводами. Такие системы широко распространены, например, в робототехнике, и их анализ представляется актуальным. Рассмотрим методы решения линейной системы уравнений (7) для этого случая. Матрица системы \mathbf{C} размера $k_1 \times k_2$ является прямоугольной и имеет полный ранг.

Систему (8) можно привести к системе с квадратной матрицей с помощью дополнительных уравнений. Наиболее просто это можно сделать добавлением линейных уравнений, связывающих корректирующие добавки \mathbf{h}_2 , т. е. привести систему уравнений (7) к виду

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V}_1 \end{pmatrix} \mathbf{h}_2(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10} \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где \mathbf{V}_1 — невырожденная матрица произвольных коэффициентов размера $(k_2 - k_1) \times k_2$; \mathbf{b}_1 — матрица-столбец произвольных коэффициентов правых частей.

Во втором уравнении системы (10) линейно независимыми являются только $(k_2 - k_1) \times (k_1 + 1)$ членов, и матрицу \mathbf{V}_1 можно записать как

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{E} \quad \mathbf{V}_1^*),$$

где \mathbf{E} — единичная матрица размера $(k_2 - k_1) \times (k_2 - k_1)$; \mathbf{V}_1^* — матрица произвольных коэффициентов размера $(k_2 - k_1) \times k_1$.

Назовем такой способ приведения к единственному решению способом дополнительных уравнений для корректирующих добавок.

Дополнительные уравнения к системе (7) также можно сформировать путем наложения линейных связей на управляющие силы. Второе уравнение системы (10) примет вид

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{p}_2 = \mathbf{b}_1.$$

После подстановки в это выражение уравнения (9) имеем

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{B} \mathbf{h}_2(t) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{V}_1 \mathbf{p}_{20}.$$

Тогда система (10) запишется как

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{V}_1 \mathbf{B} \end{pmatrix} \mathbf{h}_2(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10} \\ \mathbf{b}_1 - \mathbf{V}_1 \mathbf{p}_{20} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Назовем систему (11) способом приведения к единственному решению дополнительными уравнениями для сил в приводах.

Еще один способ исключения неопределенности решения системы (7) — метод условного экстремума. Рассмотрим условия экстремума для выражения

$$I = \mathbf{p}_2^T \mathbf{V}_2 \mathbf{p}_2, \quad (12)$$

где \mathbf{V}_2 — диагональная матрица весовых коэффициентов.

Выражение (12) есть взвешенная сумма квадратов сил в приводах.

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума выражения (12) с учетом условий (7). В этом случае формула (12) примет вид

$$I^* = \mathbf{p}_2^T \mathbf{V}_2 \mathbf{p}_2 + [\mathbf{C} \mathbf{h}_2(t) - \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10}] \boldsymbol{\lambda}, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — матрица-столбец множителей Лагранжа размера k_1 .

Для выражения (13) справедливы условия экстремума

$$\frac{\partial I^*}{\partial h_{2i}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k_2),$$

из которых получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_2 \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{21} \\ \mathbf{b}_{22} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{B}_1 — матрица размера $k_2 \times k_2$ с элементами b_{1lm} ($l = 1, 2, \dots, k_2$; $m = 1, 2, \dots, k_2$); \mathbf{b}_{21} —

матрица-столбец размера k_2 с элементами b_{21i} ; \mathbf{b}_{22} — матрица-столбец размера k_1 ,

$$\mathbf{b}_{22} = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{p}_{10}.$$

Элементы матриц \mathbf{B}_1 и \mathbf{b}_{21} определяются выражениями

$$b_{1lm} = 2v_{2mm} \sum_{i=1}^{k_2} b_{im} b_{li};$$

$$b_{21l} = 2 \sum_{i=1}^{k_2} v_{2ii} p_{20i} b_{li},$$

где v_{2mm} , v_{2ii} — диагональные коэффициенты матрицы весовых коэффициентов \mathbf{V}_2 .

Система линейных уравнений (14), содержащая квадратную матрицу коэффициентов размера $k_1 + k_2$, позволяет получить однозначное решение. Метод, основанный на использовании (13), будем называть методом условного экстремума со связями в виде уравнений программных реакций или методом условного экстремума.

