УДК 621.9.06 doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-43-53

Динамическая диагностическая 3D-модель шпинделя шлифовального станка. Гибридный способ моделирования

А.Г. Ширшов

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Dynamic Diagnostic 3D Simulation of a Grinding Machine Spindle. Hybrid Simulation Method

A.G. Shirshov

Bauman Moscow State Technical University

На примере шпинделя шлифовального станка рассмотрен гибридный (численно-аналитический) способ моделирования ротора с жестким валом. Описана пространственная динамическая модель ротора с учетом асимметрии жесткости опор, построенная этим способом. Показано, что благодаря введению асимметрии жесткости опор пространственная модель позволяет объяснить ряд физических явлений, включая расщепление частоты в спектре, которые принципиально невозможно объяснить при использовании плоских осесимметричных моделей.

Ключевые слова: гибридный способ моделирования, пространственная динамическая модель, асимметрия жесткости опор, вибродиагностика ротора, шпиндель шлифовального станка, ротор

We use a grinding machine spindle as an example to consider a hybrid (numerical and analytical) method of simulating a rotor with a rigid shaft. The paper describes a spatial dynamic model of the rotor constructed via this method that takes into account support stiffness asymmetry. We show that introducing support stiffness asymmetry allows the spatial simulation to explain a number of physical phenomena, including spectrum frequency splitting, which are fundamentally impossible to explain when using flat axially symmetric models.

Keywords: hybrid simulation method, spatial dynamic model, support stiffness asymmetry, rotor vibration diagnostics, grinding machine spindle

Для моделирования динамических свойств и построения диагностических моделей роторных систем часто используют плоскую расчетную схему в виде многоопорной балки [1, 2]. Плоскую модель выбирают из допущения, что свойства реальной конструкции близки к таковым для осесимметричной модели вала на упругих опорах. В частности, предполагают, что жесткость опор вала шпинделя не изменяется по углу поворота.

Однако эти предположения не могут быть приняты при построении диагностической модели ротора, так как его реальные опоры обладают жесткостной и диссипативной асимметрией, т. е. его жесткостные и диссипативные свойства различны по углу поворота ротора.

* Исследование выполнено в рамках проекта № 0705-2020-0034 «Научное обоснование и разработка виброакустических методов высокого разрешения для исследования и испытаний изделий машиностроения в рамках концепции «цифровое производство».

Асимметрия приводит к явлениям, необъяснимым в рамках плоской модели.

Основным является расщепление частот на спектре. Кроме того, с ростом асимметрии уменьшается предельная амплитуда вибраций при попадании на резонансную частоту, т. е. негативный эффект от резонанса снижается. Асимметрию жесткости опоры можно учесть только в пространственной модели ротора. Соответственно, только пространственные модели пригодны для вибродиагностики ротора.

Другим распространенным подходом к решению задач динамики ротора является использование программ конечно-элементного моделирования (ANSYS, Nastran и др.). Их применение требует достаточно высокой квалификации, так как ошибочный выбор типа конечного элемента и прочих условий моделирования приведет к некорректным результатам.

Предлагаемая далее расчетная модель существенно проще для понимания, что делает использование CAE-программ неоптимальным решением. Следует отметить, что CAE-программа не поможет, если в ней создавать осесимметричные модели.

Рассмотрим применение гибридного способа построения диагностических моделей роторов на примере шпинделя шлифовального станка (рис. 1). При этом способе матрицы жесткости и инерции формируют аналитически, но с использованием правил метода конечных элементов, после чего применяют численные методы для определения собственных частот и форм колебаний и получения частотных характеристик.

Аналитическая модель позволяет определить зависимости между физическими величинами. Численные методы используют в случаях, когда аналитические преобразования становятся слишком сложными. Сочетание аналитических и численных подходов снижает сложность гибридной модели, что упрощает понимание и анализ физических процессов и достижение прочих целей расчета.

Цель работы — показать, что для адекватной вибродиагностики ротора подходят не плоские, а пространственные осесимметричные модели, и продемонстрировать простоту и мощь гибридного способа моделирования. Предполагается, что созданные таким способом модели могут быть полезными при экспресс-диагностике роторов, в частности шпиндельных узлов станков.

Формирование динамической модели шпинделя. Вал *2* шпинделя шлифовальной бабки (см. рис. 1) установлен в двух гидродинамических подшипниках скольжения *3* [3]. Подшипники имеют по три одинаковых вкладыша, которые представляют собой отдельные сегменты. Вкладыши сферическими лунками опираются на винты *4* со сферическими головками, вследствие чего вкладыши самоустанавливаются по шейкам шпинделя. Эти винты имеют мелкую резьбу. Вращая винты, можно тонко регулировать зазор между сегментом и валом. На конце вала насажен шлифовальный круг *1*.

Построим модель этого шпинделя. Вал шпинделя со шлифовальным кругом примем за одно абсолютно жесткое тело, вращающееся с постоянной скоростью вокруг горизонтальной оси (рис. 2). Трехсегментные упругие опоры расположены в плоскостях $O_1x_1y_1$ и $O_2x_2y_2$ под

