

УДК 531.8, 621.01

doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-54-62

## Определение обобщенных реакций в механизмах параллельной структуры

П.А. Ларюшкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана

## Determining Generalised Contact Forces in Parallel Mechanisms

P.A. Laryushkin

Bauman Moscow State Technical University

Методы анализа, основанные на винтовом исчислении, являются главным инструментом исследования механизмов параллельной структуры. Рассмотрены особенности расчета обобщенных реакций в таких механизмах с числом степеней свободы, меньшим шести. Показано, что для вычисления искомой реакции, соответствующей некоторому силовому винту связи, накладываемой на выходное звено, необходимо спроецировать силовые винты активных кинематических пар цепей на векторное пространство, являющееся ортогональным дополнением пространства связей механизма. Применение предложенного подхода рассмотрено на примере поступательно-направляющего механизма с тремя степенями свободы.

**Ключевые слова:** механизмы параллельной структуры, винтовое исчисление, особые положения, поступательно-направляющий механизм, векторное пространство

Analysis methods utilising screw theory are the main tool for investigating parallel mechanisms. The paper considers the specifics of computing generalised contact forces in these mechanisms featuring less than six degrees of freedom. We show that, in order to calculate the desired contact force magnitude corresponding to a certain wrench of the constraint imposed onto the output link, it is necessary to project the wrenches of the active kinematic pairs in the chain onto a vector space representing an orthogonal complement to the link space of the mechanism. We use a translational guiding mechanism with three degrees of freedom as an example to apply our approach to.

**Keywords:** parallel mechanisms, screw theory, singularities, translational guiding mechanism, vector space

Механизмы параллельной структуры (МПС) находят все более широкое применение во многих областях техники [1], что повышает актуальность совершенствования существующих и разработки новых методов анализа таких механизмов.

При этом своего рода золотым стандартом в решении многих возникающих при анализе МПС задач являются методы, основанные на винтовом исчислении [2–5], а одним из их главных приложений — анализ особых поло-

жений (ОП) механизма. Наличие ОП является одним из главных недостатков МПС, который может существенно ограничить его реальную рабочую зону.

Для большинства таких механизмов возможны только два типа ОП: потеря степени выходным звеном (далее ОП типа ПС) и потеря управляемости этим же звеном (далее ОП типа ПУ). Анализ ОП данных типов зачастую можно провести без применения винтового исчисления путем дифференцирования уравнений связи [6].

Однако если МПС имеет меньше шести степеней свободы, то возможна ситуация, когда связи, накладываемые разными кинематическими цепями, вырождаются, и в механизме может возникнуть неконтролируемое перемещение вне рамок его изначальных степеней свободы. В такой ситуации говорят об ОП с вырождением связей (далее ОП типа ВС), впервые упомянутом К. Хантом [7] и подробно описанном Д. Златановым [8].

Анализ ОП механизма подразумевает не только определение точек рабочей зоны, в которых эти положения возникают, но и исследование близости к ним. Так, известно [9], что вблизи ОП типа ПС наблюдается возрастание скоростей в приводах, а вблизи ОП типа ПУ — нагрузок в них, а также снижение жесткости и точности позиционирования.

При этом подходы как к определению непосредственно ОП, так и близости к ним [10, 11], основанные на дифференцировании уравнений связи, не позволяют рассматривать ОП типа ВС. Их исследование становится возможным только с использованием винтового исчисления.

Близость к ОП типа ПУ и ВС можно оценить по значению так называемой обобщенной реакции — коэффициента пропорциональности, соответствующего определенному силовому винту МПС. Однако в механизмах, где могут возникнуть ОП обоих типов, также возможно взаимное влияние силовых винтов друг на друга, что может приводить к искажению реальных значений обобщенных реакций.

Цель работы — повышение точности расчета критериев близости к ОП для МПС путем учета возможного взаимного влияния силовых винтов.

**Определение силовых винтов механизма.** Рассмотрим некоторый МПС с числом степеней свободы  $n < 6$ . Без потери общности будем считать, что количество его кинематических цепей также равно  $n$ , и они содержат только одноподвижные кинематические пары, а также, что в каждой из цепей только одна кинематическая пара является приводной, а все остальные — пассивными.

Чтобы такой механизм мог функционировать, подвижность  $i$ -й кинематической цепи механизма  $m_i$  должна быть больше либо равна числу степеней свободы механизма, т. е.  $m_i \geq n$ . Каждой  $j$ -й кинематической паре  $i$ -й цепи мо-

жет быть поставлен в соответствие единичный кинематический винт  $\mathbf{t}_{ij}$ , характеризующий движение выходного звена, реализуемое с помощью данной пары.

Для математического описания винта используют его плюккеровы координаты в некоторой заданной неподвижной системе координат:

$$\mathbf{t}_{ij} = \begin{bmatrix} t_{ij}^x & t_{ij}^y & t_{ij}^z & t_{ij}^{Ox} & t_{ij}^{Oy} & t_{ij}^{Oz} \end{bmatrix}.$$

При этом первые три компонента, называемые векторной частью винта, характеризуют вращательное движение (угловую скорость), а последние три компонента, называемые моментной частью винта, — поступательное движение (линейную скорость). Кинематические винты цепи порождают пространство разрешенных перемещений выходного звена, соответствующее этой цепи:

$$\mathbf{T}_i = \text{span}(\mathbf{t}_{i1}, \mathbf{t}_{i2}, \dots, \mathbf{t}_{iN_i}),$$

где  $N_i$  — количество кинематических пар в  $i$ -й цепи.

