

УДК 621.833

doi: 10.18698/0536-1044-2022-4-14-22

Сравнение эвольвентного и циклоидального зацеплений волновых зубчатых передач

И.Е. Люминарский, С.Е. Люминарский

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Comparison of Involute and Cycloidal Engagement in Harmonic Drives

I.E. Lyuminarsky, S.E. Lyuminarsky

Bauman Moscow State Technical University

Волновые зубчатые передачи с эвольвентным профилем зубьев имеют такие недостатки, как шумовые эффекты, проскок и повышенный износ зубьев, заклинивание. Одной из причин появления этих недостатков является интерференция зубьев, которая может быть вызвана неверным выбором параметров зубчатых колес, погрешностей изготовления и монтажа элементов передачи. Интерференция возникает вследствие малого зазора на входе в зацепление зубьев. Для увеличения этих зазоров предложено использовать циклоидальные формы зубьев. Проведены теоретические исследования по определению минимального зазора на входе в зацепление зубьев передач с эвольвентным и циклоидальным зацеплениями. Показано, что в циклоидальном зацеплении минимальный зазор на его входе значительно больше, чем в эвольвентном. Исследовано влияние момента сопротивления на выходном валу и радиального смещения оси кулачка на указанный зазор.

Ключевые слова: волновая зубчатая передача, интерференция зубьев, гибкое колесо, жесткое колесо, циклоидальная форма зубьев

Harmonic drives with an involute tooth profile have such faults as noise effects, tooth skips, jamming, increased tooth wear, etc. One of the reasons for the appearance of these shortcomings is the interference of the teeth, which can be caused by an incorrect choice of gear parameters, errors in the manufacture and mounting transmission elements. Interference occurs due to small gaps at the entrance to the engagement of the teeth. To increase these gaps, it is proposed to use cycloidal tooth shapes. To determine the minimum clearance at the entrance to the teeth engagement in involute and cycloidal gears theoretical studies have been carried out. It is shown that in the cycloidal engagement the minimum gap at the entrance to the engagement is much larger than in the involute one. The influence of the moment of resistance on the output shaft and the radial displacement of the cam axis on the specified clearance has been studied.

Keywords: harmonic drive, interference of teeth, flexible gear, rigid gear, cycloidal shape of teeth

Волновые зубчатые передачи (ВЗП) нашли широкое применение в различных отраслях техники, что обусловлено хорошими массогабаритными характеристиками, высокими кинематической

точностью и нагрузочной способностью, небольшим мертвым ходом и другими достоинствами ВЗП. Благодаря технологичности наибольшее распространение получили

ВЗП с эвольвентным профилем зубьев [1–9]. Однако они имеют такие недостатки, как высокий (60...80) нижний предел передаточных отношений, небольшой коэффициент полезного действия, невысокая (не более 10 000 ч) усталостная прочность гибкого колеса (ГК) и шумовые эффекты (скрип).

Указанные недостатки можно частично устранить применением циклоидальной формы зубьев, что позволит уменьшить нижний предел передаточных отношений ВЗП до 30, повысить коэффициент полезного действия и усталостную прочность ГК, снизить шумовые эффекты и влияние различных факторов (нагрузки, точности изготовления зубчатых колес и др.) на кинематическую погрешность ВЗП. Теоретические исследования ВЗП с циклоидальной формой зубьев выполнены в статьях [10–12].

Постановка задачи. Надежность ВЗП невозможно повысить без использования современных математических моделей, учитывающих упругое взаимодействие ее основных элементов [12, 13]. Уточненные теоретические модели ВЗП позволяют исследовать характер взаимодействия гибкого и жесткого колеса (ЖК), определять влияние основных параметров ВЗП на качественные показатели ее работы.

Теоретические и экспериментальные исследования разных авторов и практика применения ВЗП показали, что при их проектировании необходимо решить задачу об исключении взаимодействия зубчатых колес с поверхностями вершин (интерференции). При интерференции зубьев повышается их износ, а также вероятность заклинивания и проскока зубьев, что делает ВЗП неработоспособной. Следовательно, при создании ВЗП необходимо проводить теоретические исследования зазоров между зубьями ГК и ЖК на входе в зацепление и на выходе из него.

Цель статьи — разработать математическую модель ВЗП с циклоидальной формой зубьев, учитывающую упругое взаимодействие элементов передачи, и на ее основе сравнить траектории движения зубьев ГК во впадинах ЖК в ВЗП с эвольвентной и циклоидальной формами зубьев.

Математическая модель. Объект исследования — ВЗП с кулачковым генератором волн и неподвижным ГК (рис. 1).

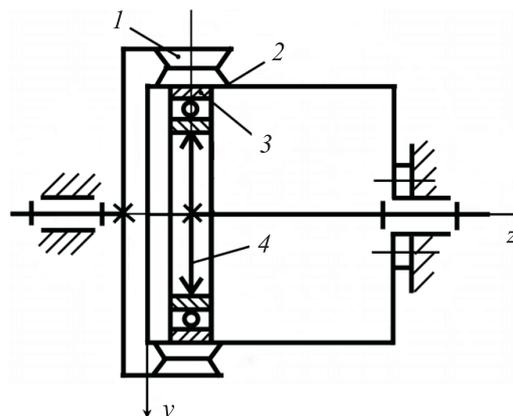


Рис. 1. Схема ВЗП с кулачковым генератором волн и неподвижным ЖК:
1 — ЖК; 2 — ГК; 3 — гибкий подшипник;
4 — кулачок

Профиль зуба ГК с циклоидальной формой зубьев показан на рис. 2. Профиль головки зуба 4 представляет собой эпициклоиду, которую описывает произвольная точка M производящей окружности 3 при ее качении без скольжения по внешней стороне делительной окружности 2. Профиль ножки зуба 1 — гипоциклоида, образующаяся при качении производящей окружности по внутренней стороне делительной окружности.