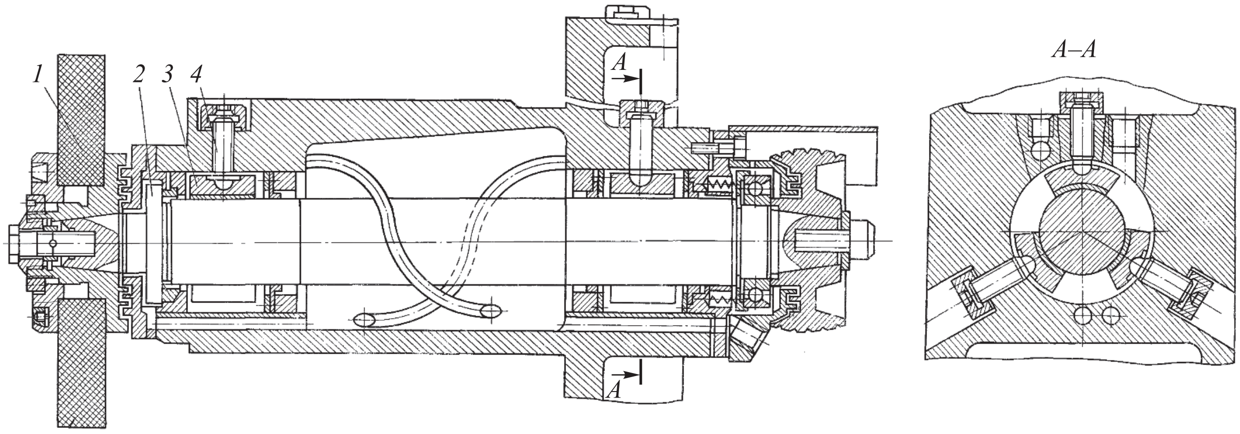

Рис. 1. Схема шлифовальной бабки шлифовального станка

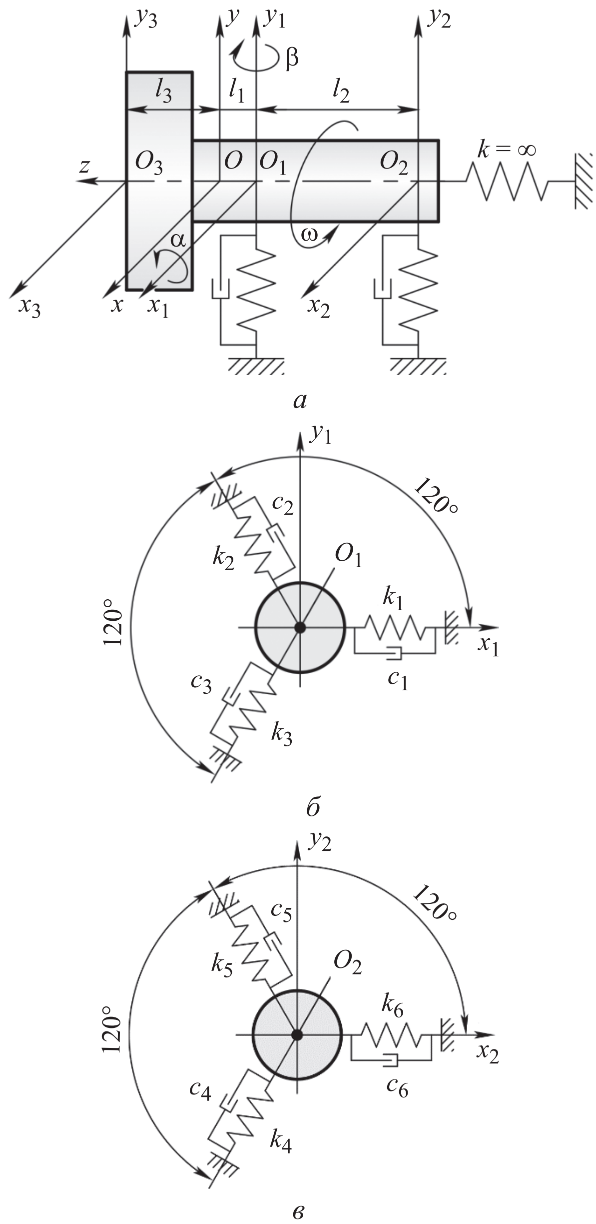

Рис. 2. Расчетные схемы абсолютно жесткого вала на упругих опорах (c_i — коэффициент демпфирования; $i = 1, \ldots, 6$; ω — круговая частота вращения): *а* — вид сбоку; *б* — передняя опора; *в* — задняя опора

углом 120° (рис. 2, *б* и *в*). Пусть жесткости пружин постоянны и равны k_i $i = 1, \ldots, 6$.

Будем считать, что в точке O на оси вала находится его центр масс, т. е. в ней расположена сосредоточенная масса, значение которой равно m. Моменты инерции вокруг осей x и y равны I_x и I_y соответственно. Расстояние от центра масс до передней опоры равно l_1, до задней — l_2, расстояние от переднего конца вала до центра масс — l_3.

Для исследования динамических характеристик шпинделя требуется решить задачу о собственных значениях, т. е. решить следующее уравнение:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0, \tag{1}$$

где $[M]$ — глобальная матрица инерции ротора (вала на опорах); $\{\ddot{u}\}$ и $\{u\}$ — вектор ускорений и перемещений рассматриваемой точки системы соответственно; $[K]$ — глобальная матрица жесткости.

Уравнение динамики (1) составляют для одной точки. В случае вала шпинделя исследования проводят для переднего торца шпинделя — точки O_3, так как ее смещения существенно сказываются на точности обработки на станке. Соответственно, уравнение (1) составляют для точки O_3.

Коэффициенты демпфирования, рассчитанные только по справочным данным, определяются с большой погрешностью (до 50...100 %). Чтобы не терять достоверность расчетов, используют модальные коэффициенты демпфирования, получаемые при испытаниях конкретной конструкции или рассчитанные по результатам испытаний опор [4–6]. По этой причине в динамической модели нет слагаемого, связанного с вязким сопротивлением.

