

УДК 621.01, 629.113, 539.3

doi: 10.18698/0536-1044-2022-12-70-79

# Расчет критической скорости качения автомобильной радиальной шины методом конечных элементов

**О.А. Одинцов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Calculation of Critical Velocity of a Rolling Radial Tire Using the Finite Element Method

**O.A. Odintsov**

Bauman Moscow State Technical University

В автомобильной технике шина является элементом, обеспечивающим сцепление колес с дорогой и передачу тягово-тормозных усилий. Известно, что при достижении определенной скорости характер стационарного качения автомобильной шины изменяется. В частности, в зоне контакта образуется волна, скорость распространения которой совпадает со скоростью качения колеса, что вызывает резкое увеличение потерь на качение в шине, ее перегрев и последующее разрушение. Описан численный метод, основанный на методе конечных элементов, позволяющий из решения обобщенной задачи на собственные значения не только получать критическую скорость, связанную с колебаниями беговой дорожки и быстрым разрушением шины, но и находить скорости, меньшие критической, при которых происходит возникновение колебаний в боковине. При таких скоростях шина не разрушается, однако данный режим колебаний также является нежелательным, поскольку приводит к нагреву шины и снижению ее долговечности.

**Ключевые слова:** критическая скорость, автомобильная шина, метод конечных элементов

A tire in the automotive vehicles is an element ensuring the wheels friction with the road and transmission of the traction and braking forces. It is known that when certain velocity is reached, nature of the vehicle tire stationary rolling is changing. In particular, a wave appears in the contact zone, which propagation speed coincides with the wheel rolling velocity causing significant increase in rolling losses in the tire, its overheating and subsequent destruction. A numerical method based on the finite element method is described making it possible to obtain from solution of the generalized eigenvalue problem not only the critical velocity associated with the tread oscillations and the tire rapid destruction, but also to find velocities lower than the critical one, at which oscillations occur in the side wall. The tire is not collapsing at such velocities; however, this oscillation mode is also undesirable, since it leads to the tire heating and decrease in its durability.

**Keywords:** critical velocity, vehicle tire, finite element method

При проектировании скоростных автомобильных шин важно определить критическую скорость качения [1, 2]. В случае использования экспериментальных методов достижение кри-

тической скорости качения шины выявляется обнаружением на выходе из ее контакта с беговым барабаном волны, неподвижно ориентированной в пространстве [3] (рис. 1). Однако на

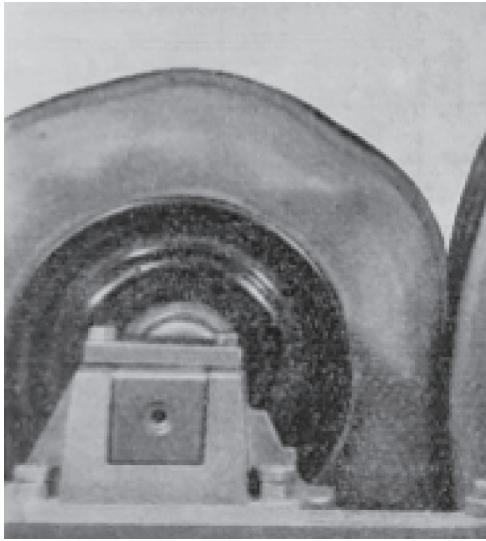


Рис. 1. Внешний вид волны на поверхности шины при достижении критической скорости качения

ранних этапах проектирования трудно применять экспериментальные методы, поэтому для определения критической скорости качения шины используют расчетные методы.

Значительный вклад в создание численных методов определения критической скорости качения шины внес В. Л. Бидерман. В своих работах он высказал предположение, что на динамическое поведение шины оказывает влияние не только распределение элементарных масс в ее объеме и сил, связанных с наличием внутреннего давления, но в большей степени упругая связь между соседними материальными частицами, обусловленная наличием резинокордных слоев [4].

В трудах [5] показано, что критическая скорость качения шины совпадает с минимальной волновой скоростью распространения деформации по ее окружности. Это привело к разработке модели кольца на упругом основании — простейшей модели, позволяющей корректно описывать эффекты наличия критической скорости при стационарном качении. Аналогичные исследования проводили зарубежные ученые [6, 7].

Дальнейшее развитие расчетные методы получили в работе [3], где для моделирования шины использовали цилиндрическую резинокордную оболочку постоянной толщины, что позволило учесть влияние некоторых основных геометрических параметров профиля шины на критическую скорость ее качения.

Последующее развитие вычислительной техники и численных методов привело к созда-

нию моделей, основанных на вариационных принципах, реализуемых в форме метода конечных элементов [8]. Это дало возможность перейти от простейших моделей типа кольца или торовой оболочки к моделям, учитывающим реальные геометрические характеристики шины и размещение резинокордных слоев.

В конечно-элементном комплексе Abaqus существуют встроенные средства моделирования режима стационарного качения шины, но они не позволяют непосредственно определять критическую скорость. Как и в эксперименте, ее находят косвенно по возникновению волн и увеличению амплитуд напряжений и деформаций [9]. Однако вблизи значений собственных частот при отсутствии демпфирования решение задачи в такой постановке становится неустойчивым.

Недостаток такого подхода заключается в высокой ресурсоемкости. Для получения результатов на каждом шаге необходимо решать контактную задачу, которая является нелинейной [10], а вблизи особых точек решения ее сходимости может оказаться нарушенной.