Для любого положения МПС, не являющегося особым (сингулярным)  $\dim(\mathbf{T}_i) = m_i$ .

В то же время связи, накладываемые цепью, можно охарактеризовать пространством связей цепи  $\mathbf{W}_{Ci}$ , базисом которого являются силовые винты связей  $\mathbf{w}_{Cik}$  ( $k = 1, \dots, 6 - m_i$ ). По определению, любой силовой винт пространства  $\mathbf{W}_{Ci}$  будет взаимен любому кинематическому винту, входящему в  $\mathbf{T}_i$ :

$$\mathbf{t}_{ij} \circ \mathbf{w}_{Cik} = 0 \quad \forall \mathbf{w}_{Cik} \in \mathbf{W}_{Ci}, \quad (1)$$

где знак « $\circ$ » обозначает относительный момент кинематического  $\mathbf{t}$  и силового винтов  $\mathbf{w}$ , который определяется для этой пары винтов следующим образом:

$$\mathbf{t} \circ \mathbf{w} = t^x w^{Ox} + t^y w^{Oy} + t^z w^{Oz} + t^{Ox} w^x + t^{Oy} w^y + t^{Oz} w^z,$$

где  $t^x, t^y, t^z, t^{Ox}, t^{Oy}, t^{Oz}$  и  $w^{Ox}, w^{Oy}, w^{Oz}, w^x, w^y, w^z$  — плюккеровы координаты кинематического и силового винта соответственно.

Следует отметить, что для силового винта его векторная часть характеризует силу, действующую вдоль его оси, а моментная — момент.

Выражение (1) является достаточным условием для определения силовых винтов базиса пространства  $\mathbf{W}_{Ci}$  с точностью до множителя. С точки зрения линейной алгебры относительный момент двух винтов разного типа может

трактоваться как скалярное произведение двух векторов пространства  $\mathbb{R}^6$ .

В связи с этим для расчета плюккеровых координат винтов удобно вычислять ортогональное дополнение пространства  $\mathbf{T}_i$ . Для этого из плюккеровых координат кинематических винтов, составляющих базис указанного пространства, можно составить матрицу размером  $m_i \times 6$ , после чего найти ее ядро одним из известных численных методов.

Помимо силовых винтов связей важную роль в анализе МПС имеют силовые винты  $\mathbf{w}_{Ai}$ , каждый из которых возникает в соответствующей кинематической цепи при фиксации ее приводной пары. Торможение пары означает, что из пространства  $\mathbf{T}_i$  исчезает соответствующий кинематический винт, а его размерность уменьшается на единицу. По сути, силовой винт  $\mathbf{w}_{Ai}$  характеризует внешнюю нагрузку, воспринимаемую  $i$ -й цепью за счет активного усилия в приводе, а не пассивных реакций.

С учетом ранее принятых допущений каждой цепи соответствует один единственный с точностью до множителя винт  $\mathbf{w}_{Ai}$ . Этот винт должен быть взаимен любому кинематическому винту пассивных пар МПС и при этом не быть линейно зависимым от винтов связей цепи. Первое условие формально можно записать следующим образом:

$$\mathbf{t}_{ij} \circ \mathbf{w}_{Ai} = 0 \quad \forall \mathbf{t}_{ij} \in \mathbf{T}'_i, \quad (2)$$

где  $\mathbf{T}'_i$  — пространство, порожаемое кинематическими винтами только пассивных пар цепи.

Второе условие можно выразить как

$$\mathbf{w}_{Ai} \notin \mathbf{W}_{Ci}. \quad (3)$$

Однако условия (2) и (3) не позволяют однозначно определить плюккеровы координаты силового винта  $\mathbf{w}_{Ai}$ , так как им может удовлетворять бесконечное число таких винтов. Поэтому при практических расчетах условие (3) обычно усиливают. Вместо линейной независимости искомого винта вводят условие его «перпендикулярности» винтам пространства  $\mathbf{W}_{Ci}$ :

$$\mathbf{w}_{Ai} \cdot \mathbf{w}_{Cik} = 0 \quad \forall \mathbf{w}_{Cik} \in \mathbf{W}_{Ci}. \quad (4)$$

Условия (2) и (4) уже являются достаточными для однозначного (с точностью до множителя) определения винта  $\mathbf{w}_{Ai}$ . Чтобы это сделать, можно составить матрицу из плюккеровых координат винтов  $\mathbf{t}_{ij}$  и  $\mathbf{w}_{Cik}$  и вычислить ее ядро.

Для любого МПС система силовых винтов  $\mathbf{w}_{Ai}$  и  $\mathbf{w}_{Cik}$  всех его цепей уравнивает внешнюю нагрузку:

$$\sum_{i=1}^n r_{Ai} \mathbf{w}_{Ai} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{6-m_i} r_{Cik} \mathbf{w}_{Cik} = \mathbf{P}, \quad (5)$$

где  $r_{Ai}$  и  $r_{Cik}$  — обобщенные реакции, соответствующие винтам  $\mathbf{w}_{Ai}$  и  $\mathbf{w}_{Cik}$ ;  $\mathbf{P}$  — силовой винт внешней нагрузки.