Для получения глобальной матрицы жесткости $[K]$ сначала составим матричное уравнение, связывающее упругие силы реакции в опорах с упругими перемещениями в точках O_1 и O_2. Примем u_{1x} и u_{1y} — перемещения точки O_1 передней опоры, u_{2x} и u_{2y} — перемещения точки O_2 задней опоры. Соответственно, для точки O_1 упругими реакциями опор являются силы F_{kx1} и F_{ky1}, для точки O_2 — F_{kx2} и F_{ky2}. Матричное уравнение, связывающее силы реакции с упругими перемещениями:

$$\begin{bmatrix} F_{kx1} \\ F_{ky1} \\ F_{kx2} \\ F_{ky2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* & k_{13}^* & k_{14}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* & k_{23}^* & k_{24}^* \\ k_{31}^* & k_{32}^* & k_{33}^* & k_{34}^* \\ k_{41}^* & k_{42}^* & k_{43}^* & k_{44}^* \end{bmatrix}}_{[K^*]} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $[K^*]$ — глобальная матрица жесткости в координатах опор вала; $k_{11}^* = (4k_1 + k_2 + k_3)/4$; $k_{12}^* = k_{21}^* = \sqrt{3}/4\,(k_3 - k_2)$; $k_{22}^* = 3/4\,(k_2 + k_3)$; $k_{33}^* = (4k_4 + k_5 + k_6)/4$; $k_{34}^* = k_{43}^* = \sqrt{3}/4\,(k_6 - k_5)$; $k_{44}^* = 3/4\,(k_5 + k_6)$; $k_{13}^* = k_{14}^* = k_{23}^* = k_{24}^* = k_{31}^* = k_{32}^* = {}$ $= k_{41}^* = k_{42}^* = 0$.

Для перехода в координатную систему точки O_3 необходимо составить матричное уравнение равновесия между упругими силами и моментами в точке O_3 M_{kx3}, M_{ky3} и в точках O_1 и O_2:

$$\begin{bmatrix} F_{kx3} \\ F_{ky3} \\ M_{kx3} \\ M_{ky3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & l_1+l_3 & 0 & l_1+l_2+l_3 \\ l_1+l_3 & 0 & l_1+l_2+l_3 & 0 \end{bmatrix}}_{[T_k]^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} F_{kx1} \\ F_{ky1} \\ F_{kx2} \\ F_{ky2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

где $[T_k]$ — матрица преобразования для сил упругости.

Также составим уравнение связи координат для точек O_1, O_2 и O_3:

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

где u_{x3}, u_{y3} и φ_{x3}, φ_{y3} — линейные и угловые перемещения точки O_3 соответственно.

С учетом уравнений (2)–(4) глобальная матрица жесткости приобретает вид

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix},$$

где

$$k_{11} = k_1 + \frac{k_2}{4} + \frac{k_3}{4} + k_4 + \frac{k_5}{4} + \frac{k_6}{4};$$

$$k_{21} = k_{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3 - k_2) + \frac{\sqrt{3}}{4}(k_6 - k_5);$$

$$k_{22} = \frac{3}{4}(k_2 + k_3 + k_5 + k_6);$$

$$k_{31} = k_{13} = \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3 - k_2)(l_1 + l_3) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{4}(k_6 - k_5)(l_1 + l_2 + l_3);$$

$$k_{32} = k_{23} = \frac{3}{4}(k_2 + k_3)(l_1 + l_3) + \\ + \frac{3}{4}(k_5 + k_6)(l_1 + l_2 + l_3);$$

$$k_{33} = \frac{3}{4}(k_2 + k_3)(l_1 + l_3)^2 + \\ + \frac{3}{4}(k_5 + k_6)(l_1 + l_2 + l_3)^2;$$

$$k_{41} = k_{14} = \left(k_1 + \frac{k_2}{4} + \frac{k_3}{4}\right)(l_1 + l_3) + \\ + \left(k_4 + \frac{k_5}{4} + \frac{k_6}{4}\right)(l_1 + l_2 + l_3);$$

$$k_{42} = k_{24} = \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3 - k_2)(l_1 + l_3) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{4}(k_6 - k_5)(l_1 + l_2 + l_3);$$

$$k_{43} = k_{34} = \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3 - k_2)(l_1 + l_3)^2 + \\ + \frac{\sqrt{3}}{4}(k_6 - k_5)(l_1 + l_2 + l_3)^2;$$

$$k_{44} = \left(k_1 + \frac{k_2}{4} + \frac{k_3}{4}\right)(l_1 + l_3)^2 + \\ + \left(k_4 + \frac{k_5}{4} + \frac{k_6}{4}\right)(l_1 + l_2 + l_3)^2.$$

Аналогично, для получения глобальной матрицы инерции $[M]$ сначала надо составить матричное уравнение для точки O, где расположена сосредоточенная масса. Это уравнение связывает силы F_{mx}, F_{my} и моменты M_{mx}, M_{my} с линейными $\ddot{u}_x$, $\ddot{u}_y$ и угловыми $\ddot{\varphi}_x$, $\ddot{\varphi}_y$ ускорениями:

$$\begin{bmatrix} F_{mx} \\ F_{my} \\ M_{mx} \\ M_{my} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}}_{[M^*]} \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $[M^*]$ — глобальная матрица масс в координатах xy точки O.

Чтобы в уравнениях (2) и (3) перейти в координаты точки O_3, следует составить матричное уравнение, связывающее силы инерции точек O и O_3:

$$\begin{bmatrix} F_{mx} \\ F_{my} \\ M_{mx} \\ M_{my} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T_m]^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} F_{mx3} \\ F_{my3} \\ M_{mx3} \\ M_{my3} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $[T_m]$ — матрица преобразования для сил инерции.

Также надо составить уравнение связи ускорений точек O и O_3:

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[T_m]} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{x3} \\ \ddot{u}_{y3} \\ \ddot{\varphi}_{x3} \\ \ddot{\varphi}_{y3} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

С учетом уравнений (5)–(7), глобальная матрица инерции принимает вид

$$[M] = [T_m]^{\mathrm{T}} [M^*][T_m] =$$
$$= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & l_3 m \\ 0 & m & l_3 m & 0 \\ 0 & l_3 m & I_x + l_3^2 m & 0 \\ l_3 m & 0 & 0 & I_y + l_3^2 m \end{bmatrix}.$$

Матрицы $[M]$ и $[K]$ симметричны относительно своих главных диагоналей.