К основным параметрам зубчатых колес циклоидальной формы относятся: радиусы делительных окружностей ГК $r_g = mz_g/2$ и ЖК $r_b = mz_b/2$ (m — модуль зацепления; z_g и z_b — числа зубьев ГК и ЖК); радиус производящей окружности $\rho = m/4$; шаг по делительной окружности $p = 4\pi\rho$; радиусы окружностей вершин ГК $r_{ag} = r + 2\rho - c^*m$ и впадин ГК $r_{fg} = r - 2\rho$ ($c^* = 0,1$ — коэффициент радиального зазора); радиусы окружностей вершин ЖК $r_{ab} = r - 2\rho + c^*m$ и впадин ЖК $r_{fb} = r + 2\rho$.

Радиус делительной окружности ГК ВЗП r_g значительно больше радиуса производящей окружности ρ : $r_g/\rho > 200$. Поэтому для нахождения координат профиля циклоидальных зубьев дугу делительной окружности можно заменить прямой линией. Тогда указанные координаты определяются по уравнению циклоиды (см. рис. 2) следующим образом:

$$x_M \approx \rho(\varphi_M - \sin \varphi_M - \pi); \quad y_M \approx \rho(1 - \cos \varphi_M),$$

где φ_M — угол поворота производящей окружности.

Угол поворота производящей окружности φ_{gM} , толщина зуба s_{gM} и угол профиля α_{gM} ГК

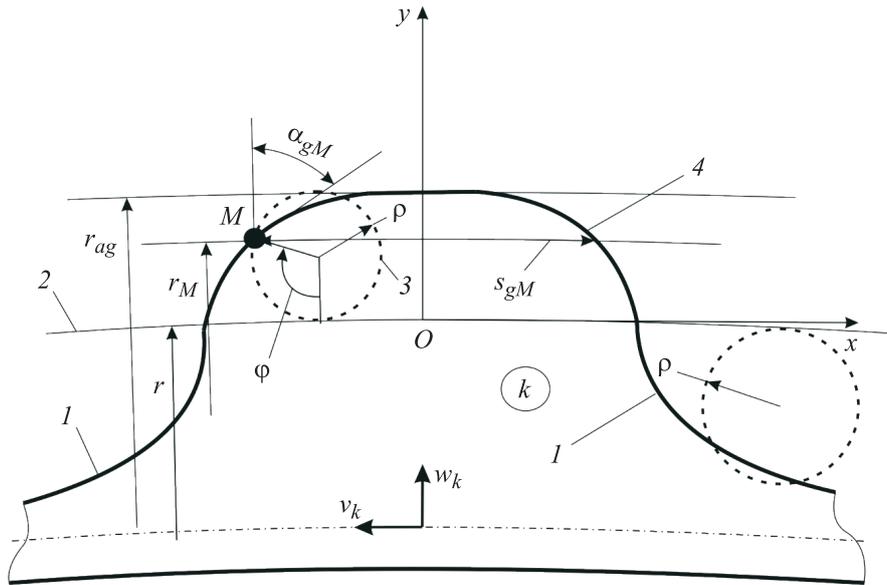


Рис. 2. Расчетная схема для определения параметров циклоидального зуба

в произвольной точке M вычисляются по выражениям

$$\varphi_{gM} \approx \begin{cases} \arccos\left(1 - \frac{r_M - r_g - w_k}{\rho}\right) & \text{при } r_M > r_g, \\ \arccos\left(1 + \frac{r_M - r_g - w_k}{\rho}\right) & \text{при } r_M < r_g; \end{cases}$$

$$s_{gM} \approx \begin{cases} 2|x_M| & \text{при } r_M > r_g, \\ 2(2\rho - |x_M|) & \text{при } r_M < r_g; \end{cases}$$

$$\alpha_{gM} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \varphi_{gM}}{1 - \cos \varphi_{gM}}\right),$$

где r_M — радиус расположения произвольной точки M ; w_k — радиальное перемещение k -го зуба ГК за счет упругих деформаций и смещения ГК как жесткого целого.

Угол поворота производящей окружности φ_{bM} , толщина зуба s_{bM} и угол профиля α_{bM} ЖК в произвольной точке M рассчитываются по формулам

$$\varphi_{bM} \approx \begin{cases} \arccos\left(1 - \frac{r_M - r_b}{\rho}\right) & \text{при } r_M > r_b, \\ \arccos\left(1 + \frac{r_M - r_b}{\rho}\right) & \text{при } r_M < r_b; \end{cases}$$

$$s_{bM} \approx \begin{cases} 2|x_M| & \text{при } r_M < r_b, \\ 2(2\rho - |x_M|) & \text{при } r_M > r_b; \end{cases}$$

$$\alpha_{bM} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \varphi_{bM}}{1 - \cos \varphi_{bM}}\right).$$

Для определения перемещений зубьев колес выполняют расчет упругого взаимодействия элементов ВЗП. При расчете учитывают упругие деформации ГК и ЖК и наружного кольца гибкого подшипника (НКГП), контактные деформации в гибком подшипнике (ГП) и смещения элементов ВЗП как жестких тел. Для определения сил взаимодействия элементов ВЗП используют ее пространственную модель [13–15].