Указанный метод позволяет учитывать еще $k_2 - k_1$ уравнений связей. В качестве таких связей можно использовать линейные комбинации сил в приводах (9). Выражение (13) в этом случае запишется как

$$I^* = \mathbf{p}_2^T \mathbf{V}_2 \mathbf{p}_2 + [\mathbf{C} \mathbf{h}_2(t) - \boldsymbol{\varphi}(t) - \mathbf{p}_{10}] \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{V}_3 [\mathbf{p}_{20} + \mathbf{B} \mathbf{h}_2(t)] \boldsymbol{\lambda}_1. \quad (15)$$

Здесь \mathbf{V}_3 — матрица весовых коэффициентов размера $k_3 \times k_2$ ($k_3 \leq k_2 - k_1$); $\boldsymbol{\lambda}_1$ — соответствующий вектор множителей Лагранжа размера k_3 .

Система линейных уравнений (14) для функционала (15) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}^T & \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_2 \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{21} \\ \mathbf{b}_{22} \\ \mathbf{b}_{23} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\mathbf{B}_2 = \mathbf{V}_3 \mathbf{B}$; $\mathbf{b}_{23} = -\mathbf{V}_3 \mathbf{p}_{20}$.

Метод, основанный на применении выражения (15) будем называть методом условного экстремума со связями в виде сил в приводах. При $k_3 + k_1 = k_2$ система (16) распадается на две независимых системы, и \mathbf{h}_2 однозначно находится из второго и третьего уравнений системы (16), которые аналогичны системе (11).

Метод условного экстремума позволяет использовать различные выражения в функционале, например, в выражении (13) силы в приводах можно заменить их мгновенными мощностями.

Рассмотрим расчетные примеры использования предлагаемого метода динамического уравновешивания.

Примеры использования предлагаемого метода. *Управление движением шестизвенного обратного плоского маятника.* Шестизвенный обратный плоский маятник можно рассматривать как модель робота-манипулятора с четырьмя избыточными приводами. Синтез управления такими роботами-манипуляторами является актуальной задачей и широко представлен в научной литературе [11–14].

Предлагаемый метод позволяет получать программные силы в приводах в общем случае. Перспективным также представляется использование такого подхода для роботов-манипуляторов с существенной упругостью звеньев.

Расчетная схема шестизвенного обратного маятника с плоским движением и параметрами $n = 42$, $k = 38$ приведена на рис. 1.

Кинограмма перемещения шестизвенного обратного маятника при управлении двумя моментами во втором и четвертом шарнирах, найденном из системы (7), показана на рис. 2. Шарниры пронумерованы последовательно, начиная с основания. Программное движение — перемещение концевой точки в горизонтальном направлении на 0,9 м за 0,8 с, с началом движения в момент времени 0,1 с, $k_1 = k_2 = 2$. Считаем, что второй, третий, пятый и шестой шарниры заблокированы — в них наложена угловая кинематическая связь —

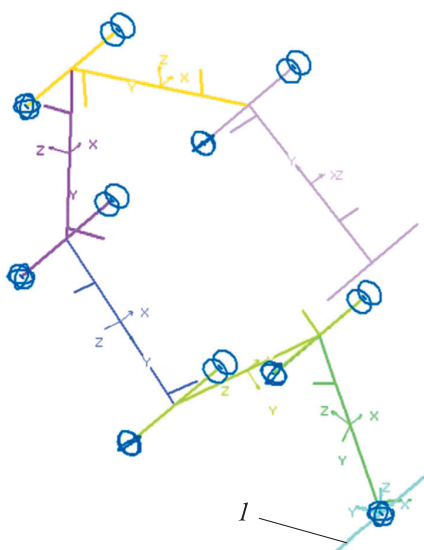


Рис. 1. Расчетная схема шестизвенного обратного маятника с плоским движением (1 — основание)

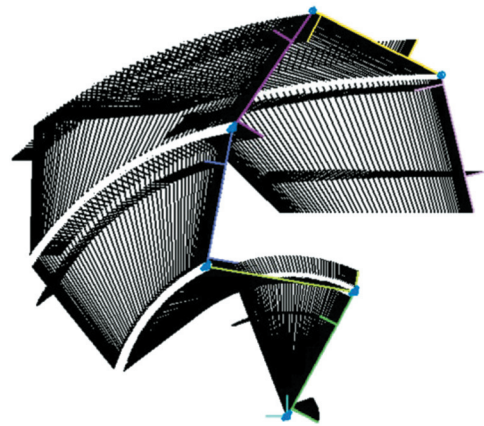


Рис. 2. Кинограмма перемещения шестизвенного маятника при управлении двумя моментами в первом и четвертом шарнирах

угол между смежными звеньями остается постоянным.

