

# Машиностроение и машиноведение

УДК 621.86, 519.6

doi: 10.18698/0536-1044-2022-2-3-17

## Повышение производительности контурной механической обработки путем сглаживания пространственной кусочно-линейной траектории и квазиоптимального планирования подач<sup>\*</sup>

А.А. Зеленский, Т.Х. Абдуллин, А.В. Алепко, Ю.В. Илюхин  
ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»

## Contour Machining Performance Improvement by Smoothing Spatial Piecewise Linear Toolpath and Quasi-Optimal Feed Rate Planning

A.A. Zelensky, T.Kh. Abdullin, A.V. Alepko, Yu.V. Ilyukhin  
Moscow State Technical University of STANKIN

В настоящее время не все системы управления многокоординатных станков и промышленных роботов способны эффективно обрабатывать изделия со сложной формой поверхности. Траектория движения рабочего инструмента при обработке таких изделий обычно описывается кадрами с использованием операторов G01, представляющих собой отрезки малой длины. Отработка такого контура требует периодического снижения скорости подачи в местах сопряжения сегментов, что приводит к снижению производительности и ухудшению качества механообработки. Предложен метод решения указанной проблемы, основанный на сглаживании траектории путем включения в нее сплайновых сегментов. При сглаживании применен кубический B-сплайн с пятью контрольными точками, который дал возможность реализовать для всей траектории геометрическую непрерывность  $G^2$ . Схема сглаживания позволяет аналитически выразить максимальную кривизну, учесть заданную ошибку аппроксимации построения сплайна и взаимное пересечение соседних кривых. Повышение производительности обработки достигается применением двунаправленного алгоритма предварительного просмотра кадров, учитывающего заданные геометрические ограничения и хордовую ошибку построения сплайна, а также ограничения контурной скорости, ускорения и рывка в каждом сегменте траектории. Применение при параметрической интерполяции метода Рунге — Кутты второго порядка с компенсационной схемой приближения позволило уменьшить флуктуации скорости подачи, что положительно повлияло на качество обработанной поверхности изделия. Резуль-

<sup>\*</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (проект NoFSFS-2020-0031).

таты экспериментов подтверждают правильность выбранного подхода и обоснованность его реализации в системе управления при высокоскоростной обработке изделий со сложной формой поверхностей.

**Ключевые слова:** параметрическая интерполяция, метод планирования подач, сглаживание траектории, алгоритм предпросмотра кадров, B-сплайн, высокоскоростная обработка

Currently, not all control systems of multi-axis machine tools and industrial robots are capable of efficiently machining the products with a complex surface shape. The toolpath for such products is usually described by blocks using G01 operator frames, which are short segments. To machine such a contour, it is necessary to periodically decrease the feed rate at the conjugation points of the segments, which leads to a decrease in performance and a lower quality of machining. The study introduces a method to solve the problem: smoothing the toolpath by including spline segments in it. When smoothing, we used a cubic B-spline with five control points, which made it possible for the entire path to have geometric continuity  $G^2$ . The smoothing scheme enabled us to analytically express the maximum curvature, take into account the specified error in the approximation of the spline construction and the mutual intersection of adjacent curves. Contour machining performance was improved by using a bidirectional frame preview algorithm, which accounted for the specified geometric constraints and chordal spline construction error, as well as limits of the contour rate, acceleration and jerk in each segment of the path. The second-order Runge-Kutta method with a compensation approximation scheme was used for parametric interpolation, which made it possible to reduce fluctuations in the feed rate and positively affected the quality of the machined product surface. The experimental results confirm the correctness of the chosen approach and its validity in the control system for high-speed machining of products with complex surfaces.

**Keywords:** parametric interpolation, feed rate planning algorithm, path smoothing, frame preview algorithm, B-spline, high-speed machining

В механообрабатывающем производстве постоянно повышаются требования к качеству и точности обработки изделий, а следовательно, и к системе управления [1]. Сформированная в САМ-системе управляющая программа может описывать траекторию, включающую в себя как сплайновые сегменты, так и линейные. Однако системы ЧПУ разных производителей поддерживают различные типы сплайнов и имеют отличные друг от друга форматы описания кадров. Поэтому во многих случаях применяют более простой и универсальный формат кадров, предусматривающий только линейную интерполяцию.

При высокой степени аппроксимации изделия САМ-система будет генерировать большое число линейных сегментов малой длины, обработка которых в системе управления будет сопровождаться множеством проблем [2, 3]. Ввиду резкой смены направления движения рабочего инструмента на стыке сегментов при использовании трапецеидального закона разгона и торможения [4, 5] возникают разрывы в контурном ускорении, вследствие чего ухудшается качество обрабатываемой поверхности,

снижается точность обработки и ускоряется износ оборудования.