Система разрешающих уравнений упругого взаимодействия элементов ВЗП имеет вид

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_0 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}; \\ \delta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N; \\ F_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N; \\ \delta_j F_j = 0, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{D} — матрица узловых податливостей; \mathbf{G} — матрица, связывающая приращения зазоров δ_j с вектором смещения элементов ВЗП как жестких тел \mathbf{a} ; \mathbf{C} — матрица, связывающая вектор смещения \mathbf{a} с вектором внешних сил и моментов \mathbf{B} ; \mathbf{F} — вектор сил взаимодействия контактируемых поверхностей; $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\delta}_0$ — векторы зазоров между поверхностями в деформированном и недеформированном состоянии элементов ВЗП; \mathbf{B} — вектор внешних сил и моментов; N — количество узлов, в которых может происходить взаимодействие поверхностей; F_j — элементы вектора \mathbf{F} .

В выражении (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{F}^{(1)T}, \mathbf{F}^{(2)T}, \mathbf{F}^{(3)T})^T; \\ \mathbf{a} &= (\mathbf{a}^{(1)T}, \mathbf{a}^{(2)T}, \mathbf{a}^{(3)T})^T; \\ \boldsymbol{\delta} &= (\boldsymbol{\delta}^{(1)T}, \boldsymbol{\delta}^{(2)T}, \boldsymbol{\delta}^{(3)T})^T; \\ \boldsymbol{\delta}_0 &= (\boldsymbol{\delta}_0^{(1)T}, \boldsymbol{\delta}_0^{(2)T}, \boldsymbol{\delta}_0^{(3)T})^T, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}^{(1)}$, $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{F}^{(3)}$ — векторы сил взаимодействия ЖК и ГК, ГК и НКПП, НКПП и тел качения ГП соответственно; $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ и $\mathbf{a}^{(3)}$ — векторы смещений ЖК, ГК и НКПП соответственно; $\boldsymbol{\delta}^{(1)}$, $\boldsymbol{\delta}^{(2)}$ и $\boldsymbol{\delta}^{(3)}$ — векторы зазоров между ЖК и ГК, ГК и НКПП, НКПП и телами качения ГП соответственно; $\boldsymbol{\delta}_0^{(1)}$, $\boldsymbol{\delta}_0^{(2)}$ и $\boldsymbol{\delta}_0^{(3)}$ — векторы начальных зазоров (зазоров в недеформированной системе) между теми же элементами.

Вектор сил взаимодействия ЖК и ГК

$$\mathbf{F}^{(1)} = (\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}^{*T}),$$

где \mathbf{Q} и \mathbf{Q}^* — вектор сил взаимодействия ЖК и ГК по рабочей и нерабочей кромке соответственно.

Вектор зазоров между ЖК и ГК

$$\boldsymbol{\delta}^{(1)} = (\boldsymbol{\delta}^Q, \boldsymbol{\delta}^{Q*}),$$

где $\boldsymbol{\delta}^Q$ и $\boldsymbol{\delta}^{Q*}$ — векторы зазоров между рабочими и нерабочими поверхностями зубьев ЖК и ГК.

Векторы смещений ЖК, ГК и НКПП определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(1)} &= (\Delta x^{(1)}, \Delta y^{(1)})^T; \\ \mathbf{a}^{(2)} &= (\Delta x^{(2)}, \Delta y^{(2)}, \Delta \varphi_z^{(2)})^T; \\ \mathbf{a}^{(3)} &= (\Delta x^{(3)}, \Delta y^{(3)}, \Delta \varphi_x^{(3)}, \Delta \varphi_y^{(3)})^T, \end{aligned}$$

где Δx , Δy — проекции смещения ЖК, ГК и НКПП; $\Delta \varphi_z^{(2)}$ — угол поворота ЖК вокруг оси z ; $\Delta \varphi_x^{(3)}$, $\Delta \varphi_y^{(3)}$ — углы поворота ГК вокруг осей x и y .

Начальные зазоры между зубьями ЖК и ГК по рабочей δ_{0k}^Q и нерабочей δ_{0k}^{Q*} кромкам (рис. 3) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \delta_{0k}^Q &= r_k \psi_k - 0,5(s_{bk} + s_{gk}) \cos \alpha_{bk} + w_k \sin \alpha_{bk}; \\ \delta_{0k}^{Q*} &= r_k^* \psi_k^* - 0,5(s_{bk}^* + s_{gk}^*) \cos \alpha_{bk}^* + w_k \sin \alpha_{bk}^*; \\ k &= 1, \dots, z_g, \end{aligned}$$

где r_k и r_k^* — радиусы, на которых происходит контакт k -й пары зубьев ЖК и ГК по рабочей и нерабочей кромкам; ψ_k и ψ_k^* — углы между соседними зубьями со стороны рабочих и нерабочих кромок; s_{bk} и s_{bk}^* — толщины k -го зуба ЖК на радиусах r_k и r_k^* ; s_{gk} и s_{gk}^* — толщины

k -го зуба ГК на радиусах $r_k - w_k$ и $r_k^* - w_k$; α_{bk} и α_{bk}^* — углы профиля боковых поверхностей ЖК на радиусах r_k и r_k^* .