Решение задачи о собственных значениях и построение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ). Имея глобальные матрицы жесткости $[K]$ и инерции $[M]$, можно решать задачу о собственных значениях [7]. Решение задачи аналитическими методами слишком трудоемко, поэтому будем использовать численные методы.

Для выполнения расчетов используем интерактивную среду JupyterLab [8]. Код на языке Python 3.10 [9]. Основные операции по обработке матриц будут выполняться с помощью библиотеки Numpy [10], а построение графиков — с помощью библиотеки Matplotlib [11].

Исходные данные [3]:

- сосредоточенная масса вала m = 86 кг;
- момент инерции вала вокруг оси x I_x = = 3,4 кг·м^2;
- момент инерции вала вокруг оси y $I_y = I_x$;
- жесткость пружины k = 2,1·10^9 Н/м;
- коэффициент демпфирования c = 1,85 × × 10^5 Н·с/м;
- длина l_1 = 0,01 м;
- длина l_2 = 0,37 м;
- длина l_3 = 0,18 м;
- относительный коэффициент демпфирования ξ = 0,05.

Если жесткости всех пружин равны $(k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k)$, имеем следующие собственные частоты f_i, Гц:

- 805,112933;
- 805,112933;
- 2144,40620;
- 2144,40620.

Получили две пары собственных частот: 805 и 2144 Гц. Следует отметить, что эти частоты не просто близки по значению, а совпадают с высокой точностью (не менее пяти знаков после запятой).

Собственные векторы, соответствующие найденным собственным частотам:

- $\begin{bmatrix} -0,4325 & 0 & 2,04 \cdot 10^{-16} & 0,90163 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;
- $\begin{bmatrix} -4,8025 \cdot 10^{-2} & 0 & 2,27 \cdot 10^{-16} & 0,99885 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;
- $\begin{bmatrix} -0,0217 & 0,0428 & -0,8909 & 0,45147 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$;
- $\begin{bmatrix} -0,0174 & -0,4321 & 0,9009 & 0,0363 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Построим АЧХ для данного случая. АЧХ представляет собой графическую зависимость модальной податливости h_{pq} от частоты f. Здесь p — индекс координаты реакции; q — индекс координаты входного воздействия. Применительно к трехмерной модели: $x \to 1$, $y \to 2$, $z \to 3$, $\alpha \to 4$, $\beta \to 5$, $\gamma \to 6$, где α, β и γ — угловые координаты: углы поворота вокруг оси x, y и z соответственно.

Податливость в общем понимании этого термина есть отношение упругого смещения к вызвавшей его силе. Модальная податливость — отношение реакции (линейное или угловое перемещение) к величине вызвавшего ее воздействия (силе или моменту).

Модальная податливость определяется выражением [4]

$$h_{pq}(f) = \frac{X_p}{F_q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{pk}\varphi_{qk}}{\omega_{ok}^2 \left[1 - \left(\frac{f}{f_{ok}} \right)^2 + 2j\xi_k \left(\frac{f}{f_{ok}} \right) \right]}, \quad (8)$$

где X_p — реакция (линейное или угловое перемещение) по координате p; F_q — воздействие (сила или момент) по координате q; φ_{pk} — значение p-й строки и k-го столбца нормированной модальной матрицы; φ_{qk} — значение q-й строки и k-го столбца нормированной модальной матрицы; ω_{ok} — k-я круговая собственная частота; f — частота, для которой определяем модальную податливость; f_{ok} — k-я собственная частота, $k = 1, \ldots, n$ (n — число степеней свободы рассматриваемой системы); j — мнимая единица; ξ_k — модальный коэф-

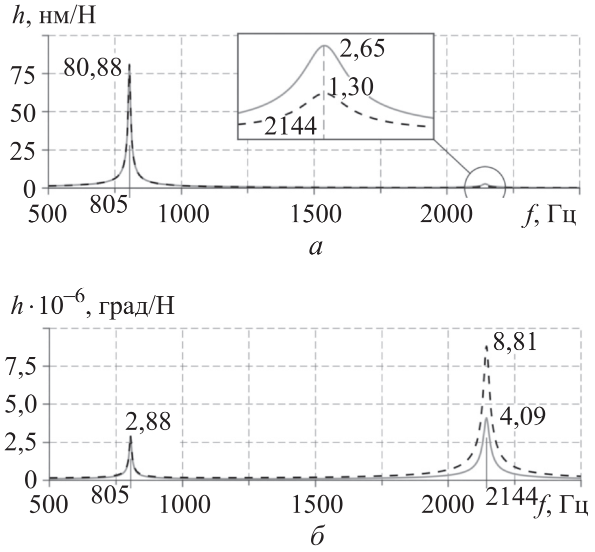

Рис. 3. АЧХ ротора при отсутствии асимметрии жесткости $(k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k)$ в линейных (*а*) и угловых (*б*) координатах

фициент демпфирования для k-го значения собственной частоты f_{ok}.

При наличии экспериментальных значений коэффициентов демпфирования ξ_k их можно подставить в уравнение (8).

АЧХ ротора для данного случая показаны на рис. 3, где h — модальная податливость. Согласно рис. 3, на частотах 805 и 2144 Гц имеются пары совпадающих пиков, и стороннему наблюдателю будет казаться, что в спектре есть только два пика. Динамическое усилие прикладывается на торце вала по некоторой линейной или угловой координате. Максимальное смещение, вызванное этой нагрузкой, снимается в той же точке вала по той же координате.

На рис. 3, *а* сплошные линии соответствуют приложению усилия и считыванию смещения вдоль оси y, штриховые — вдоль оси z. На рис. 3, *б* сплошные линии соответствуют приложению усилия и считыванию углового смещения вдоль координаты β, штриховые — вдоль координаты γ.