Таким образом, вычисление силовых винтов МПС является важной задачей в рамках его силового анализа. Кроме того, вырождение системы силовых винтов является критерием возникновения ОП механизма [12].

### Особенности расчета обобщенных реакций.

Значения обобщенных реакций для заданной внешней нагрузки  $\mathbf{P}$  можно вычислить путем решения системы (5). Эта система включает в себя шесть уравнений и должна быть совместна, если МПС не находится в ОП.

Если суммарное количество силовых винтов  $\mathbf{w}_{Ai}$  и  $\mathbf{w}_{Cik}$  больше шести, то какие-то из них являются линейно зависимыми, и их количество можно уменьшить. Следует отметить, что если МПС не обладает приводной избыточностью (т. е. число его приводных пар равно числу степеней свободы), то все винты  $\mathbf{w}_{Ai}$  будут являться линейно независимыми.

Для большинства применяемых на практике МПС это условие выполняется. Кроме того, связи, накладываемые какой-либо одной кинематической цепью, физически не зависят от связей, накладываемых остальными цепями МПС. Поэтому выбор базиса пространства связей  $\mathbf{W}_{Ci}$  одной  $i$ -й цепи не оказывает никакого влияния на винты связей других цепей и расчет соответствующих им обобщенных реакций (за исключением случая линейной зависимости винтов связей разных кинематических цепей).

Как видно из условий (2) и (4), плюккеровы координаты силового винта  $\mathbf{w}_{Ai}$  определяются в рамках одной кинематической цепи. Это означает, что полученные значения координат никак не учитывают то, какие связи накладываются другими цепями. Таким образом, возможна ситуация, что винт  $\mathbf{w}_{Ai}$ , оставаясь линейно независимым винтам связей других цепей, может содержать координаты, описывающие запрещенные движения выходного звена.

Например, если кинематические цепи накладывают связь на любой поворот выходно-

го звена, а при расчете вектор  $\mathbf{w}_{Ai}$  имеет ненулевые компоненты. В этом случае в реальности внешний момент будет полностью воспринят винтами связей, но в расчете ненулевое значение обобщенной реакции  $r_{Ai}$  будет указывать на то, что часть нагрузки воспринимается также винтом  $\mathbf{w}_{Ai}$ .

Указанная особенность может сыграть существенную роль при анализе близости к ОП типа ВС. Если силовой винт  $\mathbf{w}_{Ai}$  имеет компоненты, соответствующие перемещениям, на которые наложены связи другими цепями, то при расчете обобщенной реакции  $r_{Cik}$ , по значению которой можно оценить близость к указанным ОП, возможна ситуация при которой значение данной реакции будет возрастать также и при приближении к ОП другого типа, характеризующимся потерей управляемости выходным звеном (типа ПУ).

При этом пространство, порождаемое винтами  $\mathbf{w}_{Ai}$ , не будет являться ортогональным дополнением пространства связей всего механизма  $\mathbf{C}$ , определяемого следующим образом:

$$\mathbf{C} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{W}_{Ci}$$

Иными словами, при возникновении ОП типа ВС будет вырождаться пространство  $\mathbf{C}$ , а при возникновении ОП типа ПУ — объединенное пространство всех силовых винтов МПС. Следовательно, отдельно невозможно проанализировать близость механизма к ОП типа ВС.

Избежать этой проблемы можно в том случае, если винты  $\mathbf{w}_{Ai}$  порождают пространство, ортогональное пространству связей  $\mathbf{C}$ . Как уже отмечалось, условия (2) и (4) игнорируют все кинематические цепи кроме  $i$ -й, поэтому для достижения поставленной цели необходимо преобразовывать винт  $\mathbf{w}_{Ai}$  после вычисления его плюккеровых координат по указанным условиям.

Наиболее логичным вариантом обеспечения ортогональности винтов  $\mathbf{w}_{Ai}$  пространству  $\mathbf{C}$  представляется их проецирование на пространство, изначально ортогональное  $\mathbf{C}$ , т. е. на его ортогональное дополнение  $\mathbf{C}^\perp$ . Пусть  $\mathbf{c}_1^\perp, \dots, \mathbf{c}_n^\perp$  — ортонормированный базис пространства  $\mathbf{C}^\perp$ , который можно вычислить как ядро матрицы плюккеровых координат винтов, составляющих базис пространства  $\mathbf{C}$ .

Тогда проекция винта  $\mathbf{w}_{Ai}$  на пространство  $\mathbf{C}^\perp$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{w}_{Ai}^\perp = \text{proj}(\mathbf{w}_{Ai}) = \sum_{p=1}^n (\mathbf{w}_{Ai} \cdot \mathbf{c}_p^\perp) \mathbf{c}_p^\perp, \quad (6)$$

где  $p = 1, \dots, n$ .

Пространство силовых винтов  $\mathbf{C}^\perp$  в некотором роде эквивалентно пространству кинематических винтов возможных перемещений выходного звена: векторные части винтов, порождающих одно пространство пропорциональны (равны) моментным частям винтов, порождающих другое пространство, и наоборот. Поэтому  $\dim(\mathbf{C}^\perp) = n$ .