Углы между соседними зубьями со стороны рабочих ψ_k и нерабочих ψ_k^* кромок (см. рис. 3) определяются как

$$\psi_k = \varphi_{bk} - \varphi_{gk}; \quad \psi_k^* = \gamma_b - \psi_k,$$

где φ_{bk} и φ_{gk} — угловые координаты k -го зуба ЖК и ГК,

$$\begin{aligned} \varphi_{bk} &= \begin{cases} k\gamma_b & \text{при } k \leq z_g/2, \\ (k+1)\gamma_b & \text{при } k \leq 1 + z_g/2; \end{cases} \\ \varphi_{gk} &= \begin{cases} k\gamma_g & \text{при } k \leq z_g/2, \\ (k+1)\gamma_g & \text{при } k \leq 1 + z_g/2; \end{cases} \end{aligned}$$

γ_b и γ_g — угловые шаги зубьев ЖК и ГК, $\gamma_b = 2\pi/z_b$, $\gamma_g = 2\pi/z_g$.

Зазоры между зубьями ЖК и ГК в деформированном состоянии по рабочей δ_k^Q и нерабочей δ_k^{Q*} кромкам вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_k^Q &= \delta_{0k}^Q - w_k \sin \alpha_{bk} - v_k \cos \alpha_{bk} + \\ &+ e_k \theta_k + \lambda(Q_k) + \Theta r_k \cos \alpha_{bk}; \\ \delta_k^{Q*} &= \delta_{0k}^{Q*} - w_k \sin \alpha_{bk}^* + v_k \cos \alpha_{bk}^* - \\ &- e_k^* \theta_k + \lambda(Q_k^*) - \Theta r_k^* \cos \alpha_{bk}^*, \end{aligned}$$

где v_k — касательное перемещение k -го зуба ГК за счет упругих деформаций и смещения ГК как жесткого целого; e_k и e_k^* — кратчайшее расстояние от точки A до нормалей, проведенных в точках контакта зубьев ГК и ЖК на рабочей и

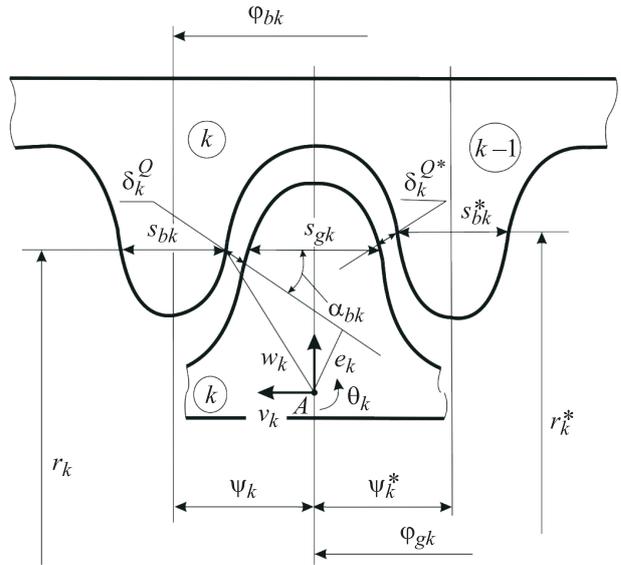


Рис. 3. Расчетная схема для определения зазоров в зубчатом зацеплении

нерабочей поверхностях (см. рис. 3); θ_k — угол поворота k -го зуба ГК; $\lambda(Q_k)$ и $\lambda(Q_k^*)$ — контактные сближения k -й пары зубьев ЖК и ГК по рабочей и нерабочей кромкам, определяемые по формуле Герца; Θ — угол поворота ЖК относительно кулачка.

Система разрешающих уравнений (1) представляет собой совокупность канонических уравнений метода сил, уравнений равновесия ЖК, ГК, НКГП и неравенств, выражающих односторонний характер взаимодействия элементов ВЗП. Система уравнений (1) эквивалентна таковой, записанной для упругого тела, ограниченного односторонними связями.

Для решения рассматриваемой системы использован метод введения восстанавливающих сил. Более подробно методика расчета изложена в работе [13]. Коэффициенты матрицы податливости и начальные зазоры между зубьями

зависят от результатов решения системы уравнений (1). Поэтому расчеты выполнены с помощью итерационного уточнения решения при многократном решении системы (1).

Вычисления выполнялись следующим образом. Из системы (1) определялись силы взаимодействия и смещения элементов ВЗП. По полученным результатам уточнялись радиусы контакта зубьев, контактная податливость в ГП и упругие перемещения точек ГК. Далее пересчитывалась матрица податливости \mathbf{D} и вектор начальных зазоров между зубьями δ_0 . Из системы уравнений (1) определялись уточненные значения сил и смещений.

Результаты исследования. Для численного исследования выбрана ВЗП (см. рис. 1), имеющая следующие параметры: числа зубьев ГК $z_g = 200$ и ЖК $z_b = 202$; модуль зацепления $m = 0,8$ мм;