Влияние асимметрии жесткости опор вала на расщепление частот на спектре и высоту пиков АЧХ. Определим, как увеличение степени асимметрии жесткости опор вала влияет на собственные частоты и высоту пиков. Пусть $\psi = k_{x\,\text{оп}}/k_{y\,\text{оп}}$, где $k_{x\,\text{оп}}$ и $k_{y\,\text{оп}}$ — жесткость опоры вала по вертикали и горизонтали соответственно. Жесткости пружины, наклоненной под углом φ к оси x, вдоль координатных осей x и y определяются следующим образом:

$$k_x = k\cos^2\varphi; \quad k_y = k\sin^2\varphi.$$

Квадрат у косинуса обусловлен тем, что один косинус есть результат проекции силы растяжения-сжатия пружины на ось x, а другой — результат проекции изменения длины пружины на ось x. Аналогичным образом получается квадрат синуса.

Жесткость опоры до введения асимметрии $(k_1 = k_2 = k_3 = k)$:

- вдоль оси x

$$k_{x\,\text{оп}} = k\cos^2 0° + k\cos^2 120° + k\cos^2 240° = 1{,}5k;$$

- вдоль оси y

$$k_{y\,\text{оп}} = k\sin^2 0° + k\sin^2 120° + k\sin^2 240° = 1{,}5k.$$

Таким образом, для обеспечения асимметрии жесткости опор вала ψ к жесткости горизонтальных пружин k_1 и k_4 необходимо добавить жесткость $1{,}5k(1-\psi)$.

Пусть значения асимметрии жесткости опор вала $\psi = [1{,}0 \ \ 1{,}1 \ \ 1{,}2 \ \ 1{,}3 \ \ 1{,}4 \ \ 1{,}5]$. Подставив для каждого случая жесткости в глобальную матрицу жесткости и решив задачу о собственных значениях, получим АЧХ для различных значений асимметрии жесткости опор ψ (рис. 4). На графиках в линейных координатах (слева) сплошные линии соответствуют приложению усилия и считыванию смещения на переднем конце вала вдоль оси y, штриховые — вдоль оси z. На графиках в угловых координатах (справа) сплошные линии соответствуют приложению усилия и считыванию углового смещения на переднем конце вала вдоль координаты β, штриховые — вдоль координаты γ.

Согласно полученному графику, с ростом асимметрии жесткости опор вала происходит расщепление пиков и их отдаление друг от друга, при этом высота пиков постепенно уменьшается. Значение расщепления частоты линейно зависит от степени асимметрии ψ.

Влияние угла наклона силы на АЧХ. Пусть сила F поворачивается на некоторый угол φ, как показано на рис. 5.

Модальная податливость h_{11} (воздействие подается по оси x, реакция снимается по оси x) есть отношение реакции x к динамическому усилию F_x: $h_{11} = x/F_x$. Когда сила F наклонена на угол φ относительно оси x, то динамиче-