При расчете управления роботом-манипулятором в шести приводах программное движение заключалось в перемещении концевой точки в горизонтальном направлении на 3,5 м за 0,8 с, с началом движения в момент времени 0,1 с ($k_1 = 2$, $k_2 = 6$). При разрешении избыточности приводов с помощью дополнительных уравнений для корректирующих добавок (10) с единичными весовыми коэффициентами кинограмма перемещения шестизвенного маятника имеет вид, показанный на рис. 3.

Кинограмма перемещения шестизвенного маятника, полученная методом условного экстремума (14), приведена на рис. 4. Весовые коэффициенты в уравнении (14) приняты равными квадратам угловых скоростей в шарнирах, т. е. минимизирована суммарная мгновенная мощность в приводах.

Как видно из рис. 3 и 4, перемещения шестизвенного маятника существенно различаются. В частности, во втором случае достигается уменьшение среднего значения момента за счет движения части звеньев вниз под действием силы веса. Характерной особенностью варианта управления с избыточными приводами является то, что после достижения конечной точки программного движения звенья механизма не останавливаются, а продолжают совершать колебания, которые имеют тенденцию к нарастанию.

При использовании метода дополнительных уравнений для корректирующих добавок колебания затухают. Такие колебания можно объяснить неустойчивостью системы уравнений (3), которая еще и увеличивается вслед-

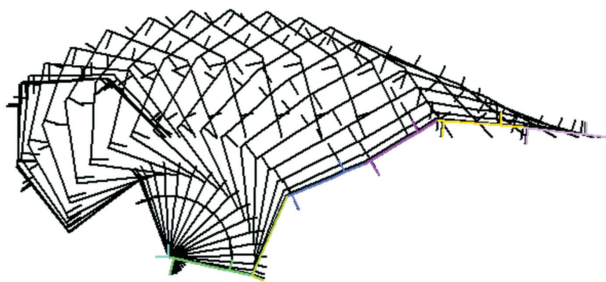


Рис. 3. Кинограмма перемещения шестизвенного маятника при управлении в шести шарнирах, полученная методом дополнительных уравнений для корректирующих добавок

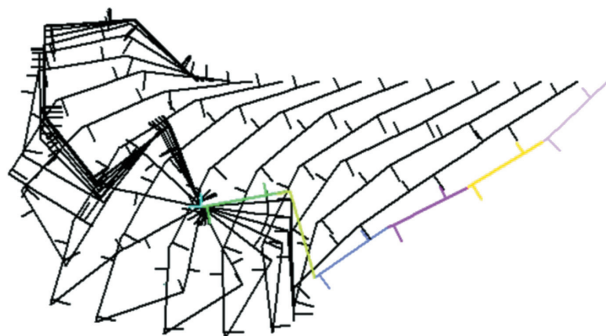


Рис. 4. Кинограмма перемещения шестизвенного маятника при управлении в пяти шарнирах, полученная методом условного экстремума

ствие накопления погрешностей в уравнениях (8) и (14). Неустойчивость решения уравнений (3) хорошо изучена, для стабилизации применяют специальные методы [8].

Можно предположить, что совместное использование уравнений (3) и (8) приводит к возрастанию погрешности уже за счет повышения суммарной размерности систем уравнений. Указанная неустойчивость требует отдельного рассмотрения и не входит в задачи настоящей работы.

Управление движением пространственного андроида. Рассмотрен случай пространственного движения механической системы на примере андроида. Параметры системы: $n = 150$, $k = 144$. Число приводов в конструкции андроида — 21. Выполнены расчеты для варианта с восемью управляющими приводами и ограничениями на шесть реакций ($k_1 = 6$, $k_2 = 8$). Управляющие приводы — приводы вращения относительно поперечной оси андроида в шарнирах плеч, бедер, коленей и стоп — по два на каждый тип шарнира.