Уменьшение скорости подачи на стыке двух линейных сегментов приводит к существенному падению производительности и динамическим вибрациям, действующим на узлы станка или промышленного робота. По этой причине при контурном управлении применяют S-образный метод планирования подач, включающий в себя алгоритмы предварительного просмотра (далее предпросмотр) кадров и сглаживания траектории рабочего инструмента.

Планирование скоростей подачи играет важнейшую роль в достижении требуемой производительности обработки заготовки вдоль заданной траектории с учетом динамических возможностей станка или робототехнического комплекса [3, 6, 7]. Такое планирование представляет собой нестандартную задачу оптимизации и требует реализации в системе управления дополнительных программных компонентов.

Преобразование кусочно-линейной траектории в линейно-сплайновую обычно осуществляется в модуле геометрического сглаживания [8–10]. Другим программным компонентом

является модуль предпросмотра кадров [4, 8–11], который позволяет повысить среднюю контурную скорость обработки, учитывая геометрические параметры и заданные кинематические ограничения кривых разгона и торможения.

Окончательно формирует заданную траекторию перемещения рабочего инструмента относительно заготовки интерполятор [12], который может реализовывать либо линейный, либо параметрический тип интерполяции в зависимости от типа обрабатываемого сегмента.

Планирование скоростей подач вдоль траектории, включающей в себя параметрические кривые, требует существенных вычислительных затрат. Снижение частоты выдачи управляющих воздействий на исполнительную часть системы управления негативно влияет на динамические свойства станков и роботов [13], а следовательно, и на качество обработки.

Поэтому при существующем подходе к построению систем управления на основе персональных компьютеров многие методы невозможно полностью реализовать в режиме реального времени. Одним из вариантов решения этой проблемы является использование аппаратных ускорителей на базе программируемых логических интегральных схем [13–15] с возможностью распараллеливания реализованных алгоритмов.

В статье изложены результаты решения задачи повышения производительности обработки, выполняемой трехкоординатной технологической машиной. Исходная траектория рабочего инструмента, подлежащая преобразованию, является кусочно-ломанной и описывается кадрами линейной интерполяции G01. Решение задачи обеспечивают четыре программных модуля. К ним относятся геометрический модуль сглаживания траектории кубическим В-сплайном, модуль двунаправленного сканирования (предпросмотра кадров с обратным проходом), модуль планирования подачи с оптимизацией скорости и модуль линейно-сплайновой интерполяции.

При планировании скоростей подачи применяют квазиоптимальный метод, предъявляющий меньшие требования к аппаратным ресурсам системы управления. Он учитывает кинематические ограничения в виде тангенциальных составляющих скорости, ускорения и рывка по всей длине сегмента. При этом ограничения нормальных составляющих и хордовой ошибки

построения сплайна действуют только в местах сопряжения сегментов.

Цель работы — минимизация времени обработки кусочно-линейной траектории системы управления станка или промышленного робота и исследование влияния разработанных алгоритмов на производительность обработки контура.

**Геометрический модуль сглаживания.** Этот модуль преобразует  $i$ -й линейный сегмент траектории длиной  $L_i$  в окне буфера предпросмотра в линейно-сплайновый участок, в котором сплайновая часть представляет собой симметричный кубический В-сплайн, обеспечивающий непрерывность кривизны в местах сопряжения сегментов (рис. 1, а) [8, 16].

Траектория параметрической кривой математически описывается функцией от независимой переменной  $u$ , а соответствующее векторное представление точки в пространстве на кривой можно записать в векторно-матричной форме

$$C(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}, \quad a \leq u \leq b,$$

где  $a$  и  $b$  — минимальное и максимальное значения параметра  $u$ .

Параметрическое векторное уравнение для В-сплайна  $p$ -й степени (порядка  $k = p + 1$ ) определяется как

$$C(u) = \sum_{j=0}^n N_{j,p}(u) Q_j, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (1)$$

где  $N_{j,p}(u)$  —  $j$ -е базисные функции В-сплайна степени  $p$ , определяемые рекуррентно по формулам Кокса — де Бура;  $Q_j$  — входной набор из  $n + 1$  контрольных точек.