С учетом соотношения (6) выражение (5) примет вид

$$\sum_{i=1}^n r_{Ai}^\perp \mathbf{w}_{Ai}^\perp + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{6-m_i} r_{Cik} \mathbf{w}_{Cik} = \mathbf{P}, \quad (7)$$

где  $r_{Ai}^\perp$  — обобщенная реакция, соответствующая проекции винта  $\mathbf{w}_{Ai}$  на пространство  $\mathbf{C}^\perp$ .

Таким образом, при расчете обобщенных реакций  $r_{Cik}$ , например, при анализе близости к ОП типа ВС, следует использовать уравнение (7), а не (5). Соответственно, плюккеровы координаты силовых винтов, возникающих при остановке приводных пар цепей, необходимо вычислять с помощью выражения (6).

**Пример расчета.** В качестве примера рассмотрим поступательно-направляющий механизм с тремя степенями свободы (рис. 1, а).

Этот механизм включает в себя три кинематические цепи, в каждой из которых имеется по пять вращательных кинематических пар ( $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i$ ). Приводные пары  $A_i$  закреплены на основании так, что их оси совпадают с осями неподвижной системы координат  $Oxyz$ : оси пар  $A_1, A_2$  и  $A_3$  лежат на осях  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . Координаты выходного звена определяются по точке  $F$ .

Рассмотрим кинематические винты исследуемого механизма (рис. 1, б). Пусть  $F$  является точкой приведения. Тогда плюккеровы координаты векторных частей кинематических винтов определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{A1vec} &= \mathbf{t}_{D1vec} = \mathbf{t}_{E1vec} = (1, 0, 0); \\ \mathbf{t}_{B1vec} &= \mathbf{t}_{C1vec} = (0, \cos \theta_1, \sin \theta_1); \\ \mathbf{t}_{A2vec} &= \mathbf{t}_{D2vec} = \mathbf{t}_{E2vec} = (0, 1, 0); \\ \mathbf{t}_{B2vec} &= \mathbf{t}_{C2vec} = (\sin \theta_2, 0, \cos \theta_2); \\ \mathbf{t}_{A3vec} &= \mathbf{t}_{D3vec} = \mathbf{t}_{E3vec} = (0, 0, 1); \\ \mathbf{t}_{B3vec} &= \mathbf{t}_{C3vec} = (\cos \theta_3, \sin \theta_3, 0), \end{aligned}$$

где  $\theta_i$  — угол поворота в приводной паре (рис. 2),  $i = 1, 2, 3$ .

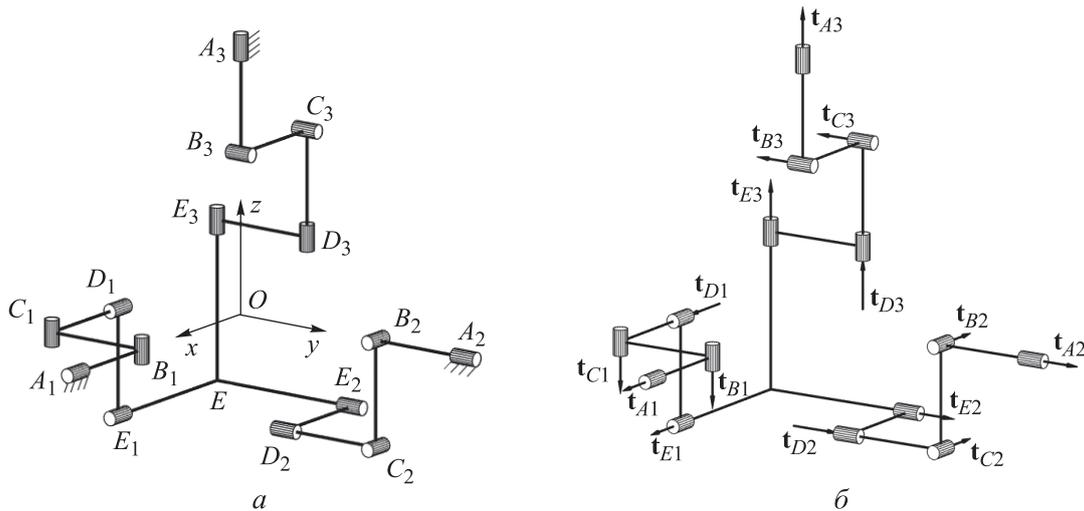


Рис. 1. Схемы поступательно-направляющего механизма с тремя степенями свободы (а) и его кинематических винтов (б)

Плюккерovy координаты моментных частей определяются следующим образом:

$$\mathbf{t}_{Aimom} = \rho_{FA_i} \times \mathbf{t}_{Aivec}; \quad \mathbf{t}_{Bimom} = \rho_{FB_i} \times \mathbf{t}_{Bivec};$$

$$\mathbf{t}_{Cimom} = \rho_{FC_i} \times \mathbf{t}_{Civec};$$

$$\mathbf{t}_{Dimom} = \rho_{FD_i} \times \mathbf{t}_{Divec}; \quad \mathbf{t}_{Eimom} = (0, 0, 0),$$