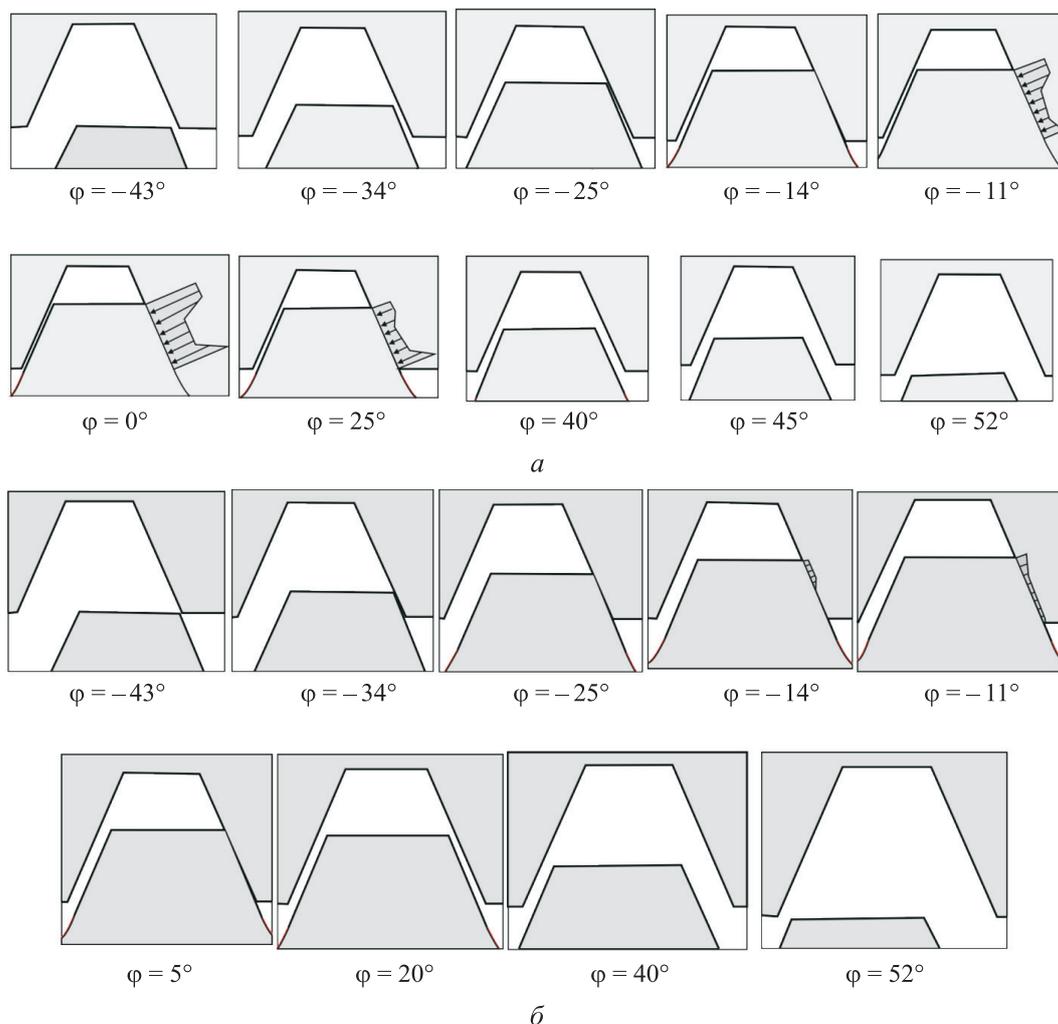


Рис. 4. Схемы расположения зубьев ГК и ЖК в эвольвентном зацеплении при совпадении осей вращения кулачка и ЖК для момента сопротивления $M_c = 900$ Н·м:
 а — внешнее поперечное сечение ГК ($z = 0$); б — внутреннее поперечное сечение ГК ($z = b_w$)

коэффициенты смещения ГК $x_g = 3,1$ и ЖК $x_b = 3,2$; толщина оболочки ГК $h_3 = 1,2$ мм; толщина обода ГК под зубчатым венцом $h_1 = 1,4$ мм; ширина зубчатого венца $b_w = 30$ мм; длина оболочки ГК $l = 160$ мм; ширина ГП $b = 24$ мм; число тел качения в ГП $N = 24$; форма кулачка — кольцо, деформированное четырьмя силами под углом $\beta = 35^\circ$ к большой оси кулачка. Максимальная деформация $W_0 = 1,1m$. Радиальные зазоры между НКГП и ГК и в ГП составляют 26 мкм. Внутренний конец зубчатого венца ГК совпадает с торцом ГП.

Схемы расположения зубьев ГК и ЖК в эвольвентном зацеплении при совпадении осей вращения кулачка и ЖК для момента сопротивления на выходном валу (далее момент сопротивления) $M_c = 900$ Н·м показаны на рис. 4, а и б.

Угловая координата зуба ГК относительно большой оси кулачка обозначена буквой φ . Из приведенных положений зубьев видно, что зазор на входе в зацепление принимает наименьшее значение Δ в поперечном сечении по внутреннему торцу (см. рис. 4, б, $\varphi = -43^\circ$). Минимальный зазор на входе в зацепление (да-