В работе [11] предложен метод определения критической скорости качения шины с разложением перемещений в ряды Фурье для понижения размерности задачи.

Цель статьи — разработка модели радиальной автомобильной шины, основанной на модели трехслойной оболочки [12] и предназначенной для определения критической скорости качения шины, а также методов анализа, позволяющих найти критическую скорость без решения нелинейной контактной задачи.

#### Описание стационарного качения шины.

Для рассмотрения стационарного режима качения шины использован смешанный подход, в котором перемещения, связанные с ее вращательным движением, описаны с помощью подхода Эйлера, а перемещения, вызванные деформированием шины при вращении, — Лагранжа.

В качестве основной системы координат выбрана неподвижная декартова система, совмещенная с осью вращения колеса, что связано с особенностями последующей конечно-элементной реализации. При этом отдельные соотношения сформулированы с использованием вспомогательной цилиндрической системы координат, в которой они имеют наиболее компактную форму (рис. 2).

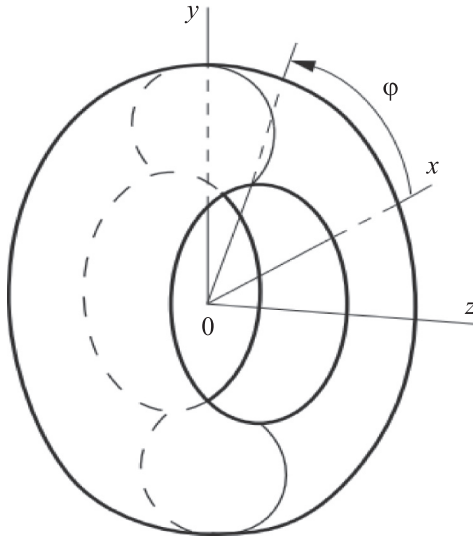


Рис. 2. Схема к постановке задачи стационарного качения

Пусть  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор материальной точки вращающейся шины до деформирования, имеющий компоненты  $\{x_0, y_0, z_0\}$  в неподвижной декартовой системе координат, ось  $z$  которой совмещена с осью вращения колеса, в момент времени  $t = 0$ .

При вращении колеса с угловой скоростью  $\Omega$  в момент времени  $t$  компоненты этого вектора будут определяться как

$$\{R \cos(\Omega t + \varphi_0), R \sin(\Omega t + \varphi_0), z\},$$

где  $R$  — радиус параллельного круга в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ ;  $\varphi_0$  — угол, составляемый плоскостью, содержащей ось  $z$  и рассматриваемую точку, с осью  $x$ , т. е.

$$x(t) = R \cos(\Omega t + \varphi_0) = x(R, \varphi, t);$$

$$y(t) = R \sin(\Omega t + \varphi_0) = y(R, \varphi, t);$$

$$z(t) \equiv z_0;$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2};$$

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0.$$

В деформированном состоянии в момент времени  $t$  материальные точки имеют перемещения, связанные как с вращением колеса, так и с деформированием шины. Пусть  $\mathbf{u}(\mathbf{R}(t), t)$  — вектор перемещения материальной точки, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , для которой возможна альтернативная запись в цилиндрической системе координат как  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(R, \varphi, z, t)$ .

Тогда полные производные компонент этого вектора  $u_x, u_y, u_z$  по времени с учетом стационарности вращения будут определяться как конвективные производные Лагранжа. С уче-

том того, что  $R(t) = \text{const}$ ,  $z(t) = \text{const}$ , производная компоненты  $u_x$  примет вид

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} = -\Omega \frac{\partial u_x}{\partial x} y + \Omega \frac{\partial u_x}{\partial y} x,$$

а для второй производной будет справедливо выражение

$$\frac{D^2 u_x}{Dt^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2}.$$

Положение радиус-вектора материальной точки в деформированной конфигурации  $\mathbf{r}$  складывается из текущего положения материальной точки недеформированной шины  $\mathbf{R}$  и перемещений  $\mathbf{u}$ , полученных в результате деформирования.

Подставляя в выражения для конвективных производных координаты радиус-вектора недеформированной шины, получаем соотношения для полных ускорений материальных точек шины  $\mathbf{a}$  с компонентами  $a_x, a_y, a_z$  в неподвижной декартовой системе координат:

$$a_x = -\Omega^2 x + \Omega^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2};$$

$$a_y = -\Omega^2 y + \Omega^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \varphi^2};$$

$$a_z = \Omega^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2}.$$

Здесь первые слагаемые отвечают за центробежные ускорения в недеформируемой шине, а вторые определяют ускорения, возникающие при ее неравномерном деформировании. Именно эти ускорения служат причиной возникновения бегущих волн при качении колеса.

Используя принцип Даламбера, добавим к неподвижной шине динамические силы, определяемые через полные ускорения, возникающие при качении. Интенсивность этих сил на единицу объема вычисляется как

$$\mathbf{g}_d = -\rho \mathbf{a},$$

где  $\rho$  — плотность материала в данной точке.

**Дискретизация решения.** Согласно полученным выражениям, динамические силы зависят не только от начального радиуса рассматриваемой точки, но и от ее перемещений при деформировании. Дискретизируем поле перемещений конечными элементами, выражая его через узловые степени свободы с помощью функций формы

$$\{u\} = [N]\{q\},$$

где  $\{u\}$  — вектор-столбец компонент перемещений;  $[N]$  — матрица функций формы;  $\{q\}$  — вектор-столбец узловых степеней свободы.