Базисные функции В-сплайна определяются рекуррентно по формулам Кокса — де Бура

$$N_{j,0} = \begin{cases} 1 & \text{при } u_j \leq x < u_{j+1}; \\ 0 & \text{при } x \notin [u_j, u_{j+1}), \end{cases}$$

$$N_{j,p}(u) = \frac{u - u_j}{u_{j+p} - u_j} N_{j,p-1}(u) + \frac{u_{j+p+1} - u}{u_{j+p+1} - u_{j+1}} N_{j+1,p-1}(u).$$

Здесь  $u_j$  — элементы неоднородного узлового вектора

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k, \dots, u_{r-k-1}, u_{r-k}, \dots, u_{r-1}\},$$

удовлетворяющие соотношению

$$u_0 < u_j \leq u_{j+1} \leq u_{r-1},$$

где  $r$  — длина узлового вектора,  $r = n + k + 1$ .

Для кубического сплайна выражение (1) запишется в виде

$$C(u) = \sum_{j=0}^4 N_{j,3}(u) Q_j.$$

Расположение контрольных точек  $\{Q_{0i}, Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{3i}, Q_{4i}\}$  сплайна  $C(u)$  вдоль  $i$ -го и  $(i-1)$ -го сегментов определяется из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} |Q_{0i}P_i| &= (1+c)d_{2i}; & |Q_{1i}P_i| &= d_{2i}; \\ |Q_{3i}P_i| &= d_{2i}; & |Q_{4i}P_i| &= (1+c)d_{2i}; \\ c &= d_{1i}/d_{2i}, \end{aligned}$$

где  $c$  — отношение длин сглаживания;  $d_{2i}$ ,  $d_{1i}$  — расстояния сглаживания.

Определение оптимального значения коэффициента  $c$  для минимизации времени обработки контура требует дополнительных исследований, но, исходя из работ [9, 16, 17], его оптимальное значение лежит в диапазоне 0,25...0,75.

Вследствие симметрии кривой точка с максимальной кривизной будет находиться точно в середине сплайна, поэтому аналитически максимальную кривизну можно описать следующим образом [8]:

$$K_{\max i} = \frac{4 \sin \beta_i}{3 d_{2i} \cos^2 \beta_i}, \quad (2)$$

где  $\beta_i = \gamma_i/2$  ( $\gamma_i$  — угол между линейными сегментами).

Из выражения (2) следует, что большее значение  $d_{2i}$  будет приводить к меньшей кривизне.