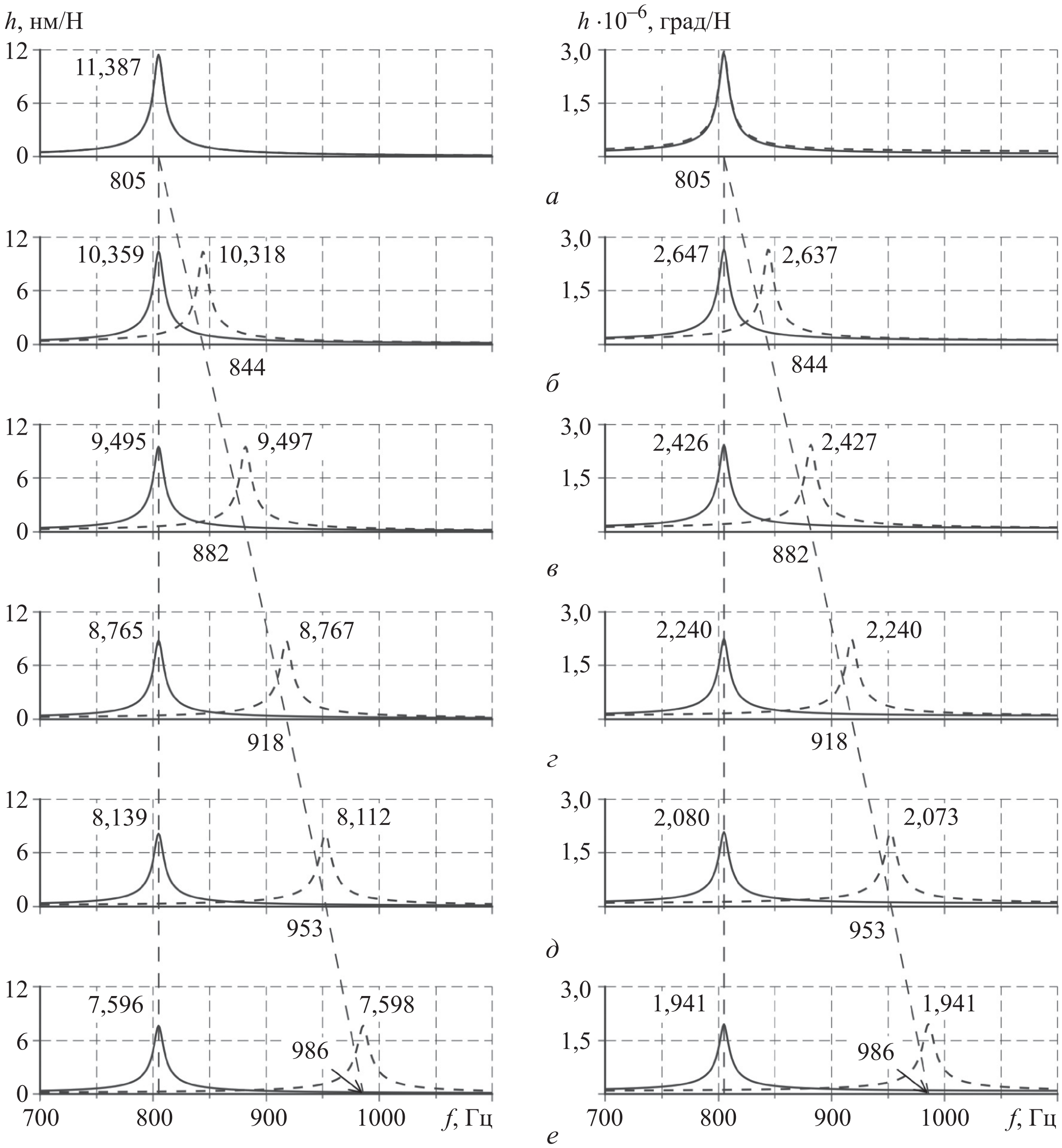

Рис. 4. Расщепление частоты с ростом асимметрии жесткости опор вала в линейных (слева) и угловых (справа) координатах при различных значениях степени асимметрии жесткости опор вала:
а — $\psi = 0$ %; *б* — $\psi = 10$ %; *в* — $\psi = 20$ %;
г — $\psi = 30$ %; *д* — $\psi = 40$ %; *е* — $\psi = 50$ %

ское воздействие вдоль оси x составит $F\cos\varphi$. Тогда модальная податливость с учетом угла поворота φ $h_{11\varphi} = h_{11}\cos\varphi$. Рассуждая аналогично, для оси y получаем, что $h_{22\varphi} = h_{22}\sin\varphi$.

Таким образом, поворот вектора силы F вокруг оси вала влияет только на высоту пиков на графике АЧХ и не приводит к смещению частот на спектре. Изменение высоты пиков АЧХ показано на рис. 6. Собственная частота для всех значений угла поворота φ составляла 805 Гц. На рис. 6 серые линии соответствуют приложению усилия и смещению на переднем конце вала вдоль оси y, черные — вдоль оси z.

Влияние угла поворота опор вала на АЧХ. При повороте опоры углы наклона пружин становятся отличными от 0, 120 и 240°. В этом случае следует заново определить проекции сил упругих реакций отдельных пружин на оси x и y. Глобальная матрица жесткости $[K_\varphi]$ в функции угла поворота φ имеет вид

$$\left[K_\varphi\right]=\left[T_k\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}\left[T_k\right],$$

где

$$k_{11}=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+k_3\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k_{12}=k_1\sin\varphi\cos\varphi-k_2\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+k_3\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k_{21}=k_{12};$$

$$k_{22}=k_1\sin^2\varphi+k_2\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+k_3\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k_{33}=k_4\cos^2\varphi+k_5\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+k_6\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k_{34}=k_4\sin\varphi\cos\varphi-k_5\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+k_6\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right);$$

$$k_{43}=k_{34};$$

$$k_{44}=k_5\sin^2\varphi+k_6\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)+k_7\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right).$$

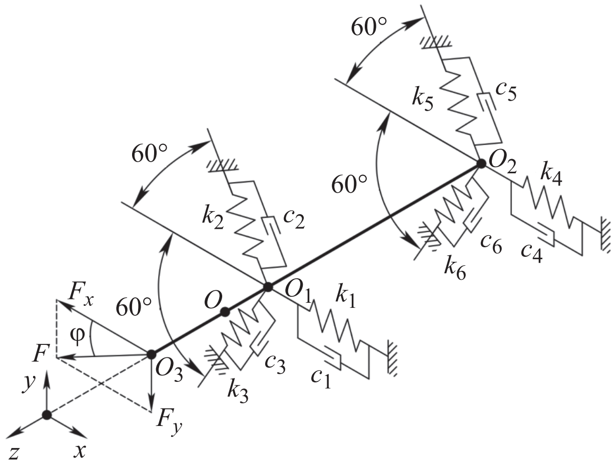

Рис. 5. Схема поворота силы F вокруг оси z

АЧХ ротора при угле их поворота $\varphi=$ 0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105 и 120° в линейных и угловых координатах приведены на рис. 7. На графиках в линейных координатах (слева) сплошные линии соответствуют приложению усилия и смещению на переднем конце вала вдоль оси y, штриховые — вдоль оси z. В угловых координатах (справа) сплошные линии соответствуют приложению усилия и смещению на переднем конце вала вдоль координаты β, штриховые — вдоль координаты γ. Согласно полученным графикам, поворот опоры не при-