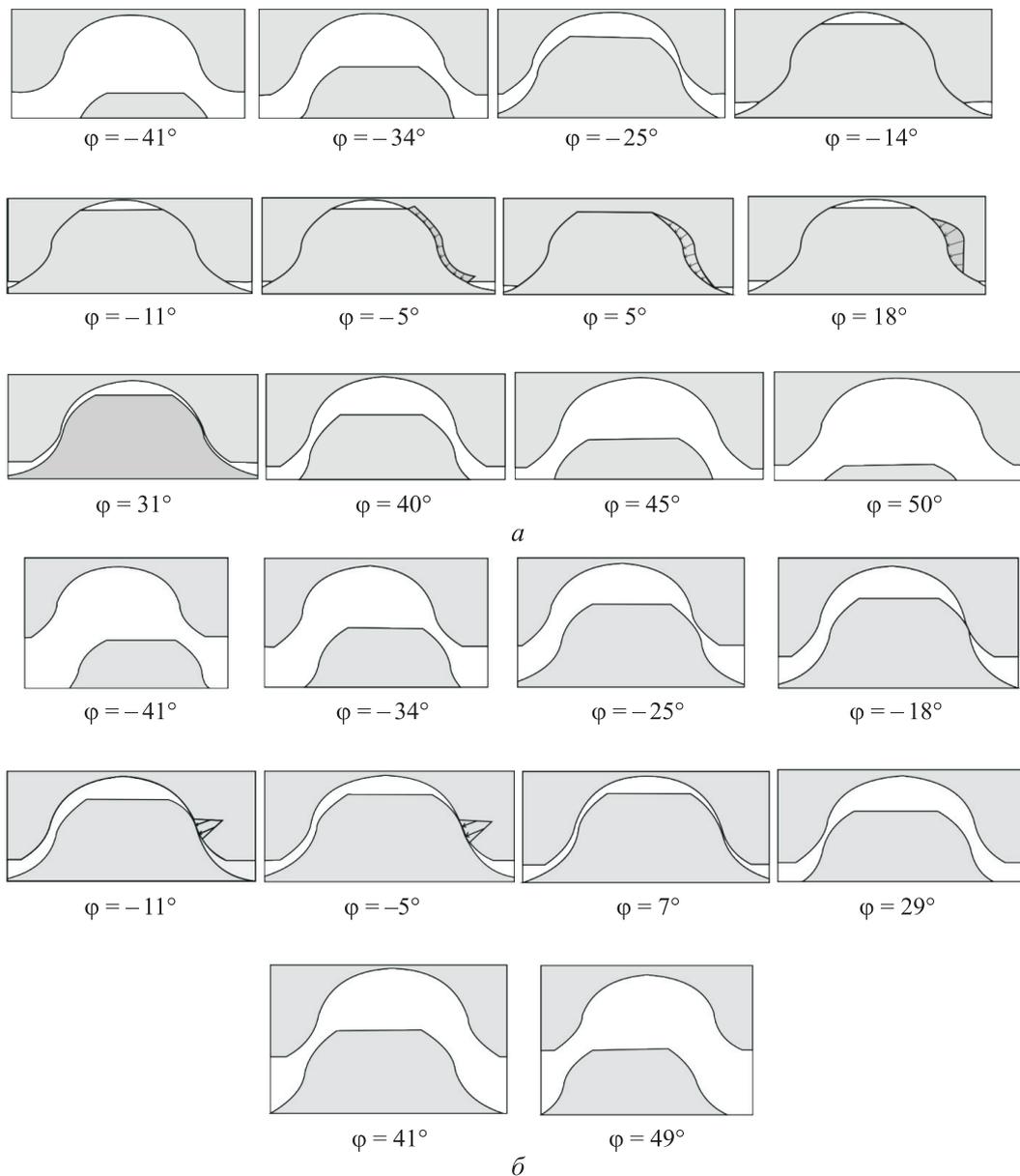


Рис. 5. Схемы расположения зубьев ГК и ЖК в циклоидальном зацеплении при совпадении осей вращения кулачка и ЖК для момента сопротивления $M_c = 900$ Н·м: а — внешнее поперечное сечение ГК ($z=0$); б — внутреннее поперечное сечение ГК ($z=b_w$)

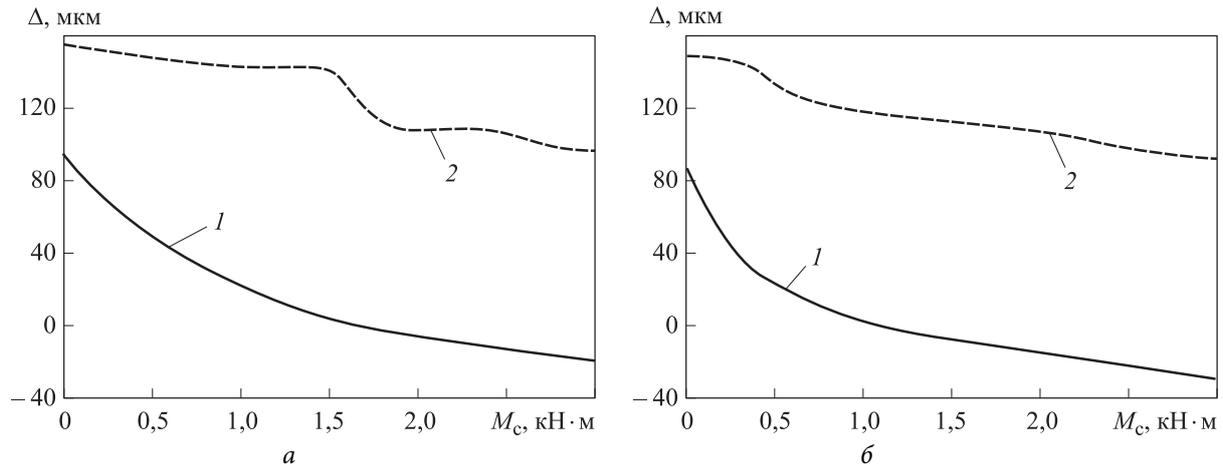


Рис. 6. Зависимости минимального зазора Δ зубьев ВЗП с эвольвентным (1) и циклоидальным (2) зацеплениями от момента сопротивления M_c при радиальном смещении оси кулачка $e_h = 0$ (а) и 40 мкм (б)

лее минимальный зазор) Δ имеет небольшое значение. Следовательно, в эвольвентном зацеплении ВЗП существует возможность появления интерференции зубьев на входе в зацепление. Интерференция может возникнуть из-за погрешностей изготовления и монтажа деталей ВЗП, при котором появится радиальное смещение оси кулачка относительно оси ЖК (далее радиальное смещение кулачка) e_h .