Свойство симметрии также позволяет выразить максимальный допуск ошибки аппрокси-

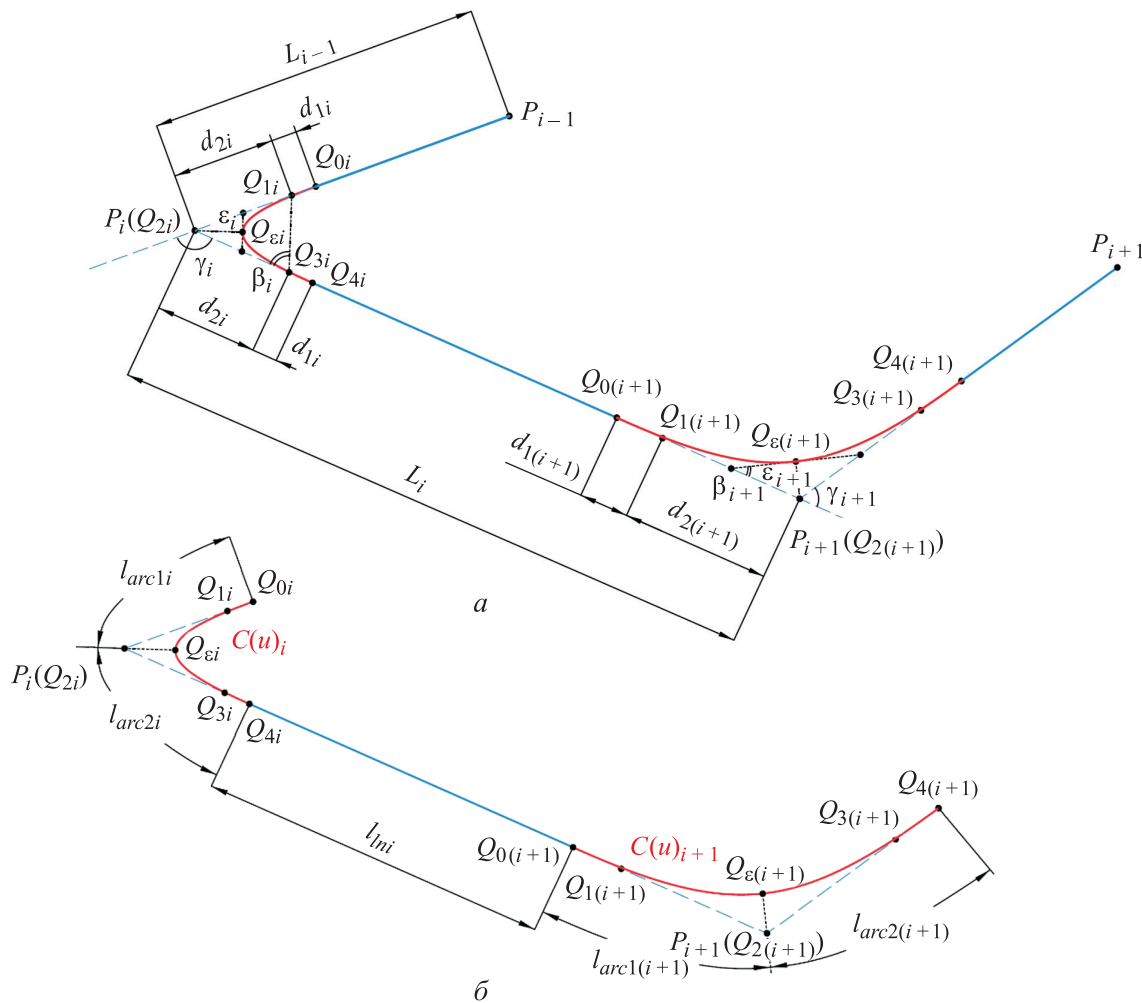


Рис. 1. Схема сглаживания линейных сегментов кубическим В-сплайном (а) и соотношения длин в линейно-сплайновом сегменте (б)

мации  $\varepsilon_i$ , равный расстоянию от точки  $Q_{2i}$  до середины сплайна  $Q_{\varepsilon i} = C(0,5)$ :

$$\varepsilon_i = \frac{d_{2i} \sin \beta_i}{2}. \quad (3)$$

В процессе сглаживания не должно быть пересечения вставленных сплайновых участков, т. е. сумма  $d_2 + d_1$  не должна превышать половины длины сопрягаемого линейного участка. С учетом выражения (3) получаем соотношение для расстояния сглаживания [8, 17]

$$d_{2i} = \min \left[ \frac{\min(L_{i-1}, L_i) - l_{mi}}{2(1+c)}, \frac{2\varepsilon_i}{\sin \beta_i} \right],$$

где  $L_{i-1} = |P_{i-1}P_i|$ ;  $L_i = |P_iP_{i+1}|$ ;  $l_{mi}$  — расстояние, гарантирующее остаток пути на линейном участке, принятое равным

$$l_{mi} = \min(L_{i-1}, L_i)/3.$$

Расчет длины сплайна определяется приближенно численным методом с помощью квадратур Гаусса — Лежандра [18].

Точка  $Q_{\varepsilon i}$  будет разбивать сплайновый участок кривой  $C(u)_i$  на две равные части  $l_{arc1i}$  и  $l_{arc2i}$  (рис. 1, б), одна из которых будет относиться к предыдущему кадру от точки  $Q_{0i}$ , а другая половина к следующему кадру до точки  $Q_{4i}$ . Соответствующие им длины можно определить по выражению

$$l_{arc1i} = l_{arc2i} = \frac{l_{arci}}{2},$$

где  $l_{arci}$  — суммарная длина сплайнового участка.

Длина остатка линейной части сегмента

$$l_{lni} = L_i - (d_{1i} + d_{2i}) - (d_{1(i+1)} + d_{2(i+1)}),$$

Поэтому формируемый линейно-сплайновый участок состоит из половины длины  $l_{arc2i}$  кривой  $C(u)_i$ ,  $l_{lni}$  и половины длины  $l_{arc1(i+1)}$  следующего сплайна  $C(u)_{i+1}$ , а его суммарная длина определяется из уравнения

$$L_{arci} = l_{arc2i} + l_{lni} + l_{arc1(i+1)}.$$

**Алгоритм предпросмотра кадров.** Алгоритм двунаправленного сканирования выполняет анализ сопрягающих участков в буфере предпросмотра и рассчитывает допустимые скорости подачи в критических точках сплайна, которые соответствуют его максимальной кривизне.

Сначала осуществляется обратный порядок сканирования траектории от последнего сегмента в буфере к первому, и конечная скорость подачи самого последнего сегмента в буфере всегда считается равной нулю. Прямой проход выполняется аналогичным образом, но за нулевое значение принимается начальная скорость самого первого кадра в буфере.

Расчет скоростей подачи в критических точках учитывает ограничения на хордовую ошибку построения сплайна, его длину, заданную скорость подачи  $f_c$  в кадре и кинематические ограничения на тангенциальные и нормальные составляющие ускорения и рывка [4, 8].