Моделировали смещение центра масс (ЦМ) робота назад на 2 см за 2 с. Вертикальные реак-

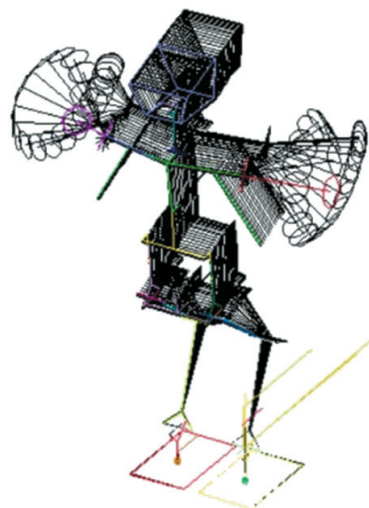


Рис. 5. Кинограмма движения андроида при смещении ЦМ назад с сохранением значения момента реакции в опоре относительно поперечной оси

ции и моменты реакций относительно поперечной оси приняли неизменными, а горизонтальные реакции в стопах вычисляли из горизонтальных сил инерции от движения ЦМ. Так как момент реакции задавался неизменным, а ее статический момент увеличивался вследствие смещения ЦМ, это изменение компенсировалось движением звеньев андроида, в частности, вращением рук (рис. 5).

Такое движение соответствует естественной реакции человека при попытке сохранить равновесие, если нет возможности переступить ногами. Результаты, приведенные на рис. 5, получены при разрешении неоднозначности с помощью метода условного экстремума — уравнения (14). В качестве весовых коэффициентов выступали квадраты угловых скоростей в соответствующих шарнирах. При расчетах с одинаковыми единичными весовыми коэффициентами компенсация момента происходила только за счет движения туловища.

Рассмотренные примеры управления многозвенными механическими системами позволяют сделать вывод о достаточной универсальности метода и применимости его к широкому классу механизмов, например, к параллельным [15–17].

Задача оптимального управления подвеской автомобиля. В общем виде эта задача заключается в нахождении управления, минимизирующего некоторый интегральный критерий [18–20].

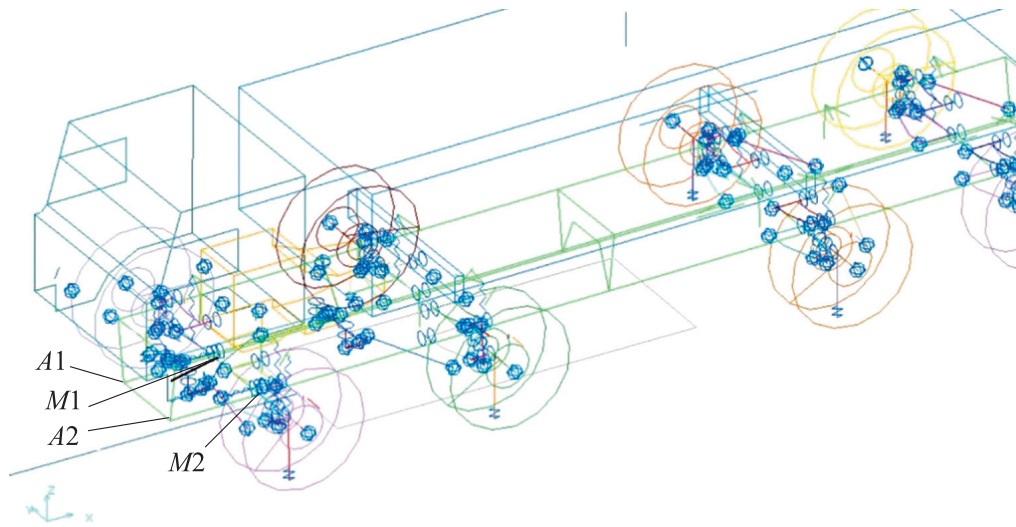


Рис. 6. Расчетная схема математической модели четырехосного автомобиля

С помощью уравнений (7)–(9) можно сформулировать задачу оптимального управления для критерия

$$J = \int_0^T F(\mathbf{p}_1) dt, \quad (17)$$

где F — знакпостоянная функция.