где  $\rho_{FA_i}$ ,  $\rho_{FB_i}$ ,  $\rho_{FC_i}$ ,  $\rho_{FD_i}$  — координаты радиус-векторов, проведенных из точки  $F$  в соответствующие точки цепей,

$$\rho_{FA_i} = (x_{A_i} - x, y_{A_i} - y, z_{A_i} - z);$$

$$\rho_{FB_i} = (x_{B_i} - x, y_{B_i} - y, z_{B_i} - z);$$

$$\rho_{FC_i} = (x_{C_i} - x, y_{C_i} - y, z_{C_i} - z);$$

$$\rho_{FD_i} = (x_{D_i} - x, y_{D_i} - y, z_{D_i} - z).$$

Зная плюккерovy координаты кинематических винтов, для каждой цепи можно составить матрицу размером  $5 \times 6$  (если каждый винт записан в виде строки), после чего путем вычисления ядра каждой матрицы найти плюккерovy координаты силовых винтов связей каждой цепи. Затем с помощью условий (2) и (4) вычислить винты  $\mathbf{w}_{A_i}$ .

В работе [13], установлено, что плюккерovy координаты силовых винтов связей данно-

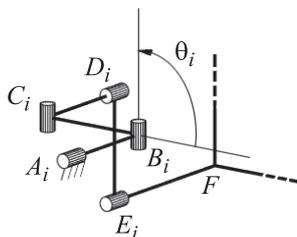


Рис. 2. Схема отсчета угла  $\theta_i$

го механизма можно определить по выражениям

$$\mathbf{w}_{C1} = [0, 0, 0, 0, \sin \theta_1, -\cos \theta_1];$$

$$\mathbf{w}_{C2} = [0, 0, 0, -\cos \theta_2, 0, \sin \theta_2];$$

$$\mathbf{w}_{C3} = [0, 0, 0, \sin \theta_3, -\cos \theta_3, 0].$$

Здесь и далее индекс  $k$  в обозначении силовых винтов связей и соответствующих им реакций опущен, так как для каждой цепи рассматриваемого механизма существует только один винт связи.

При приближении механизма к ОП типа ВС должно наблюдаться возрастание значения хотя бы одной из обобщенных реакций  $r_{C_i}$ . Непосредственно в ОП теоретическое значение реакции должно возрасть до бесконечности, а матрица, составленная из плюккерovy координат винтов механизма, — вырождаться.

Рассмотрим пример расчета, при котором силовые винты  $\mathbf{w}_{A_i}$  не проецируются на пространство  $\mathbf{C}^\perp$ . Для этого выполнен анализ механизма со следующими размерами: длины звеньев  $l_{AB} = l_{BC} = l_{CD} = l_{DE} = 0,2$  м;  $l_{EF} = 0,3$  м; расстояние от начала координат до входной пары цепи  $l_{OA} = 0,5$  м.

В качестве примера возьмем срез (плоскость) рабочей зоны для постоянного значения координаты  $z = -0,18$  м с шагом разбиения  $0,002$  м. При этом в каждой точке будем вычислять два параметра: знак определителя матрицы плюккерovy координат силовых винтов связей механизма и значение обобщенной реакции.

Так как векторные части указанных винтов нулевые, достаточно рассмотреть только матрицу, составленную из моментных частей, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ -\cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ \sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Что касается максимального обобщенной реакции, то будем рассматривать максимальное значение для всех цепей

$$r_{\max} = \max(r_{C1}, r_{C2}, r_{C3}).$$

Результат анализа, проведенного без проецирования винтов для внешней нагрузки, равной 1 Н, приведен на рис. 3. Здесь фиолетовым цветом отмечены точки, в которых определитель матрицы силовых винтов связей отрицателен, а розовым — положителен. Значение реакции показано оттенками серого: чем темнее область рисунка, тем больше значение реакции.

Как видно из рис. 3, возрастание обобщенной реакции происходит не только на границе, разделяющей области положительных и отрицательных значений определителя матрицы силовых винтов связей, но и внутри этих областей. Возрастание реакции на границе указанных областей ожидаемо, поскольку они соответствуют искомому ОП типа ВС, однако внутри областей не должно наблюдаться увеличения значения реакции.

При этом, согласно результатам ранее проведенного анализа [13, 14], точки, не соответствующие ОП типа ВС, вблизи которых наблю-

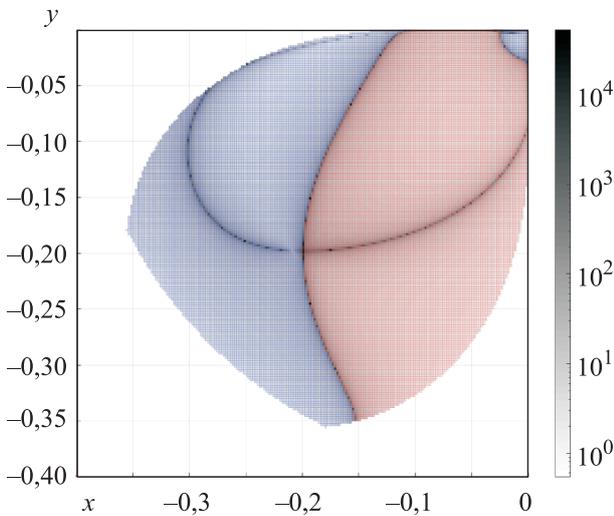


Рис. 3. Распределение максимальной обобщенной реакции по срезу рабочей зоны

дается возрастание обобщенных реакций, соответствуют особым положениям типа ПУ.