Вследствие применения семифазной схемы формирования S-образной кривой разгона/торможения [19] в модуле предпросмотра осуществляется предварительная оценка каждого сегмента траектории на число возможных фаз.

*Обратное сканирование сегментов* состоит из следующих основных этапов.

1. Инициализация алгоритма, установка счетчика сегментов  $k = N$ , конечная скорость в первом сегменте  ${}^b v_e = 0$ .

2. Если  $k = 1$ , то происходит переход на завершающий третий этап, в противном случае продолжается выполнение второго этапа.

2.1. Начало формирования S-образного профиля разгона/торможения для текущего линейно-сплайнового сегмента с учетом тангенциальных ограничений. Изначально предполагается, что S-образная кривая состоит из двух фаз: линейного возрастания ускорения до  $A_{ta} \leq A_{t \max}$  и его линейного убывания (рис. 2, а), где  $A_{t \max}$  — заданное максимальное тангенциальное ускорение.

С учетом симметричности кривой составляется кубическое уравнение, где известной величиной является скорость в конце сегмента  ${}^b v_e^T$ , а искомой скорость в его начале  ${}^b v_s^T$ :

$$({}^b v_s^T)^3 + {}^b v_e^T ({}^b v_s^T)^2 - ({}^b v_e^T)^2 {}^b v_s^T - ({}^b v_e^T)^3 - J_t L_{arck}^2 = 0, \quad (4)$$

где  $J_t$  — заданный максимальный тангенциальный рывок;  $L_{arck}$  — длина текущего сегмента в буфере.

Уравнение (4) обычно решается методом Ньютона — Рафсона. Если найденное значение тангенциальной скорости  ${}^b v_s^T \leq A_t^2 / J_t + {}^b v_e^T$ , то можно переходить к этапу 2.2.

Если  ${}^b v_s^T > A_t^2 / J_t + {}^b v_e^T$ , то значение скорости  ${}^b v_s^T$  необходимо пересчитать и сегмент будет

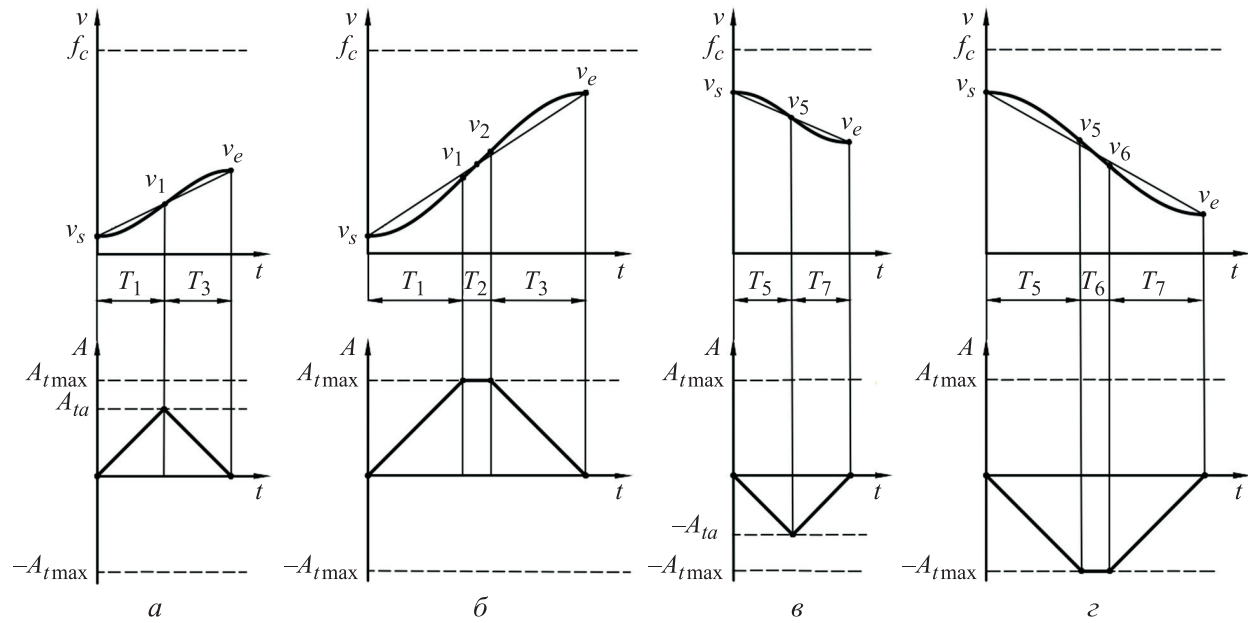


Рис. 2. Предварительное определение стратегии разгона/торможения в предпросмотре кадров при выполнении условий  $A_t \leq A_{t\max}$  (а),  $A_t = A_{t\max}$  (б),  $|-A_t| \leq |-A_{t\max}|$  (в),  $A_t = -A_{t\max}$  (г)