Обозначив через  $[N_{\phi\phi}]$  матрицу вторых производных функций формы по окружной координате, получаем

$$\{g_d\} = \Omega^2 \rho \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} - \Omega^2 \rho [N_{\phi\phi}]\{q\}.$$

Найдем возможную работу динамических сил  $\delta A_d$  в объеме шины  $V$ , используя для возможных перемещений такую же аппроксимацию:

$$\delta A_d = \{\delta q\}^T \iiint_V [N]^T \{g_d\} dV, \quad (1)$$

где  $\{\delta q\}$  — вектор-столбец возможных узловых перемещений.

Из формулы (1) можно получить выражения для постоянных узловых сил от центробежной нагрузки  $\{F_u\}$  и переменных сил, связанных с деформациями. Эти силы линейно зависят от узловых степеней свободы через матрицу  $[T]$ , аналогичную матрице масс в задачах модального анализа:

$$\{F_u\} = \Omega^2 \iiint_V \rho [N]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} dV;$$

$$[T] = \Omega^2 \iiint_V \rho [N]^T [N_{\phi\phi}] dV.$$

Преобразуем выражение для матрицы  $[T]$  к симметричному виду, используя интегрирование по частям [13]. Разобьем интеграл по объему шины  $V$  на интегралы по площади поперечного сечения  $S$  и окружной координате  $\phi$ .

Считая функцию плотности  $\rho$  не зависящей от окружной координаты  $\phi$  и учитывая циклическую симметрию, запишем

$$\int_{-\pi}^{\pi} [N]^T [N_{\phi\phi}] d\phi = \begin{vmatrix} u = [N]^T & dv = [N_{\phi\phi}] d\phi \\ du = [N_{\phi\phi}]^T d\phi & v = [N_{\phi}] \end{vmatrix} =$$

$$= - \int_{-\pi}^{\pi} [N_{\phi}]^T [N_{\phi}] d\phi,$$

где  $[N_{\phi}]$  — матрица первых производных функций формы по окружной координате,  $u$  и  $v$  — функции для использования формулы интегрирования по частям.

Поэтому для матрицы масс  $[M] = -\Omega^2 [M]$  будет справедливо выражение

$$[M] = \iiint_V \rho [N_{\phi}]^T [N_{\phi}] d\phi. \quad (2)$$

Итоговое уравнение метода конечных элементов для задачи динамики в приращениях (без учета вязкости) имеет вид

$$[K_{\tau}]\{dq\} - \Omega^2 [M]\{dq\} = \{dF\}, \quad (3)$$

где  $[K_{\tau}]$  — матрица тангенциальных жесткостей, составляющаяся [14] из матрицы жесткостей линейной задачи  $[K_0]$ , матрицы больших перемещений  $[K_L]$  и матрицы начальных напряжений  $[K_{\sigma}]$ ;  $\{dq\}$  — приращения узловых перемещений;  $\{dF\}$  — приращения внешних узловых сил.

### Определение собственных угловых скоростей.

При приращениях внешних сил  $\{dF\} = 0$  уравнение (3), за исключением формулировки матрицы масс (2), имеет смысл, полностью аналогичный задаче модального анализа. Найдем значения скоростей вращения  $\Omega$ , при которых будут возможны приращения узловых перемещений, не вызывающие изменения узловых сил.

Однородная система уравнений, соответствующая выражению (3), будет иметь ненулевое решение только тогда, когда

$$\det([K_{\tau}] - \Omega^2 [M]) = 0,$$

что приводит к обобщенной задаче на собственные значения, решаемой теми же методами, что и для задачи модального анализа.

Получаемые из решения собственные векторы  $\{q_i\}$ , как и в задаче модального анализа, определяются с точностью до постоянного множителя и используются для наглядного отображения формы колебаний при выбранной частоте вращения. Источником возбуждения колебаний в случае с катящимся колесом являются контактные силы, неподвижно ориентированные в пространстве.

Однако их задание при такой постановке не требуется, так как область пятна контакта мала по сравнению с длиной беговой дорожки, и ее учет не окажет значительного влияния на собственные значения.

В уравнении (3) также в явном виде отсутствуют постоянные силы  $\{F_u\}$ , но они оказывают влияние на собственные значения через матрицу начальных напряжений  $[K_{\sigma}]$ , определяемую напряжениями от внутреннего давле-

ния и центробежных сил, а также через матрицу больших перемещений  $[K_L]$ . Учет последней также необходим, поскольку перемещения оболочки шины при надувке и от действия центробежных сил могут оказаться значительно больше толщины оболочки, особенно в области боковины шины.

Поэтому решение задачи на собственные значения должно предваряться решением задачи квазистатического нелинейного деформирования шины заданной нагрузкой. Так как нагрузка от центробежных сил зависит от искомых угловых скоростей  $\Omega$ , задачу необходимо решать итерационно.

Для построения матрицы тангенциальных жесткостей применена модель трехслойной оболочки [15], в которой в отдельные слои вынесены пакеты композитных слоев каркаса и брекера толщиной  $h^{(1)}$  и  $h^{(2)}$  соответственно, а гиперупругая прослойка толщиной  $h^{(3)}$ , расположенная между ними, предназначена для передачи усилий и моделирует резиновую матрицу (рис. 3).