Чтобы более детально рассмотреть особенности вырождения пространств силовых винтов составим матрицы Грама для силовых винтов связей  $G_C$ , силовых винтов  $w_{Ai}$   $G_A$  и всех силовых винтов механизма  $G$ :

$$G_C = \begin{pmatrix} w_{C1} \cdot w_{C1} & w_{C1} \cdot w_{C2} & w_{C1} \cdot w_{C3} \\ w_{C2} \cdot w_{C1} & w_{C2} \cdot w_{C2} & w_{C2} \cdot w_{C3} \\ w_{C3} \cdot w_{C1} & w_{C3} \cdot w_{C2} & w_{C3} \cdot w_{C3} \end{pmatrix};$$

$$G_A = \begin{pmatrix} w_{A1} \cdot w_{A1} & w_{A1} \cdot w_{A2} & w_{A1} \cdot w_{A3} \\ w_{A2} \cdot w_{A1} & w_{A2} \cdot w_{A2} & w_{A2} \cdot w_{A3} \\ w_{A3} \cdot w_{A1} & w_{A3} \cdot w_{A2} & w_{A3} \cdot w_{A3} \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} G_C & G_{CA} \\ G_{AC} & G_A \end{pmatrix},$$

где

$$G_{AC} = \begin{pmatrix} w_{A1} \cdot w_{C1} & w_{A1} \cdot w_{C2} & w_{A1} \cdot w_{C3} \\ w_{A2} \cdot w_{C1} & w_{A2} \cdot w_{C2} & w_{A2} \cdot w_{C3} \\ w_{A3} \cdot w_{C1} & w_{A3} \cdot w_{C2} & w_{A3} \cdot w_{C3} \end{pmatrix};$$

$$G_{CA} = \begin{pmatrix} w_{C1} \cdot w_{A1} & w_{C1} \cdot w_{A2} & w_{C1} \cdot w_{A3} \\ w_{C2} \cdot w_{A1} & w_{C2} \cdot w_{A2} & w_{C2} \cdot w_{A3} \\ w_{C3} \cdot w_{A1} & w_{C3} \cdot w_{A2} & w_{C3} \cdot w_{A3} \end{pmatrix}.$$

Матрицы Грама всегда квадратные, что позволяет провести итерационный анализ их определителя, в то время как матрицы силовых винтов обычно являются прямоугольными, и их вырождение можно проверить только по уменьшению их ранга непосредственно в ОП. Каждая из матриц Грама будет вырождаться только в том случае, если вырождено соответствующее пространство винтов.

Рассмотрим распределение определителей матриц Грама по срезу рабочей зоны для различных пространств силовых винтов (рис. 4).

Как видно из рис. 4, вырождение матрицы Грама, а значит, и пространства всех силовых винтов механизма, наблюдается в ОП как типа ВС, так и типа ПУ. В то же время матрица силовых винтов связей вырождается только в ОП типа ВС, а матрица силовых винтов  $w_{Ai}$  не вырождается практически нигде, кроме одной точки.

При этом обобщенные реакции, соответствующие винтам связи, в этой точке не возрастают (рис. 4, б), т. е. не происходит «ложного» увеличения значения критерия близости к ОП