включать в себя как минимум три фазы (рис. 2, б). Вместо соотношения (12) потребуется решить квадратное уравнение

$$J_t ({}^b v_s^T)^2 + A_t^2 {}^b v_s^T - J_t ({}^b v_e^T)^2 + A_t^2 {}^b v_e^T - 2A_t J_t L_{arck} = 0. \quad (5)$$

После этого можно переходить к следующему этапу 2.2.

2.2. Учет хордовой ошибки сплайна и нормальных составляющих ускорения и рывка, равных по модулю их тангенциальным значениям. Окончательное выражение для скорости подачи при обратном проходе [20] имеет вид

$${}^b v_s = \min \left\{ {}^b v_s^T, \frac{2}{T_s} \sqrt{\frac{2\delta}{K_{\max}} - \delta^2}, \sqrt{\frac{A_n}{K_{\max}}}, \sqrt[3]{\frac{J_n}{K_{\max}^2}}, f_c \right\}, \quad (6)$$

где  $\delta$  — заданное значение хордовой ошибки;  $T_s$  — период интерполяции;  $A_n$  и  $J_n$  — нормальные составляющие ускорения и рывка.

2.3. Декрементирование счетчика сегментов в буфере  $k = k - 1$  и переход к этапу 2.

3. Сохранение в буфер предпросмотра скоростей подачи  ${}^b v_s$  для  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Прямое сканирование сегментов включает в себя следующие этапы.

1. Инициализация алгоритма, установка счетчика сегментов  $k = 1$ , начальная скорость в первом сегменте  ${}^f v_s = 0$ .

2. Если  $k = N$ , то происходит переход к последнему третьему этапу, в противном случае продолжается выполнение второго этапа.

2.1. Составление уравнения, аналогичного соотношению (4), где неизвестной величиной будет являться конечная скорость  ${}^f v_e^T$ . Если  ${}^f v_e^T \leq A_t^2 / J_t + {}^f v_s^T$ , то S-образный профиль состоит из двух фаз (см. рис. 2, а). В противном случае профиль скорости имеет три фазы (см. рис. 2, б), и конечную скорость необходимо уточнять решением квадратного уравнения (5). После чего выполняется п. 2.2.

2.2. Сравнение скоростей, определенных в прямом и обратном проходах (6), и определение окончательного значения скорости подачи в точке  $Q_{ei}$ :

$$v_k = \min \{ {}^b v_s, {}^f v_e^T \}.$$

2.3. Инкрементирование счетчика сегментов в буфере  $k = k + 1$  и переход к этапу 2.

3. Сохранение в буфер предпросмотра окончательной скорости подачи  $v_k$  для  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Прямое и обратное сканирование в алгоритме предпросмотра кадров дает предварительную оценку формы S-образной кривой, формируя для каждого сегмента траектории кривые максимального торможения и максимального разгона (рис. 3). При этом профили скорости при обратном проходе будут выглядеть как S-образные кривые торможения (рис. 2, в, г).