Для устранения проблемы описания жестких смещений использована изопараметрическая техника в неподвижной декартовой системе координат. Функции формы трехслойной оболочки формируются с применением локальных нормированных координат  $\xi, \eta, \zeta$ , где координата  $\eta$  во всех элементах ориентирована в окружном направлении.

Это позволяет выполнить дифференцирование  $i$ -й функции формы  $N_i$  по угловой координате  $\varphi$  через дифференцирование по  $\eta$  как

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{2}{\Delta \varphi_e} \frac{\partial N_i}{\partial \eta},$$

где  $\Delta \varphi_e$  — угловой размер элемента в окружном направлении.

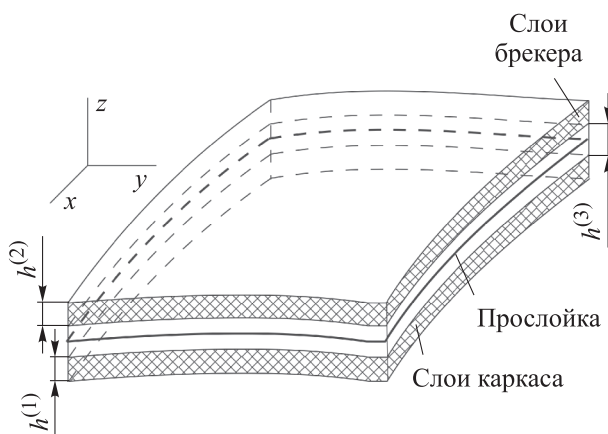


Рис. 3. Модель трехслойной оболочки

В отличие от задач модального анализа, построение редуцированной матрицы масс оказывается более сложной задачей, так как простое сложение элементарных масс линейных степеней свободы одной строки с приведением их к диагонали дает нулевой результат вследствие соответствия жесткому смещению, не дающему в этой задаче никакого динамического отклика.

Поэтому выполняется лишь исключение поворотных степеней свободы, соответствующих статическим и осевым моментам инерции в матрице масс. Тем не менее, эта процедура позволяет повысить устойчивость и сократить время вычислений без существенного изменения спектра получаемых собственных значений.

**Пример расчета.** В качестве примера выбрана радиальная шина типоразмера 175/70R13 (для легковых автомобилей), содержащая два слоя металлокордного брекера с укладкой  $\pm 70^\circ$  и один слой каркаса с углом укладки, близким к радиальному. В процессе итерационного нагружения внутреннее давление изменялось от 0 до 0,2 МПа. В силу симметрии углов укладки корда пакет слоев каркаса принят ортотропным, для расчета использована 1/4 полной оболочки.

Сетка конечных элементов состояла из 150 восемнадцатиузловых элементов трехслойной оболочки с биквадратичной аппроксимацией перемещений по лицевым граням каркаса и брекера и линейной аппроксимацией по толщине прослойки. Модель содержала 1342 узла и 6710 степень свободы.

Материал каркаса и брекера принят линейно-упругим, прослойка смоделирована как гиперупругий неогуков материал [14]. Для решения нелинейной задачи квазистатического нагружения применен метод Ньютона — Рафсона. Обобщенная задача на собственные значения решена с использованием библиотеки LAPACK.

Анализ результатов расчета показал, что в надутой рабочим внутренним давлением радиальной шине первые собственные частоты соответствуют возникновению колебаний в боковине. В отличие от задачи модального анализа, наименьшим собственным частотам соответствует минимальный пространственный период волны из тех, что достижимы для используемой конечно-элементной сетки.

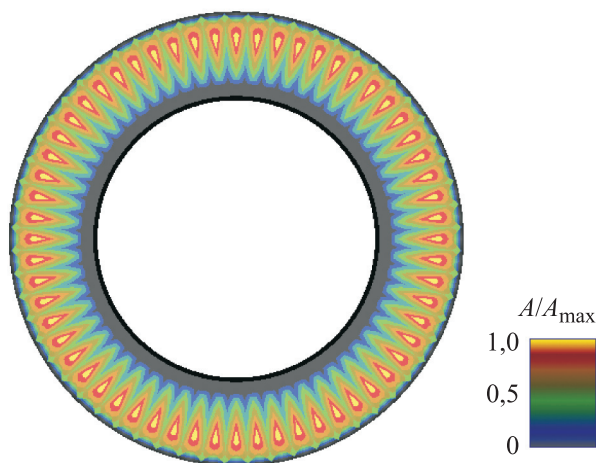


Рис. 4. Форма колебаний шины для наименьшей частоты вращения

Вид собственной формы колебаний, соответствующей наименьшей частоте вращения шины  $1697 \text{ мин}^{-1}$ , приведен на рис. 4. Для радиуса качения шины  $R_k = 278 \text{ мм}$  это соответствует скорости качения  $v = 178 \text{ км/ч}$ . Указанное значение радиуса качения зафиксировано постоянным для всех рассматриваемых далее результатов с целью их сопоставления.

Повышенной яркостью на рис. 4 отмечены области с максимальными амплитудами колебаний срединной поверхности слоев  $A = (\{u\}^T \{u\})^{1/2}$ , отнесенные к максимальной амплитуде  $A_{\max}$ . В реальной шине из-за наличия вязкости колебания будут затухать по мере удаления от области пятна контакта, являющегося источником возбуждения. Однако искажение спектра, вызванное демпфированием, не должно быть значительным.