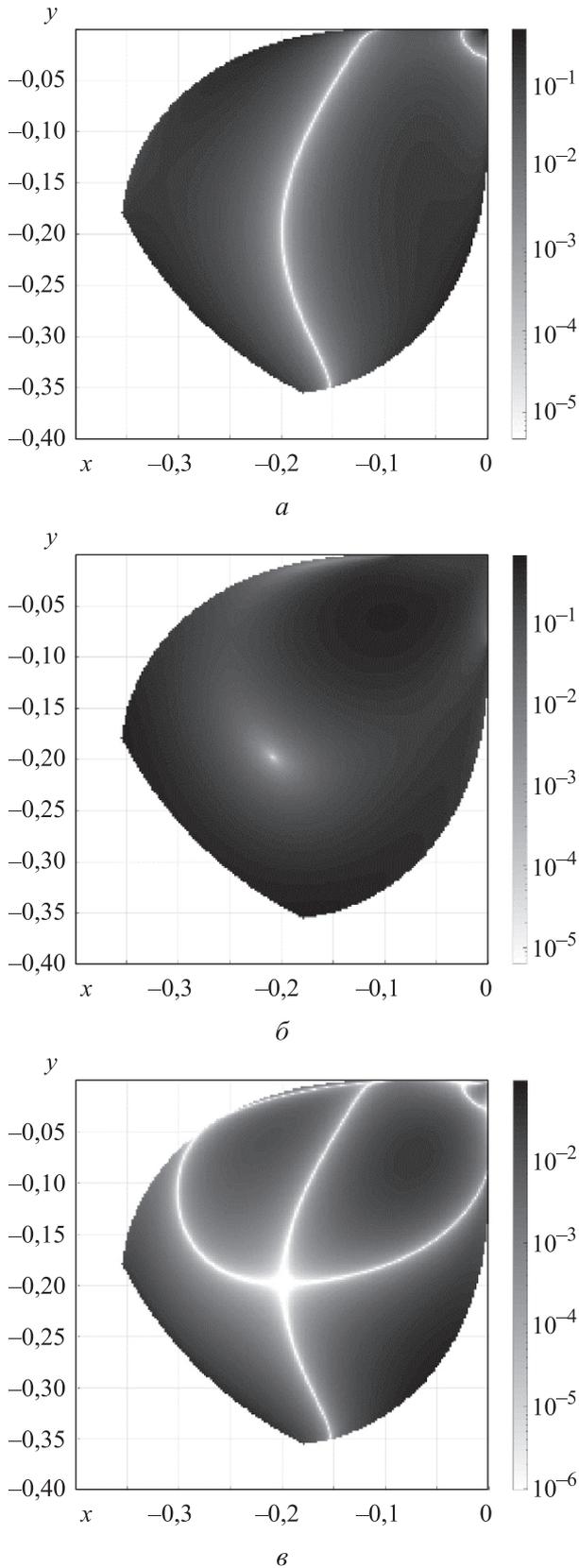


Рис. 4. Распределение определителя матриц Грама по срезу рабочей зоны для различных пространств силовых винтов: *a* — связей; *b* — возникающих при фиксации приводных пар; *v* — всех винтов

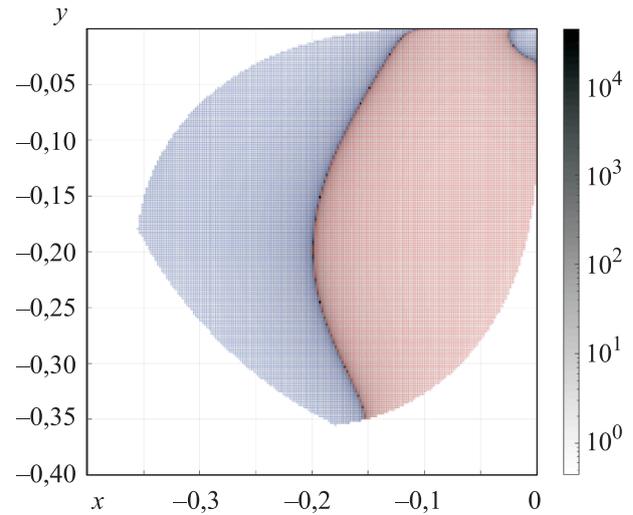


Рис. 5. Распределение максимальной обобщенной реакции по срезу рабочей зоны с учетом проецирования силовых винтов

типа ВС при приближении к ОП типа ПУ. Кроме того, условие возникновения ОП типа ПУ [15] подразумевает вырождение пространства, порожденного винтами  $w_{Ai}$ , при одновременном сохранении размерности пространства связей  $S$ .

Таким образом, ОП типа ПУ не возникают. Поэтому невозможно определить точки, соответствующие ОП типа ПУ, отдельно от точек ОП типа ВС с применением винтового исчисления без проецирования винтов  $w_{Ai}$  на пространство  $S^\perp$ .

Рассмотрим результат расчета максимальной обобщенной реакции винтов связей с проецированием винтов на пространство  $S^\perp$  (рис. 5).

Возрастание значения максимальной обобщенной реакции наблюдается строго на границе, разделяющей области, соответствующие противоположным знакам определителя матрицы плюккеревых координат силовых винтов связей. То есть присутствие ОП типа ПУ уже не оказывает влияния на значение критерия близости к ОП типа ВС.

## Выводы

1. Рассмотрен случай взаимного влияния силовых винтов связей МПС и его силовых винтов, возникающих при фиксации приводных кинематических пар. Наряду с теоретическим обоснованием этого явления показано, что при его появлении возможны искажения в расчете обобщенных реакций.

2. Для решения указанной проблемы предложено использовать проекции силовых винтов остановленных активных пар на ортогональное дополнение векторного пространства силовых винтов связей МПС.

3. На примере трехстепенного поступательно-направляющего механизма показано как возникновение описываемой проблемы, так и ее успешное решение предложенным способом.