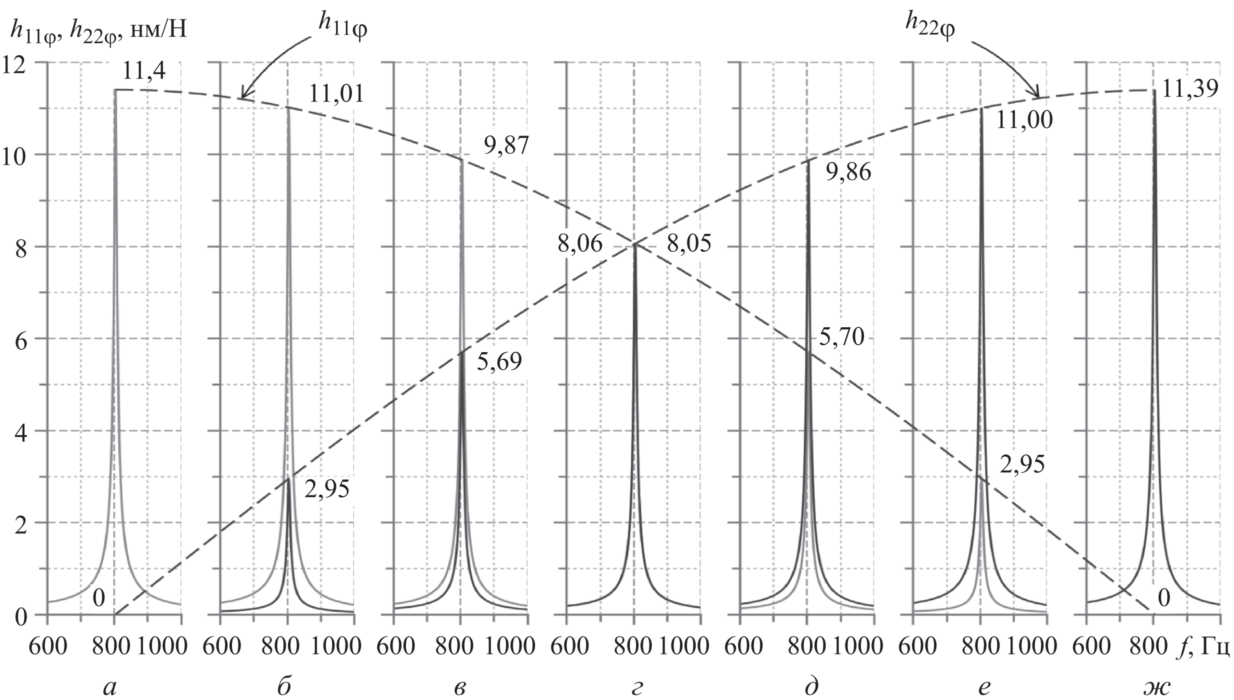

Рис. 6. Изменение высоты пиков АЧХ ротора с ростом угла его поворота:
а — $\varphi=$ 0°; *б* — $\varphi=$ 15°; *в* — $\varphi=$ 30°; *г* — $\varphi=$ 45°; *д* — $\varphi=$ 60°; *е* — $\varphi=$ 75°; *ж* — $\varphi=$ 90°

водит к смещению собственных частот на спектре, а только вызывает колебания высот пиков от нуля до их максимальных значений.

Диагностическая модель построена для шпинделя шлифовального станка на гидростатических опорах, но такой способ можно при-

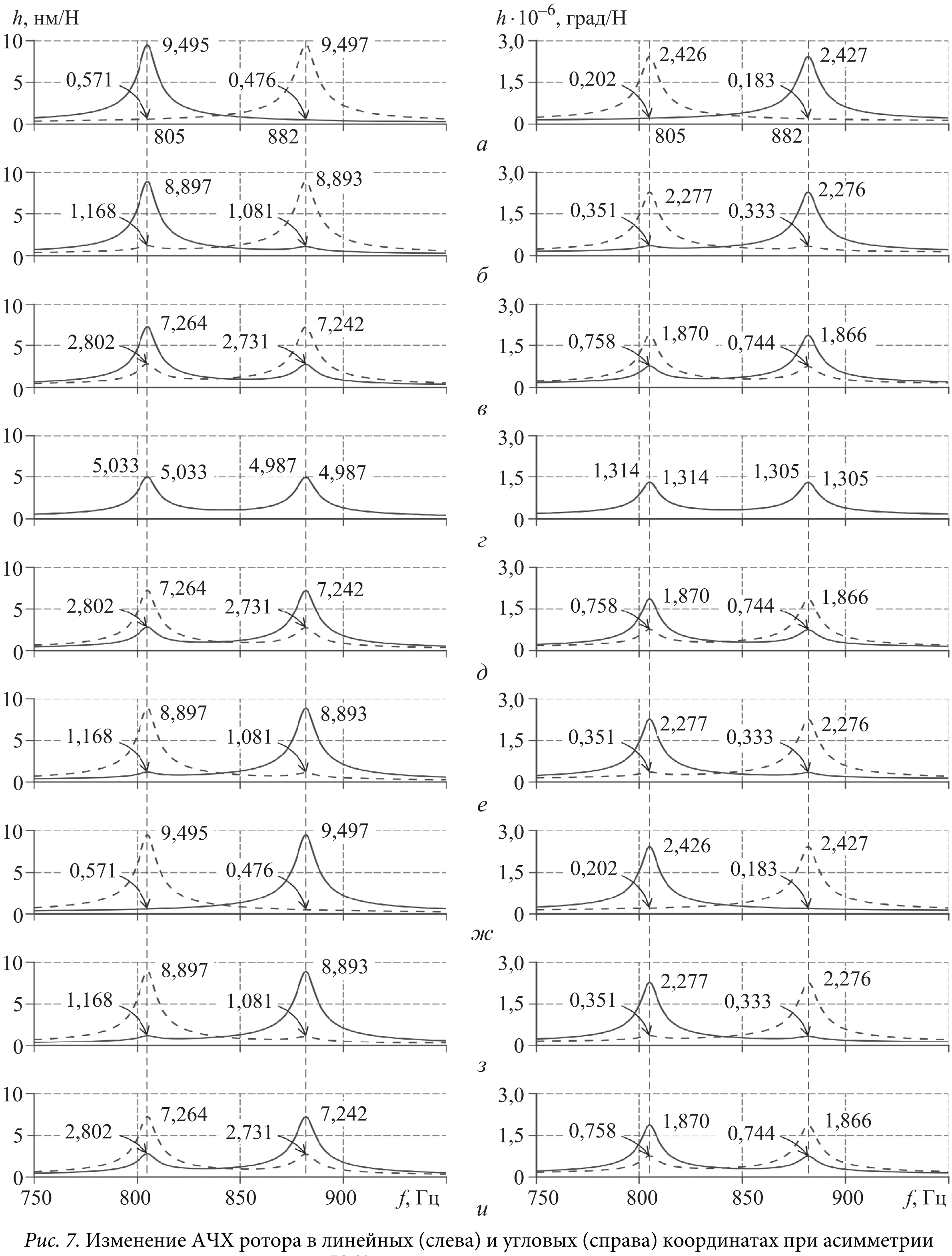

Рис. 7. Изменение АЧХ ротора в линейных (слева) и угловых (справа) координатах при асимметрии жесткости $\psi = 50$ % и различных значениях угла поворота опор:
а — $\varphi = 0°$; *б* — $\varphi = 15°$; *в* — $\varphi = 30°$; *г* — $\varphi = 45°$; *д* — $\varphi = 60°$;
е — $\varphi = 75°$; *ж* — $\varphi = 90°$; *з* — $\varphi = 105°$; *и* — $\varphi = 120°$

менять и для моделирования динамики шпиндельных узлов металлорежущих станков другого типа, в том числе на опорах качения.