Рассматриваемый метод допускает брать в качестве подынтегрального выражения сумму выбранных реакций, которым назначены некоторые значения. Наиболее простой случай — все выбранные реакции равны нулю, что автоматически обеспечивает минимизацию (17), и, следовательно, строгое решение задачи оптимального управления.

Такой подход можно применять, например, для решения задач виброизоляции. При задании закона движения некоторых точек механи-

ческой системы, подверженной действию возмущения, можно обеспечить выполнение этого закона с нулевыми реакциями за счет приводов в других звеньях.

Рассмотрим задачу управления подвеской автомобиля для снижения его колебаний от воздействия микропрофиля дороги. Существующие постановки задачи можно найти в работах [21–24]. На рис. 6 приведена расчетная схема математической модели четырехосного автомобиля, с помощью которой смоделировано его движение по неровностям дороги, в частности, переезд автомобиля по треугольной неровности.

Зависимости вертикального ускорения A_z в передней части рамы автомобиля от времени t при наличии и отсутствии оптимального управления показаны на рис. 7. В управляемом варианте заданы две связи — нулевые вертикальные перемещения в двух симметричных точках A1 и A2 в передней части рамы. В качестве приводов использованы моменты M1 и M2 в двух рычагах передней подвески. Параметры системы: $n = 552$, $k = 225$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$.

С помощью уравнений (8) определяются управляющие моменты в рычагах подвески, которые обеспечивают перемещение точек на раме с нулевыми реакциями. Ускорения рамы в рассматриваемых точках близки к нулю (см. рис. 7). Этот случай можно считать примером решения задачи оптимального управления с критерием оптимизации в виде равенства нулю перемещений выбранных точек механической системы.

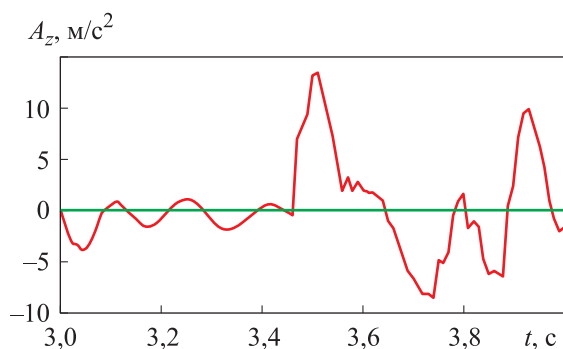


Рис. 7. Зависимости вертикального ускорения A_z в передней части автомобиля от времени t при наличии (—) и отсутствии (—) оптимального управления

Выводы

1. Рассмотренный метод обобщенной задачи динамического уравнивания можно считать универсальным теоретическим методом для решения широкого круга задач управляемой динамики машин. В частности, задач управления роботами-манипуляторами, антропоморфными и зооморфными роботами, гашения колебаний и др. Важной особенностью метода является то, что он базируется на численных моделях динамики машин, широко применяемых в программах компьютерного моделирования динамики механических систем. Метод не имеет принципиальных ограничений по размерности систем и типам нелинейностей.

2. Предлагаемый подход при $k_2 > k_1$ относится к вариационным методам решения задачи управления, которые в настоящее время приобрели широкое распространение и состав-

ляют основу методов, называемых машинным обучением. Формулировка предлагаемого метода в виде функционалов (13), (15) соответствует так называемому greedy управлению [25] в методах обучения с подкреплением. С такой точки зрения рассмотренный метод позволяет существенно снизить размерность пространства параметров интерполяционных функций, применяемых для описания управления, и, следовательно, повысить вычислительную эффективность методов машинного обучения.

3. Отмечена перспективность использования предложенного метода в задачах управляемой динамики упругих систем тел.

4. Приведены принципиальные теоретические положения метода, отмечены недостатки — неустойчивость решения, присущая всем методам моделирования динамики систем с замкнутыми циклами, и проблема разрешимости избыточных связей. Эти вопросы требуют дальнейшего изучения.