## Литература

- [1] Глазунов В.А. *Механизмы параллельной структуры и их применение*. Москва-Ижевск, ИКИ РАН, 2018. 1036 с.
- [2] Gallardo-Alvarado J. Kinematic analysis of parallel manipulators by algebraic screw theory. Springer, 2016. 377 p.
- [3] Sugimoto K. Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra. *J. Mech. Trans. and Automation*, 1987, vol. 109, no. 1, pp. 3–7, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3258783>
- [4] Глазунов В.А., Костерева С.Д., Данилин П.О. и др. Применение винтового исчисления в современной теории механизмов. *Вестник научно-технического развития*, 2010, № 6, с. 12–17.
- [5] Ларюшкин П.А., Рашоян Г.В., Эрастова К.Г. Об особенностях применения винтового исчисления для оценки близости к особым положениям механизмов параллельной структуры. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2017, № 4, с. 39–45.
- [6] Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>
- [7] Hunt K. Kinematic geometry of mechanisms. Clarendon Press, 1978. 465 p.
- [8] Zlatanov D., Bonev I., Gosselin C. Constraint singularities of parallel mechanisms. *Proc. 2002 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2002, vol. 1, pp. 496–502, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013408>
- [9] Merlet J.-P. *Parallel robots*. Springer, 2006. 402 p.
- [10] Voglewede P., Ebert-Uphoff I. Overarching framework for measuring closeness to singularities of parallel manipulators. *IEEE Trans. Robot.*, 2005, vol. 21, no. 6, pp. 1037–1045, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2005.855993>
- [11] Глазунов В.А., Аракелян В., Брио С. и др. Скоростные и силовые критерии близости к сингулярностям манипуляторов параллельной структуры. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2012, № 3, с. 10–17.
- [12] Hao K., Ding Y. Screw theory and singularity analysis of parallel robot. *Int. Conf. Mechatronics and Automation*, 2006, pp. 147–152, doi: <https://doi.org/10.1109/ICMA.2006.257468>
- [13] Laryushkin P., Glazunov V., Demidov S. Singularity analysis of 3- DOF translational parallel manipulator. In: *Advances on theory and practice of robots and manipulators*. Springer, 2014, vol. 22, pp. 47–54.
- [14] Ларюшкин П.А., Палочкин С.В. Рабочая зона манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы. *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*, 2012, № 3, с. 92–96.
- [15] Глазунов В.А., Нгуен Н.Х., Нгуен М.Т. К анализу особых положений механизмов параллельной структуры. *Машиностроение и инженерное образование*, 2009, № 4, с. 11–16.

## References

- [1] Glazunov V.A. *Mekhanizmy parallel'noy struktury i ikh primeneniye* [Parallel mechanisms and their application]. Moscow-Izhevsk, IKI RAN Publ., 2018. 1036 p. (In Russ.).
- [2] Gallardo-Alvarado J. *Kinematic analysis of parallel manipulators by algebraic screw theory*. Springer, 2016. 377 p.
- [3] Sugimoto K. Kinematic and dynamic analysis of parallel manipulators by means of motor algebra. *J. Mech. Trans. and Automation*, 1987, vol. 109, no. 1, pp. 3–7, doi: <https://doi.org/10.1115/1.3258783>

- [4] Glazunov V.A., Kostereva S.D., Danilin P.O. et al. Using theory of screws in modern theory of mechanisms. *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya*, 2010, no. 6, pp. 12–17. (In Russ.).
- [5] Laryushkin P.A., Rashoyan G.V., Erastova K.G. On the features of applying the theory of screws to the evaluation of proximity to specific positions of the mechanisms of parallel structure. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2017, no. 4, pp. 39–45. (In Russ.) (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 349–355, doi: <https://doi.org/10.3103/S1052618817040100>)
- [6] Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 1990, vol. 6, no. 3, pp. 281–290, doi: <https://doi.org/10.1109/70.56660>
- [7] Hunt K. *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon Press, 1978. 465 p.
- [8] Zlatanov D., Bonev I., Gosselin C. Constraint singularities of parallel mechanisms. *Proc. 2002 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2002, vol. 1, pp. 496–502, doi: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2002.1013408>
- [9] Merlet J.-P. *Parallel robots*. Springer, 2006. 402 p.
- [10] Voglewede P., Ebert-Uphoff I. Overarching framework for measuring closeness to singularities of parallel manipulators. *IEEE Trans. Robot.*, 2005, vol. 21, no. 6, pp. 1037–1045, doi: <https://doi.org/10.1109/TRO.2005.855993>
- [11] Glazunov V.A., Arakelyan V., Brio S. et al. Speed and force criteria for the proximity to singularities of parallel structure manipulators. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2012, no. 3, pp. 10–17. (In Russ.). (Eng. version: *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2012, vol. 41, no. 3, pp. 194–199. <https://doi.org/10.3103/S1052618812030041>)
- [12] Hao K., Ding Y. Screw theory and singularity analysis of parallel robot. *Int. Conf. Mechatronics and Automation*, 2006, pp. 147–152, doi: <https://doi.org/10.1109/ICMA.2006.257468>
- [13] Laryushkin P., Glazunov V., Demidov S. Singularity analysis of 3-DOF translational parallel manipulator. In: *Advances on theory and practice of robots and manipulators*. Springer, 2014, vol. 22, pp. 47–54.
- [14] Laryushkin P.A., Palochkin S.V. Workspace of the parallel structure manipulator with three degrees of freedom. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti* [Proceedings of Higher Education Institutions. Textile Industry Technology], 2012, no. 3, pp. 92–96. (In Russ.).
- [15] Glazunov V.A., Nguen N.Kh., Nguen M.T. Singular configuration analysis of the parallel mechanisms. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2009, no. 4, pp. 11–16. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 13.03.2022

## Информация об авторе

ЛАРЮШКИН Павел Андреевич — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Основы конструирования машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: [pav.and.lar@bmstu.ru](mailto:pav.and.lar@bmstu.ru)).

## Information about the author

LARYUSHKIN Pavel Andreevich — Candidate of Science (Eng.), Associate professor, Associate Professor of Department of Machine Design Principles. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: [pav.and.lar@bmstu.ru](mailto:pav.and.lar@bmstu.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Ларюшкин П.А. Определение обобщенных реакций в механизмах параллельной структуры. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 9, с. 54–62, doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-54-62

### Please cite this article in English as:

Laryushkin P.A. Determining Generalised Contact Forces in Parallel Mechanisms. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 9, pp. 54–62, doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-54-62