Дальнейшее измельчение сетки не приводит к заметному снижению минимальной собственной частоты, так как спектр частот в начальной области оказывается весьма плотным (рис. 5). Добавление новых частот приводит к его дальнейшему уплотнению, лишь незначительно расширяя его в сторону наименьших значений. Такое свойство спектра можно

объяснить тем, что при изменении частоты вращения колеса колебания в боковине возникают на различном удалении от центра в точках с одними и теми же линейными скоростями при различных угловых.

Подобные высокочастотные колебания, по-видимому, не являются опасными, так как наличие демпфирующих свойств у резины не дает колебаниям высокой частоты достигать слишком большой амплитуды, а локализация колебаний в боковине каркаса не сказывается на несущей способности оболочки шины.

Однако они могут проявляться в виде увеличения акустического шума и тепловой нагрузки катящегося колеса, поэтому их исследование может представлять отдельный интерес.

Последовательное увеличение частоты вращения шины приводит к смещению колебаний в сторону края беговой дорожки. При скорости качения  $v = 199 \text{ км/ч}$  в колебательный процесс оказывается вовлечена вся боковая часть шины, включая кромку брекера (рис. 6). Эти колебания опасны тем, что могут вызвать интенсивный саморазогрев материала шины в области, наиболее подверженной тепловому разрушению.

Дальнейшее увеличение частоты вращения постепенно распространяет колебания на зону брекера. На рис. 7 показана форма колебаний брекера при скорости качения  $v = 301 \text{ км/ч}$ . При меньших скоростях качения шины колебания в брекере также присутствуют, но охватывают не всю область беговой дорожки.

Колебания в брекере являются наиболее опасными, так как в экспериментах непосредственно приводят к ее разрушению.

Для оценки влияния форм собственных колебаний на прочность отдельных элементов шины вычислено отношение коэффициентов запаса прочности каркаса  $n_{car}$  и брекера  $n_{br}$ , полученных при задании собственных векторов узловых перемещений, для выбранного значения собственной частоты вращения, что позволяет

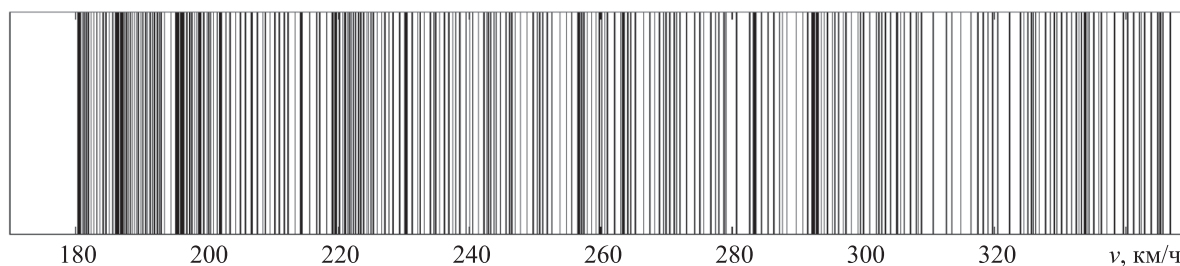


Рис. 5. Распределение собственных частот шины в нижней части спектра

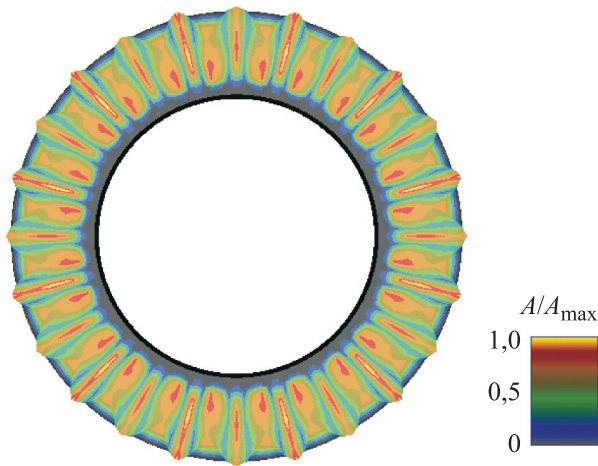


Рис. 6. Переход колебаний на кромку брекера

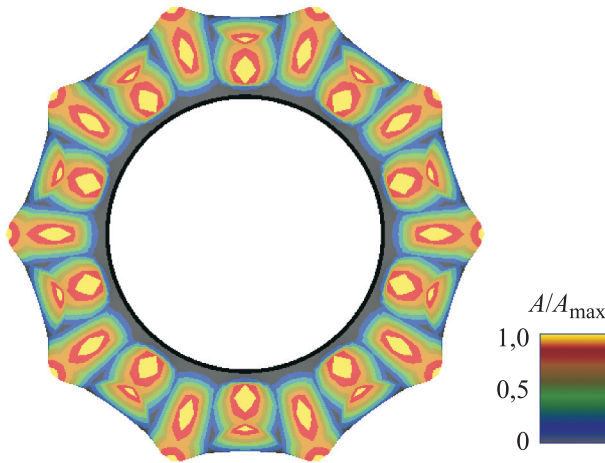


Рис. 7. Модель формы колебаний брекера при скорости качения шины  $v = 301$  км/ч

исключить влияние неизвестного масштабного множителя.

При этом значения коэффициентов запаса прочности  $n_{car}$  и  $n_{br}$  не являются значимыми,

поэтому они использованы только для оценки влияния колебаний на отдельные элементы конструкции. Зависимость отношения коэффициентов запаса прочности  $n_{car}/n_{br}$  от скорости качения шины  $v$  показана на рис. 8.