Литература

- [1] Фролов К.В., ред. *Вибрации в технике*. Т. 6. Москва, Машиностроение, 1981. 456 с.
- [2] Диментберг Ф.М. *Теория пространственных шарнирных механизмов*. Москва, Наука, 1982. 335 с.
- [3] Cipra R.J., Uicker J.J. On the dynamic simulation of large nonlinear mechanical systems. Part 1: An overview of the simulation technique. substructuring and frequency domain considerations. *J. Mech. Des.*, 1981, vol. 103, no. 4, pp. 849–865, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3254997>
- [4] Bayo E., Serna M.A. Penalty formulations for the dynamic analysis of elastic mechanisms. *J. Mech., Trans., and Automation.*, 1989, vol. 111, no. 3, pp. 321–327, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3259002>
- [5] Горобцов А.С., Карцов С.К., Плетнев А.Е. и др. *Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей*. Москва, Машиностроение, 2011. 462 с.
- [6] Ефимов Г.Б., Погорелов Д.Ю. Универсальный механизм — пакет программ для моделирования динамики систем многих твердых тел. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 1993, № 77.
- [7] *ADAMS/vehicle user's guide. Version 8.0. Mechanical Dynamics*, 1991. 160 p.
- [8] Виттенбург Й. *Динамика систем твердых тел*. Москва, Мир, 1980. 292 с.
- [9] Горобцов А.С., Скориков А.В., Тарасов П.С. Метод синтеза программного движения роботов с учетом заданных ограничений реакций в связях. *Мат. XIII Всеросс. науч.-тех. конф. с межд. участием*. Железногорск, 2021, с. 199–203.
- [10] Mamedov S., Khusainov R., Gusev S. et al. Underactuated mechanical systems: whether orbital stabilization is an adequate assignment for a controller design? *IFAC-Pap.*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 9262–9269, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2378>
- [11] Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. *Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами*. Москва, Мир, 1989. 376 с.
- [12] Roberts R.G., Maciejewski A.A. Repeatable generalized inverse control strategies for kinematically redundant manipulators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, vol. 38, no. 5, pp. 689–699, doi: <https://doi.org/10.1109/9.277234>
- [13] Pchelkin S., Shiriaev A., Robertsson A. et al. On orbital stabilization for industrial manipulators: case study in evaluating performances of modified PD+ and inverse dynamics control-

- lers. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2017, vol. 25, no. 1, pp. 101–117, doi: <https://doi.org/10.1109/TCST.2016.2554520>
- [14] Ledzema R., Bayo A. A Lagrangian approach to the non-causal inverse dynamics of flexible multibody systems: the three-dimensional case. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1994, vol. 37, no. 19, pp. 3343–3361, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620371909>
- [15] Глазунов В.А. *Механизмы параллельной структуры и их применение*. Ижевск, ИКИ, 2018. 1035 с.
- [16] Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А. Манипуляционные механизмы параллельной структуры и их приложения в современной технике. *ДАН*, 2014, т. 459, № 4, с. 428–431, doi: <https://doi.org/10.7868/S086956521434009X>
- [17] Глазунов В.А., ред. *Механизмы перспективных робототехнических систем*. Москва, Техносфера, 2020. 296 с.
- [18] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983. 392 с.
- [19] Беллманн Р. *Динамическое программирование*. Москва, ИЛ, 1960. 400 с.
- [20] Колесников А.А., Кузьменко А.А. Методы АКАР и АКОР в задачах синтеза нелинейных систем управления. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2016, т. 17, № 10, с. 657–669, doi: <https://doi.org/10.17587/mau.17.657-669>
- [21] Фролов К.В. Уменьшение амплитуды колебаний резонансных систем путем управляемого изменения параметров. *Машиноведение*, 1965, № 3, с. 38–42.
- [22] Karnopp D., Rosenberg C. *Analysis and simulation of multiport systems*. London, MIT Press, 1968. 222 p.
- [23] Дмитриев А.А., Чобиток В.А., Тельминов А.В. *Теория и расчет нелинейных систем поддресоривания гусеничных машин*. Москва, Машиностроение, 1976. 206 с.
- [24] Горобцов А.С. Исследование возможностей системы виброзащиты со ступенчато изменяющимися параметрами. *Влияние вибрации на организм человека и проблемы виброзащиты. Тез. док. IV Всесоюз. симп.* Москва, Ин-т машиноведения им. А.А. Благонравова, 1982, с. 74–75.
- [25] Sutton R.S., Barto A.G. *Reinforcement learning*. MIT Press, 2018. 552 p.