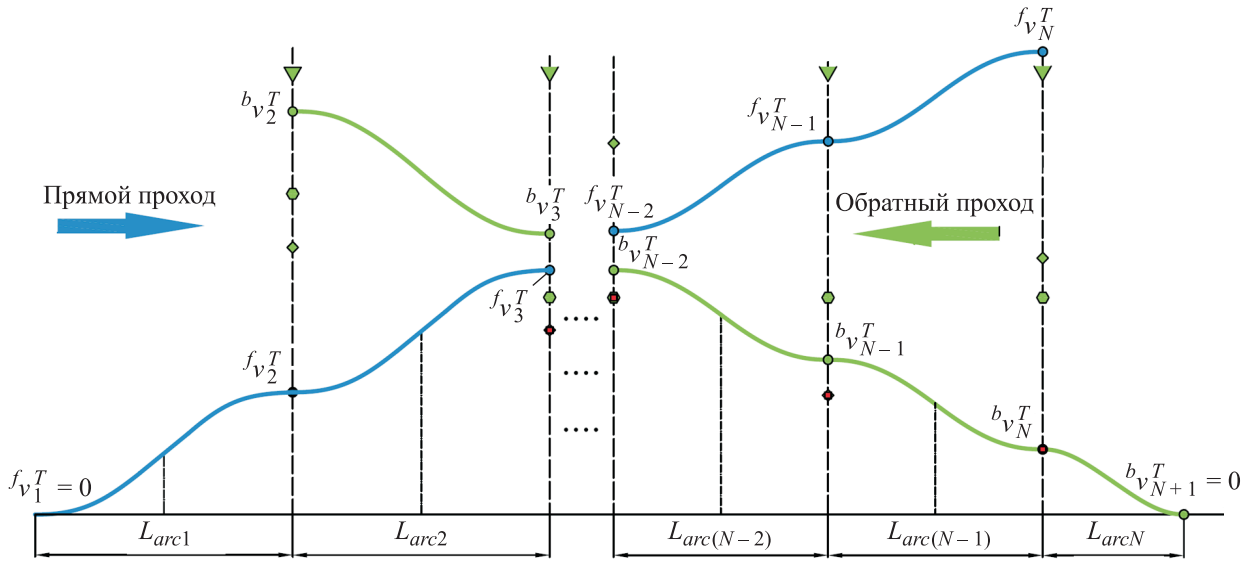


Рис. 3. Схема для расчета скоростей подачи в модуле предпросмотра кадров:  
 ● и ● — скорости подачи при прямом и обратном проходах с учетом тангенциальных ускорения и рывка;  
 ▼ — заданная скорость подачи; ● — скорость подачи при обратном проходе с учетом нормальных ускорения и рывка; ◆ — скорость подачи при обратном проходе с учетом хордовой ошибки сплайна; ■ — результирующее значение скорости подачи

Аналогично выглядит схема предпросмотра кадров при отсутствии сглаживания. Выражение для него похоже на формулу (6), но в нем отсутствуют ограничения, связанные с хордовой ошибкой  $\delta$ . С учетом резкого изменения направления движения рабочего инструмента за такт управления в точке сопряжения сегментов [5, 8] выражение для скорости подачи имеет вид

$$b_{v_s} = \min \left\{ b_{v_s}^T, \frac{T_s A_t}{2 \sin \beta_i}, f_c \right\}. \quad (7)$$

Полученные данные — начальная  $v_s$  и конечная  $v_e$  скорости подач, длина сегмента  $L_{arck}$  — передаются в модуль планировщика и служат критерием классификации сегментов на короткий, средний или длинный типы. Каждый отобранный сегмент характеризуется разным количеством временных интервалов, где полноценный длинный сегмент содержит семь временных интервалов ( $T_1, \dots, T_7$ ), называемых фазами. В зависимости от переданных параметров и кинематических ограничений на тангенциальный рывок и ускорение проводится окончательный выбор типа профиля.

Планирование подачи в сегменте требует расчета временных параметров и скоростей в промежуточных фазах ( $v_1, \dots, v_7$ ); всего может существовать 17 типов профилей [4]. Длинный тип обязательно будет включать в себя фазу постоянной скорости, а его путь достаточен

для достижения заданной скорости подачи  $f_c$ . В отличие от длинного типа в среднем будет наблюдаться нехватка пути для разгона до  $f_c$ . По этой причине изначально в сегменте применен алгоритм половинного деления для расчета максимально возможной скорости подачи  $f_{max} < f_c$ .

Кроме того, каждый тип сегмента траектории требует повторного использования описанного алгоритма для коррекции кинематических параметров S-образной кривой, так как конечные и начальные значения скоростей подачи, рассчитанные на этапе предпросмотра кадров, незначительно отличаются от таковых, определенных в модуле планирования подач. Причиной этого является округление временных параметров S-образной кривой, так как каждой фазе соответствует целое число тактов интерполяции.

Выявленный недостаток в виде ступенчатого изменения контурной скорости проявляется на стыке линейно-сплайновых сегментов в результирующем профиле скорости [21, 22]. Подробное описание алгоритма выходит за рамки данной работы.

**Параметрическая интерполяция.** Параметрическая интерполяция на сглаживающих участках реализована с помощью алгоритма Рунге — Кутты второго порядка с компенсационной схемой приближения параметра сплайна [17].