Видно, что эта величина имеет выброс на скорости качения примерно  $v_k \approx 300$  км/ч, что согласуется с представленными ранее собственными формами колебаний. Меньшие выбросы при скоростях качения  $v = 243$  и  $285$  км/ч также соответствуют колебаниям брекера, но затрагивают его не полностью (рис. 9).

Для сравнения были выполнены расчеты на полной сетке и на сетке с одной плоскостью симметрии  $xOy$ . Анализ результатов расчетов показал, что несимметричные формы колебаний мало влияют на общую картину, а в связи с тем, что они начинают быть заметными только на сравнительно высоких частотах вращения (в отличие от задачи модального анализа), искажения, вносимые условиями симметрии на таких сетках, оказываются незначительными в нижней части спектра.

**Влияние нагрузок на результаты расчета.** Как указывалось ранее, постоянные динамические нагрузки, зависящие от частоты вращения колеса, влияют на значения матрицы тангенциальных жесткостей, используемой для определения собственных частот вращения. Поэтому необходимо определить, насколько существенным является это влияние.

Результаты расчета показывают, что изменение заданной частоты вращения в рабочем диапазоне не оказывает значительного влияния на наименьшие собственные частоты, т. е. для определения наименьшей собственной частоты

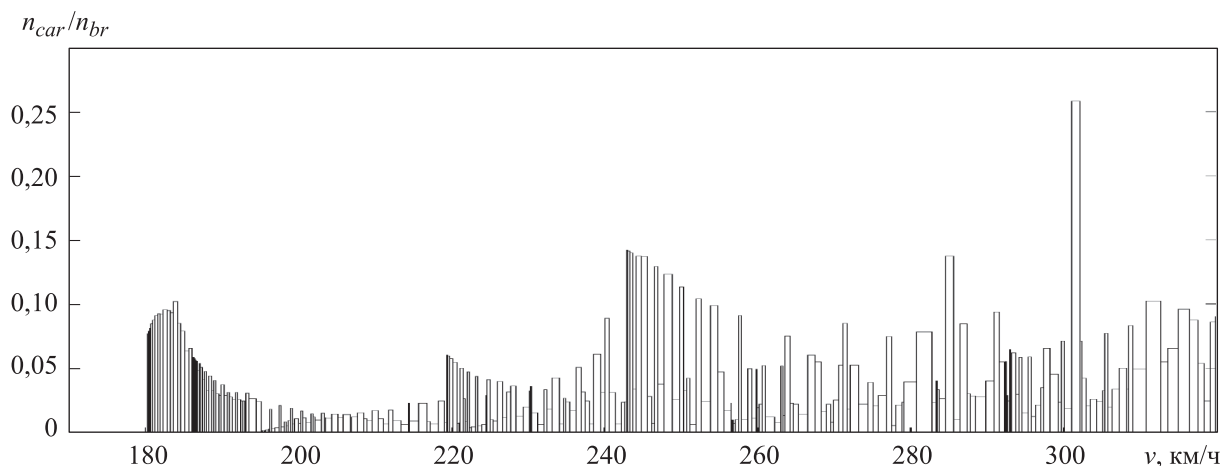


Рис. 8. Зависимость отношения коэффициентов запаса  $n_{car}/n_{br}$  от скорости качения шины  $v$

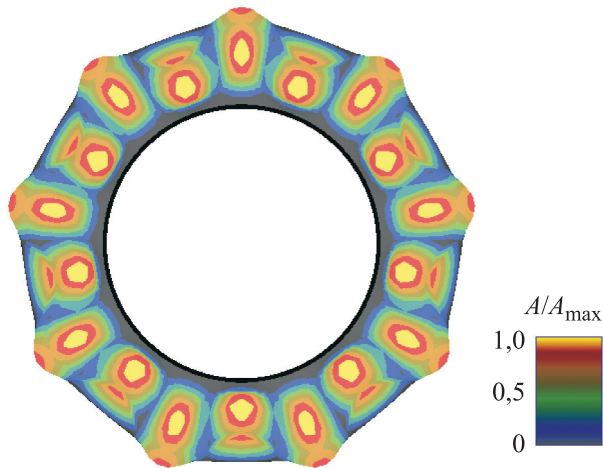


Рис. 9. Модель колебаний края брекера при скорости качения шины  $v = 285$  км/ч

с практически значимой точностью нет необходимости точно подбирать частоту вращения колеса при вычислении постоянных динамических нагрузок.

Несколько сложнее определить частоты вращения шины, вызывающие колебания брекера, так как они достаточно сильно зависят от постоянной динамической нагрузки. Взаимосвязь между наименьшей скоростью качения  $v_{cr}$ , скоростью качения, вызывающей колебания брекера,  $v_{br}$  и заданной скоростью качения  $v_c$  показана на рис. 10. Очевидно, что искомое значение собственной скорости для каждого типа колебаний соответствует точкам пересечения линии  $v_c$  с каждой из кривых  $v_{cr}$ ,  $v_{br}$ .

Внутреннее давление в шине также оказывает влияние на собственные скорости. При расчете вращения шины без избыточного внутреннего давления критическая скорость составила примерно 138 км/ч, что значительно ниже, чем в рабочем режиме. Кроме того, в таком режиме качения волнообразование начинается не с боковой стенки, а с зоны брекера.