Выводы

1. Получена диагностическая модель, позволяющая выявлять такие явления, как расщепление собственных частот и зависимость АЧХ ротора от угла ее поворота.

2. Установлено, что необходимым условием адекватного моделирования роторов в процессе диагностирования является использование трехмерной модели опор, т. е. двух взаимно перпендикулярных пружин в каждой опоре.

3. Несмотря на простоту, полученная модель позволяет решать практические задачи диагностирования роторов, включая учет влияния асимметрии жесткости и предварительного натяга опор на динамические свойства шпинделей.

Литература

[1] Хомяков В.С., Кочинев Н.А., Сабиров Ф.С. Моделирование и расчет динамических характеристик шпиндельных узлов. *Вестник УГАТУ*, 2009, т. 12, № 2, с. 69–75.

[2] Сабиров Ф.С., Боган А.Н., Михайлов И.С. Динамические характеристики шпиндельных узлов партии токарных станков с ЧПУ. *Станкостроение и инновационное машиностроение. Проблемы и точки роста*. Уфа, УГАТУ, 2020, с. 164–168.

[3] Рагульскис К.М., ред. *Автоматизированный расчет колебаний машин.* Ленинград, Машиностроение, 1988. 100 с.

[4] Досько С.И. *Параметрическая идентификация упругих систем станков (модальный анализ)*. Дисс. … канд. тех. наук. Москва, Мосстанкин, 1987. 242 с.

[5] Хомяков В.С., Досько С.И. Об учете демпфирования при динамических расчетах станков. *Станки и инструмент*, 1990, № 11, с. 4–7.

[6] Хомяков В.С., Досько С.И., Лю Ц. Идентификация упругих систем станков на основе модального анализа. *Станки и инструмент*, 1988, № 7, с. 11–14.

[7] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* Москва, Физматгиз, 1960. 656 с.

[8] *JupyterLab: a next-generation notebook interface.* URL: https://jupyter.org/ (дата обращения: 05.05.2022).

[9] *Python: a programming language.* URL https://www.python.org/ (дата обращения: 05.05.2022).

[10] Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, 2020, vol. 585, pp. 357–362, doi: https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2

[11] Hunter J.D. Matplotlib: a 2D graphics environment. *Comput. Sci. Eng.*, 2007, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, doi: https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55

References

[1] Khomyakov V.S., Kochinev N.A., Sabirov F.S. The modeling and calculation of dynamics of spindle assemblies. *Vestnik UGATU*, 2009, vol. 12, no. 2, pp. 69–75. (In Russ.).

[2] Sabirov F.S., Bogan A.N., Mikhaylov I.S. [Dynamic characteristics of spindle units of CNC lathes batch]. *Stankostroenie i innovatsionnoe mashinostroenie. Problemy i tochki rosta* [Machine-tool building and innovative machine building. Problems and growth points]. Ufa, UGATU Publ., 2020, pp. 164–168. (In Russ.).

[3] Ragul'skis K.M., ed. *Avtomatizirovannyy raschet kolebaniy mashin* [Automated calculation of machines oscillations]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1988. 100 p. (In Russ.).

[4] Dos'ko S.I. *Parametricheskaya identifikatsiya uprugikh sistem stankov (modal'nyy analiz).* Diss. kand. tekh. nauk [Parametric identification of mchines elastic systems (modal analysis). Kand. tech. sci. diss.]. Moscow, Mosstankin Publ., 1987. 242 p. (In Russ.).

[5] Khomyakov V.S., Dos'ko S.I. On taking into account damping property in dynamic computation of machines. *Stanki i instrument*, 1990, no. 11, pp. 4–7. (In Russ.).

[6] Khomyakov V.S., Dos'ko S.I., Lyu Ts. Identification of elastic machine systems based on modal analysis. *Stanki i instrument*, 1988, no. 7, pp. 11–14. (In Russ.).

[7] Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Vychislitel'nye metody lineynoy algebry* [Computational methods of linear algebra]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 656 p. (In Russ.).

[8] *JupyterLab: a next-generation notebook interface*. URL: https://jupyter.org/ (accessed: 05.05.2022).

[9] *Python: a programming language*. URL https://www.python.org/ (accessed: 05.05.2022).

[10] Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, 2020, vol. 585, pp. 357–362, doi: https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2

[11] Hunter J.D. Matplotlib: a 2D graphics environment. *Comput. Sci. Eng.*, 2007, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, doi: https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55

Статья поступила в редакцию 14.06.2022

Информация об авторе

ШИРШОВ Андрей Геннадьевич — инженер кафедры «Металлорежущие станки». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул. д. 5, к. 1, e-mail: sh.andr.gen@yandex.ru).

Information about the author

Shirshov Andrey Gennadievich — Engineer, Department of Machine Tools. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: sh.andr.gen@yandex.ru).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ширшов А.Г. Динамическая диагностическая 3D-модель шпинделя шлифовального станка. Гибридный способ моделирования. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 9, с. 43–53, doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-43-53

Please cite this article in English as:

Shirshov A.G. Dynamic Diagnostic 3D Simulation of a Grinding Machine Spindle. Hybrid Simulation Method. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 9, pp. 43–53, doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-43-53