References

- [1] Frolov K.V., ed. *Vibratsii v tekhnike*. Т. 6 [Vibrations in technics. Vol. 6]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 456 p. (In Russ.).
- [2] Dimentberg F.M. *Teoriya prostranstvennykh sharnirnykh mekhanizmov* [Theory of spatial swivel mechanisms]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 335 p. (In Russ.).
- [3] Cipra R.J., Uicker J.J. On the dynamic simulation of large nonlinear mechanical systems. Part 1: An overview of the simulation technique. substructuring and frequency domain considerations. *J. Mech. Des.*, 1981, vol. 103, no. 4, pp. 849–865, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3254997>
- [4] Bayo E., Serna M.A. Penalty formulations for the dynamic analysis of elastic mechanisms. *J. Mech., Trans., and Automation.*, 1989, vol. 111, no. 3, pp. 321–327, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3259002>
- [5] Gorobtsov A.S., Kartsov S.K., Pletnev A.E. et al. *Kompyuternye metody postroeniya i issledovaniya matematicheskikh modeley dinamiki konstruktsiy avtomobiley* [Computer methods for developing and studying mathematical models of vehicle dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2011. 462 p. (In Russ.).
- [6] Efimov G.B., Pogorelov D.Yu. Universal mechanism — a software package for modeling the dynamics of systems of many solids. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [KIAM Preprint], 1993, no. 77. (In Russ.).
- [7] *ADAMS/vehicle user's guide*. Version 8.0. Mechanical Dynamics, 1991. 160 p.
- [8] Wittenburg J. *Dynamics of systems of rigid bodies*. Vieweg+Teubner, 1977. 224 p. (Russ. ed.: *Динамика систем твердых тел*. Moscow, Mir Publ., 1980. 292 p.)
- [9] Gorobtsov A.S., Skorikov A.V., Tarasov P.S. [Method for synthesis of programmed robot motion with respect to the given constraints of reactions in the links]. *Mat. XIII Vseross.*

- nauch.-tekh. konf. s mezhd. uchastiem* [Proc. XIII Russ. Sci.-Tech. Conf. with Int. Participation]. Zheleznogorsk, 2021, pp. 199–203. (In Russ.).
- [10] Mamedov S., Khusainov R., Gusev S. et al. Underactuated mechanical systems: whether orbital stabilization is an adequate assignment for a controller design? *IFAC-Pap.*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 9262–9269, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.2378>
- [11] Vukobratovic M., Stokić D., Kirćanski N. *Non-adaptive and adaptive control of manipulation robots*. Springer, 1985. 383 p. (Russ. ed.: *Neadaptivnoe i adaptivnoe upravlenie manipulyatsionnymi robotami*. Moscow, Mir Publ., 1989. 376 p.)
- [12] Roberts R.G., Maciejewski A.A. Repeatable generalized inverse control strategies for kinematically redundant manipulators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, vol. 38, no. 5, pp. 689–699, doi: <https://doi.org/10.1109/9.277234>
- [13] Pchelkin S., Shiriaev A., Robertsson A. et al. On orbital stabilization for industrial manipulators: case study in evaluating performances of modified PD+ and inverse dynamics controllers. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 2017, vol. 25, no. 1, pp. 101–117, doi: <https://doi.org/10.1109/TCST.2016.2554520>
- [14] Ledzema R., Bayo A. A Lagrangian approach to the non-causal inverse dynamics of flexible multibody systems: the three-dimensional case. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1994, vol. 37, no. 19, pp. 3343–3361, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620371909>
- [15] Glazunov V.A. *Mekhanizmy paralelnoy struktury i ikh primenenie* [Parallel mechanisms and their application]. Izhevsk, IKI Publ., 2018. 1035 p. (In Russ.).
- [16] Ganiev R.F., Glazunov V.A. Parallel structure manipulation mechanisms and their applications in modern technology. *DAN*, 2014, vol. 459, no. 4, pp. 428–431, doi: <https://doi.org/10.7868/S086956521434009X> (in Russ.).
- [17] Glazunov V.A., ed. *Mekhanizmy perspektivnykh robototekhnicheskikh sistem* [Mechanisms of prospective robotic systems]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2020. 296 p. (In Russ.).
- [18] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V. et al. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mechanics theory of optimum processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 392 p. (In Russ.).
- [19] Bellman R. *Dynamic programming*. Princeton University Press, 1957. 342 p. (Russ. ed.: *Dinamicheskoe programmirovaniye* [Dynamic programming]. Moscow, IL, 1960. 400 p.)
- [20] Kolesnikov A.A., Kuzmenko A.A. The ADAR method and theory of optimal control in the problems of synthesis of nonlinear control systems. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 10, pp. 657–669, doi: <https://doi.org/10.17587/mau.17.657-669> (in Russ.).
- [21] Frolov K.V. Reducing the amplitude of oscillations of resonant systems by controlled parameter changes. *Mashinovedeniye*, 1965, no. 3, pp. 38–42. (In Russ.).
- [22] Karnopp D., Rosenberg C. *Analysis and simulation of multiport systems*. London, MIT Press, 1968. 222 p.
- [23] Dmitriev A.A., Chobitok V.A., Telminov A.V. *Teoriya i raschet nelineynykh sistem podressorivaniya gusenichnykh mashin* [Theory and calculation of nonlinear systems of tracked vehicle sprung systems]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1976. 206 p. (In Russ.).
- [24] Gorobtsov A.S. [Study of the vibration protection system with stepwise changing parameters]. *Vliyanie vibratsii na organizm cheloveka i problemy vibrozashchity. Tez. dok. IV Vsesoyuz. simp.* [Effect of Vibration on a Human Body and Problems of Vibroprotection. Abs. IV Russ. Symp.]. Moscow, In-t mashinovedeniya im. A.A. Blagonravova, 1982, pp. 74–75. (In Russ.).
- [25] Sutton R.S., Barto A.G. *Reinforcement learning*. MIT Press, 2018. 552 p.