Однако уже при давлении 0,1 МПа (равном половине рабочего давления) наименьшая собственная скорость составит 170 км/ч, что всего на 5 % меньше, чем при рабочем давлении. Дальнейшее повышение давления в шине приводит к ожидаемому увеличению собственных скоростей, наиболее заметно проявляясь в беговой дорожке.

Влияние на собственные скорости оказывает и выбор материалов шины. Для оценки этого влияния поверхностную плотность слоя каркаса искусственно увеличили с 1,28 до 2,6 кг/м<sup>2</sup>, что привело к снижению наименьшей соб-

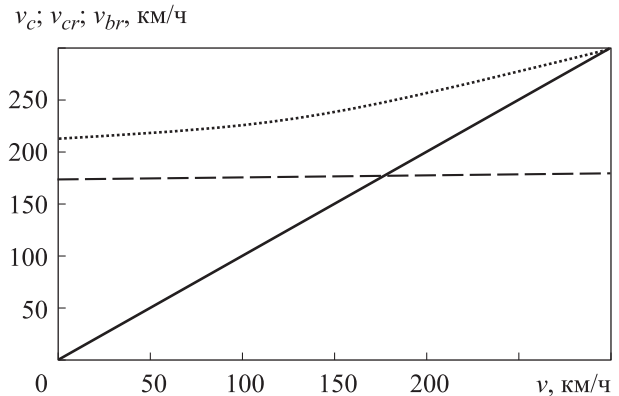


Рис. 10. Взаимосвязь между наименьшей скоростью качения  $v_{cr}$  (.....), скоростью качения, вызывающей колебания брекера,  $v_{br}$  (---) и заданной скоростью качения  $v_c$  (—)

ственной частоты вращения до значения, соответствующего скорости качения  $v = 170$  км/ч.

Полученные результаты согласуются с существующими представлениями о том, что увеличение внутреннего давления в шине и облегчение ее конструкции повышают ее критическую скорость.

## Выводы

1. Предложен расчетный метод, позволяющий определять собственные скорости качения шины с учетом геометрических характеристик, свойств материалов и внутреннего давления.

2. Показано, что развитие волн деформаций, неподвижно ориентированных в пространстве, может начинаться в шине при скоростях, заметно меньших тех, что наблюдаются в эксперименте с беговым барабаном, поскольку эти волны возникают не в беговой дорожке, а на боковине шины и не проявляются так явно, как волны в брекере, однако способны оказывать влияние на эксплуатационные характеристики шины. Спектр собственных частот вращения оказывается достаточно плотным, с постепенным переходом от менее опасных форм колебаний в боковине к более опасным в области края беговой дорожки и далее в брекере, что соответствует экспериментальным наблюдениям о плавном нарастании потерь на качение при превышении частотой вращения колеса некоторых значений, меньших тех, при которых колебания в беговой дорожке становятся очевидными [1].

3. Разработанный метод позволяет проводить анализ колебательного процесса в шине во



всем диапазоне частот вращения (от наименьших собственных до предельных рабочих) без необходимости моделирования процесса качения и решения контактной задачи. Для каждой собственной частоты вращения определяется

значение собственного вектора степеней свободы, позволяющего визуально представить процесс волнообразования с точностью до постоянного множителя.

## Литература

- [1] Бухин Б.Л. *Введение в механику пневматических шин*. Москва, Химия, 1988. 223 с.
- [2] Gardner E.R., Worswick T. Behaviour of tyres at high speed. *Trans. I.R.I.*, 1951, vol. 27, pp. 127–146.
- [3] Бидерман В.Л., Бухин Б.Л. Расчет критической скорости качения пневматической шины. *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*, 1961, № 1, с. 52–57.
- [4] Бидерман В.Л. *Расчет резино-металлических и резинокордных элементов машин*. Дисс. ... д-ра техн. наук. Москва, НИИШП, 1958. 372 с.
- [5] Бидерман В.Л. К расчету критической скорости качения пневматической шины. *Труды НИИШП*, 1957, № 3, с. 64–75.
- [6] Padovan J. On viscoelasticity and standing waves in tires. *Tire Sci. Technol.*, 1976, vol. 4, no. 4, pp. 233–246, doi: <https://doi.org/10.2346/1.2167224>
- [7] Soedel W. On the dynamic response of rolling tires according to thin shell approximations. *J. Sound Vib.*, 1975, vol. 41, no. 2, pp. 233–246, doi: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(75\)80099-X](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80099-X)
- [8] Белкин А.Е., Одинцов О.А. Численное решение геометрически нелинейной задачи контакта автомобильной шины с твердой опорной поверхностью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2007, № 1, с. 20–35.
- [9] Sun P.F., Huang H.W., Zhou T.H. et al. Experiment and analysis of cord stress on high-speed radial tire standing waves. *Shock Vib.*, 2019, vol. 2019, art. 3607670, doi: <https://doi.org/10.1155/2019/3607670>
- [10] Белкин А.Е., Нарская Н.Л., Одинцов О.А. Нелинейные контактные задачи стационарного качения автомобильной шины. *Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Труды XXII Межд. конф.* Санкт-Петербург, Моринтех, 2007, с. 57–62.
- [11] Brockman R.A., Champion J.H., Medzorian J.P. Finite element analysis of tire critical speeds. *Comput. Struct.*, 1992, vol. 43, no. 3, pp. 581–593, doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90290-G](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90290-G)
- [12] Белкин А.Е. Разработка системы моделей и методов расчета напряженно-деформированного и теплового состояний автомобильных радиальных шин. Дисс. ... д-ра техн. наук. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 284 с.
- [13] Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Численный анализ деформаций автомобильной шины при стационарном качении. В: *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 71–89.
- [14] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва, Мир, 1975. 541 с.
- [15] Одинцов О.А. Разработка математической модели радиальной цельнометаллокордной шины с учетом гиперупругих свойств резины. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2013, № 3, с. 11–27.