Схемы расположения зубьев ГК и ЖК в циклоидальном зацеплении при совпадении осей вращения кулачка и ЖК для момента сопротивления $M_c = 900 \text{ Н}\cdot\text{м}$ показаны на рис. 5, а и б. Зазоры на входе в зацепление имеют достаточно большие значения и незначительно различаются в поперечных сечениях по внутреннему и внешнему торцам зубчатого венца (см. рис. 5, а, $\varphi = -41^\circ$). Следовательно, в циклоидальном зацеплении рассматриваемой ВЗП появление интерференции на входе в зацепление полностью исключено.

Зависимости минимального зазора Δ зубьев ВЗП с эвольвентным и циклоидальным зацеплениями от момента сопротивления M_c при совпадении осей вращения кулачка, ГК и ЖК показаны на рис. 6, а. Минимальный зазор Δ определялся по всей длине зубчатого венца.

В эвольвентном зацеплении (кривая 1) зазор Δ сильно зависит от момента сопротивления M_c . При увеличении M_c с 0 до 1,5 кН·м указанный зазор уменьшается от 90 мкм до 0. Следовательно, при $M_c > 1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ происходит интерференция зубьев, в результате которой повышается их износ, и может возникнуть пропуск или заклинивание зубьев.

В циклоидальном зацеплении минимальный зазор имеет большие значения ($\Delta = 90 \dots 150 \text{ мкм}$) и незначительно уменьшается при увеличении момента сопротивления M_c (см. рис. 6, а, кривая 2). Интерференции зубьев в этом зацеплении не происходит во всем диапазоне момента сопротивления $M_c = 0 \dots 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Зависимости минимального зазора Δ зубьев ВЗП с эвольвентным и циклоидальным зацеплениями от момента сопротивления M_c при радиальном смещении оси кулачка $e_h = 40 \text{ мкм}$ показаны на рис. 6, б. В эвольвентном зацеплении радиальное смещение оси кулачка e_h значительно уменьшает минимальный зазор Δ (см. рис. 6, а и б, кривые 1). При $e_h = 40 \text{ мкм}$ минимальный зазор Δ становится отрицательным при моменте $M_c > 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Смещение оси кулачка происходит из-за погрешностей изготовления и монтажа деталей. Следовательно, в эвольвентном зацеплении интерференция зубьев может появиться уже при моменте $M_c = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

В циклоидальном зацеплении радиальное смещение оси кулачка e_h незначительно влияет на минимальный зазор Δ (см. рис. 6, а и б, кривые 2). Его значение не превышает 80 мкм. Следовательно, опасность появления интерференции зубьев при работе ВЗП полностью отсутствует.

Выводы

1. Выполнено сравнение возможности появления интерференции зубьев ВЗП с эвольвентным и циклоидальным зацеплениями.

2. Расчетным путем показано, что в циклоидальном зацеплении минимальный зазор значительно больше, чем в эвольвентном.

3. Установлено, что в ВЗП с эвольвентным зацеплением может возникнуть интерферен-

ция зубьев при моменте сопротивления $M_c > 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$. В передаче с циклоидальным зацеплением интерференция не появляется в диапазоне нагрузок $M_c = 0 \dots 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Литература

- [1] Иванов М.Н. *Волновые зубчатые передачи*. Москва, Высшая школа, 1981. 184 с.
- [2] Гинзбург Е.Г. *Волновые зубчатые передачи*. Ленинград, Машиностроение, 1969. 200 с.
- [3] Янгулов В.С. *Волновые и винтовые механизмы и передачи*. Томск, Изд-во ТПУ, 2011. 184 с.
- [4] Полетучий А.И. *Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов*. Харьков, ХАИ им. М. Жуковского, 2005. 675 с.
- [5] Ardelean F.A. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA". *Ann. Oradea Univ., Fasc. Manag. Technol. Eng.*, 2007, vol. 6, no. 16, pp. 882–885.
- [6] Dhaouadi R., Ghorbel F.H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gear. *Int. J. Simul. Model.*, 2008, vol. 28, no. 3, pp. 329–336, doi: <https://doi.org/10.1080/02286203.2008.11442485>
- [7] Бучаков Ю.В. *Модификация профиля зубьев волновых передач с целью получения бескромочного зацепления стандартным инструментом*. Дисс. ... канд. тех. наук. Москва, СТАНКИН, 1983. 222 с.
- [8] Стрельников В.Н., Суков Г.С., Суков М.Г. Устранение интерференции зубьев в крупной волновой передаче. *Вестник национального технического университета «ХПИ»*, 2013, № 41, с. 133–146.
- [9] Полетучий А.И., Стеценко Я.А. Оптимизация параметров волновой зубчатой передачи по предельному вращающему моменту. *Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии*, 2007, № 37, с. 73–79.
- [10] Клеников С.С. Расчет геометрии волнового зацепления с циклоидальной формой и сил взаимодействия зубьев колес. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2015, № 2, с. 107–117, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2015-2-107-117>
- [11] Майков А.И. *Комплекс математических моделей волновых механизмов с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов*. Дисс. ... канд. тех. наук. Москва, МГИУ, 2011. 199 с.
- [12] Фомина Т.А. Модель для расчета эквивалентных толщин зубчатого венца гибкого колеса с круговой формой зуба и распределения в нем эквивалентных напряжений. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2011, № 6, с. 19–25.
- [13] Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Расчет сил взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2011, спец. вып. Энергетическое и транспортное машиностроение, с. 230–240.
- [14] Люминарский С.Е., Люминарский И.Е. Математическая модель волновой зубчатой передачи с дисковым генератором волн. *Машиностроение и инженерное образование*, 2012, № 2, с. 45–52.
- [15] Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. Санкт-Петербург, Лань, 2009. 608 с.