Статья поступила в редакцию 11.11.2022

Информация об авторе

ГОРОБЦОВ Александр Сергеевич — доктор технических наук, главный научный сотрудник, Отдел «Механика машин и управление машинами». Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН; заведующий кафедрой «Высшая математика». Волгоградский государственный технический университет (400005, Волгоград, Российская Федерация, просп. им. В.И. Ленина, д. 28, e-mail: vm@vstu.ru).

Information about the author

GOROBTSOV Aleksander Sergeevich — Doctor of Science (Eng.), Chief Researcher. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences; Head further mathematics Department. Volgograd State Technical University (400005, Volgograd, Russian Federation, Lenin Ave., Bldg. 28, e-mail: vm@vstu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Горобцов А.С. Обобщенная задача динамического уравнивания и перспективные направления ее применения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 3, с. 14–24, doi: 10.18698/0536-1044-2023-3-14-24

Please cite this article in English as:

Gorobtsov A.S. Dynamic Balance Generalized Problem and the Promising Areas of its Application. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2023, no. 3, pp. 14–24, doi: 10.18698/0536-1044-2023-3-14-24



Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана предлагает читателям монографию

«Теоретические основы лазерной обработки»

Авторы: А.Г. Григорьянц, И.Н. Шиганов, А.И. Мисюров

В монографии рассмотрены физические основы технологических процессов лазерной обработки, а также вопросы взаимодействия концентрированного лазерного излучения с материалами, образования плазменного факела и парогазового канала. Представлены аналитические и численные методы анализа температурных полей и остаточных напряжений при лазерной обработке. На базе краткого изложения основ теории кристаллизации рассмотрены процессы затвердевания жидкого металла в условиях лазерного воздействия. Описаны особенности фазовых и структурных превращений материалов в твердом состоянии. Большое внимание уделено технологической прочности металла при лазерной обработке. Обобщены и систематизированы представления об особенностях образования трещин в различных температурных интервалах при лазерной сварке и наплавке.

Для инженерно-технических и научных работников, а также студентов высших учебных заведений машиностроительных специальностей.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
Тел.: +7 499 263-60-45, факс: +7 499 261-45-97;
press@bmstu.ru; <https://bmstu.press>