## References

- [1] Bukhin B.L. *Vvedenie v mekhaniku pnevmaticheskikh shin* [Introduction into mechanics of pneumatic tyres]. Moscow, Khimiya Publ., 1988. 223 p. (In Russ.).
- [2] Gardner E.R., Worswick T. Behaviour of tyres at high speed. *Trans. I.R.I.*, 1951, vol. 27, pp. 127–146. (In Russ.).
- [3] Biderman V.L., Bukhin B.L. Calculation of critical rolling speed of a pneumatic tire. *Izvestiya AN SSS. OTN. Mekhanika i mashinostroenie*, 1961, no. 1, pp. 52–57. (In Russ.).
- [4] Biderman V.L. *Raschet rezino-metallicheskih i rezinokordnykh elementov mashin*. Diss. dok. tekhn. nauk [Calculation of rubber-metallic and rubber-cord elements of machines. Doc. tech. sci. diss.]. Moscow, NIIShP Publ., 1958. 372 p. (In Russ.).

- [5] Biderman V.L. On calculation of critical rolling speed of a pneumatic tire. *Trudy NIISHP*, 1957, no. 3, pp. 64–75. (In Russ.).
- [6] Padovan J. On viscoelasticity and standing waves in tires. *Tire Sci. Technol.*, 1976, vol. 4, no. 4, pp. 233–246, doi: <https://doi.org/10.2346/1.2167224>
- [7] Soedel W. On the dynamic response of rolling tires according to thin shell approximations. *J. Sound Vib.*, 1975, vol. 41, no. 2, pp. 233–246, doi: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(75\)80099-X](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(75)80099-X)
- [8] Belkin A.E., Odintsov O.A. Numerical solution of geometrically non-linear problem of contact of automobile tire with solid supporting surface. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2007, no. 1, pp. 20–35. (In Russ.).
- [9] Sun P.F., Huang H.W., Zhou T.H. et al. Experiment and analysis of cord stress on high-speed radial tire standing waves. *Shock Vib.*, 2019, vol. 2019, art. 3607670, doi: <https://doi.org/10.1155/2019/3607670>
- [10] Belkin A.E., Narckaya N.L., Odintsov O.A. [Nonlinear contact problems of stationary rolling of a vehicle tire]. *Matematicheskoe modelirovanie v mekhanike deformiruemyykh tel i konstruksiy. Metody granichnykh i konechnykh elementov. Trudy XXII Mezhd. konf. [Mathematical Modeling in Mechanics of Deforming bodies and Constructions. Boundary and Finite Elements Methods. Proc. XXII Int. Conf.]*. Sankt-Peterburg, Morintekh Publ., 2007, pp. 57–62. (In Russ.).
- [11] Brockman R.A., Champion J.H., Medzorian J.P. Finite element analysis of tire critical speeds. *Comput. Struct.*, 1992, vol. 43, no. 3, pp. 581–593, doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90290-G](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90290-G)
- [12] Belkin A.E. *Razrabotka sistemy modeley i metodov rascheta napryazhenno-deformirovannogo i teplovogo sostoyaniy avtomobil'nykh radial'nykh shin*. Diss. dok. tekhn. nauk [Development model systems and methods for calculation of stress-strain and thermal states of vehicle radial tires. Doc. tech. sci. diss.]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1998. 284 p. (In Russ.).
- [13] Belkin A.E., Narskaya N.L. Chislennyy analiz deformatsiy avtomobil'noy shiny pri statsionarnom kachenii [Numerical analysis of vehicle tire deformations at stationary rolling]. V: *Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin* [In: Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2005, pp. 71–89.
- [14] Zienkiewicz O.C. *The finite element method in engineering science* London. McGraw-Hill, 1971. 521 p. (Russ. ed.: *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. Moscow, Mir Publ., 1975. 541 p.)
- [15] Odintsov O.A. Development of mathematical model of a radial solid metal cord tyre with hyperelastic properties of rubber taken into account. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2013, no. 3, pp. 11–27. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 23.06.2022

## Информация об авторе

**ОДИНЦОВ Олег Александрович** — кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная механика». МГТУ им. Н.Э.Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: [odintsov@bmstu.ru](mailto:odintsov@bmstu.ru)).

## Information about the author

**ODINTSOV Oleg Aleksandrovich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Applied Mechanics Department. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: [odintsov@bmstu.ru](mailto:odintsov@bmstu.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Одинцов О.А. Расчет критической скорости качения автомобильной радиальной шины методом конечных элементов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 12, с. 70–79, doi: [10.18698/0536-1044-2022-12-70-79](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-12-70-79)

### Please cite this article in English as:

Odintsov O.A. Calculation of Critical Velocity of a Rolling Radial Tire Using the Finite Element Method. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 12, pp. 70–79, doi: [10.18698/0536-1044-2022-12-70-79](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-12-70-79)