References

- [1] Ivanov M.N. *Volnovye zubchatye peredachi* [Wave gears]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981. 184 p. (In Russ.).
- [2] Ginzburg E.G. *Volnovye zubchatye peredachi* [Wave gears]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1969. 200 p. (In Russ.).
- [3] Yangulov V.S. *Volnovye i vintovye mekhanizmy i peredachi* [Wave and screw mechanisms and gears]. Tomsk, Izd-vo TPU Publ., 2011. 184 p. (In Russ.).
- [4] Poletuchiy A.I. *Teoriya i konstruirovaniye vysokoeffektivnykh volnovykh zubchatykh mekhanizmov* [Theory and design of high-efficient wave gears]. Khar'kov, KhAI im. M. Zhukovskogo Publ., 2005. 675 p. (In Russ.).
- [5] Ardelean F.A. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA". *Ann. Oradea Univ., Fasc. Manag. Technol. Eng.*, 2007, vol. 6, no. 16, pp. 882–885.

- [6] Dhaouadi R., Ghorbel F.H. Modelling and analysis of nonlinear stiffness, hysteresis and friction in harmonic drive gear. *Int. J. Simul. Model.*, 2008, vol. 28, no. 3, pp. 329–336, doi: <https://doi.org/10.1080/02286203.2008.11442485>
- [7] Buchakov Yu.V. *Modifikatsiya profilya zub'yev volnovykh peredach s tsel'yu polucheniya beskromochnogo zatsepleniya standartnym instrumentom*. Diss. kand. tekhn. nauk [Modification of wave gear tooth profile in order to achieve unedged engagement. Kand. tech. sci. diss.]. Moscow, STANKIN Publ., 1983. 222 p. (In Russ.).
- [8] Strel'nikov V.N., Sukov G.S., Sukov M.G. Eliminating the interference of teeth in a large wave transmission. *Vestnik natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta «KhPI»* [Bulletin of National Technical University «KhPI»], 2013, no. 41, pp. 133–146. (In Russ.).
- [9] Poletuchiy A.I., Stetsenko Ya.A. Optimization of the parameters for the wave gear torque limit. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii* [Public information and computer integrated technologies], 2007, no. 37, pp. 73–79. (In Russ.).
- [10] Klenikov S.S. Geometry analysis of harmonic gear with cycloidal cogs and interaction forces. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2015, no. 2, pp. 107–117, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2015-2-107-117> (in Russ.).
- [11] Maykov A.I. *Kompleks matematicheskikh modeley volnovykh mekhanizmov s krugovoy formoy zub'yev i uprugimi zven'yami v vide kol'tsevykh pruzhinnykh paketov*. Diss. kand. tekhn. nauk [Complex of mathematical models for gear mechanisms with circular tooth shape and elastic links in the form of ring pressure packet. Kand. tech. sci. diss.]. Moscow, MGIU Publ., 2011. 199 p. (In Russ.).
- [12] Fomina T.A. The model of calculation of equivalent thickness of flexible gear rim with circular or cycloidal teeth and distribution of equivalent stress therein. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2011, no. 6, pp. 19–25. (In Russ.).
- [13] Lyuminarskiy I.E., Lyuminarskiy S.E. Calculation of interaction forces between elements of the wave gear. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2011, spec. iss. Energy and transport machine building, pp. 230–240. (In Russ.).
- [14] Lyuminarskiy S.E., Lyuminarskiy I.E. Mathematical model of a harmonic drive with the disk wave generator. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovanie*, 2012, no. 2, pp. 45–52. (In Russ.).
- [15] Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of computational mathematics]. Sankt-Petersburg, Lan' Publ., 2009. 608 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 23.01.2022

Информация об авторах

ЛЮМИНАРСКИЙ Игорь Евгеньевич — доктор технических наук, профессор кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: lie260@mail.ru).

ЛЮМИНАРСКИЙ Станислав Евгеньевич — кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, к. 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

Information about the authors

LYUMINARSKY Igor Evgenievich — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: lie260@mail.ru).

LYUMINARSKY Stanislav Evgenievich — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Department of Theory of Mechanisms and Machines. Bauman Moscow State Technical University (105005, Moscow, Russian Federation, 2nd Baumanskaya St., Bldg. 5, Block 1, e-mail: katjstas@mail.ru).

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Люминарский И.Е., Люминарский С.Е. Сравнение эвольвентного и циклоидального зацеплений волновых зубчатых передач. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 4, с. 14–22, doi: [10.18698/0536-1044-2022-4-14-22](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-4-14-22)

Please cite this article in English as:

Lyuminarsky I.E., Lyuminarsky S.E. Comparison of Involute and Cycloidal Engagement in Harmonic Drives. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 4, pp. 14–22, doi: [10.18698/0536-1044-2022-4-14-22](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-4-14-22)