Связь последующего параметра сплайна  $u_{j+1}$  с текущим значением для выбранного метода описывается уравнением

$$u_{j+1} = u_{j+1}^{temp} + \Delta u_{j+1}.$$

Здесь  $u_{j+1}^{temp}$  — временный параметр;

$$\Delta u_{j+1} = \begin{cases} \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AD}}{2A} & \text{при } B^2 - 4AD \geq 0; \\ 0 & \text{при } B^2 - 4AD < 0, \end{cases}$$

где  $B$ ,  $A$ ,  $D$  — коэффициенты,

$$B = 2[C'(u_{j+1}^{temp}), C(u_{j+1}^{temp}) - C(u_j)];$$

$$A = [C'(u_{j+1}^{temp})]^2;$$

$$D = [C(u_{j+1}^{temp}) - C(u_j)]^2 - \Delta s_j^2.$$

Временный параметр, определяется по двухстадийному методу Рунге — Кутты:

$$u_{j+1}^{temp} = u_j + \frac{\Delta s_j}{2}(k_1 + k_2).$$

Здесь  $\Delta s_j = v_j^* T_s$  — дискретное приращение пути,  $v_j^* = (v_{j+1} + v_j)/2$  — действующая скорость подачи на дискретном шаге  $T_s$ ,  $v_{j+1}$  и  $v_j$  — запланированные значения скоростей подачи в интерполируемых точках;  $k_1$ ,  $k_2$  — коэффициенты,

$$k_1 = \frac{1}{|C'(u_j)|}; \quad k_2 = \frac{1}{|C'(u_j + k_1 \Delta s_j)|}.$$

Критерием перехода параметрической интерполяции в линейную служит суммарный пройденный путь  $s_i$  на каждом дискретном шаге, т. е. при  $s_i < l_{arcli}$  или  $s_i > (l_{arcli} + l_{lni})$  необходимо осуществлять параметрическую интерполяцию, а при  $s_i \geq l_{arcli}$  — линейную. Однако из-за приближенных длин сглаживающих кривых на граничных участках кривой с линейной зоной возможны проблемы с корректным определением типа интерполяции. Поэтому в алгоритм интерполяции введены дополнительные условия.

При  $u_{j+1} > 1$  интерполируемая точка будет перемещаться в сплайновый участок. В этом случае необходимо переключать параметрический тип в линейный, а координаты точки  $P_{j+1}$  пересчитывать повторно по алгоритму линейной интерполяции.

Переходный шаг требует определения длины хорды вдоль сплайнового участка  $|P_j Q_i^4|$ . Тогда

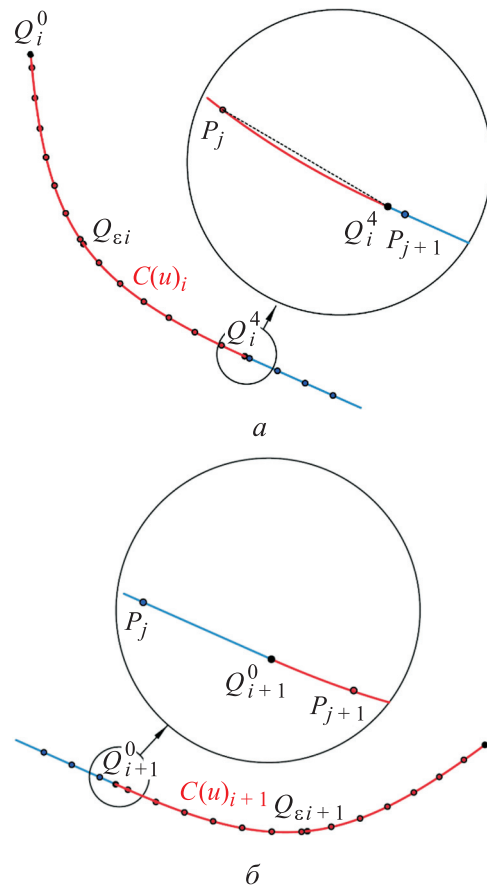


Рис. 4. Схемы линейно-сплайновой интерполяции: а — переход из сплайнового сегмента в линейный; б — переход из линейного участка в сплайновый

остаточная длина пути на линейном участке (рис. 4, а) рассчитывается по формуле

$$|Q_i^4 P_{j+1}| = \Delta s_j - |P_j Q_i^4|. \quad (8)$$

Уравнение (8) позволяет определить исходную точку для линейного алгоритма интерполяции. Аналогичным образом на дискретном шаге (рис. 4, б) рассчитывается остаточная длина дуги сплайна с помощью уравнения

$$|Q_{i+1}^0 P_{j+1}| = \Delta s_j - |P_j Q_i^0|, \quad (9)$$

где  $|P_j Q_i^0|$  — длина отрезка вдоль линейного участка.

Соотношение (9) применяют для корректного определения последующего параметра сплайна  $u_{j+1}$ , при этом  $u_j = 0$ . Данная методика обеспечивает сопряжение интерполируемых точек на сплайновом и линейном участках без существенных колебаний скоростей подачи.

**Результаты вычислительных экспериментов.** Эксперименты сводились к моделированию обработки тестового контура бабочки (рис. 5)



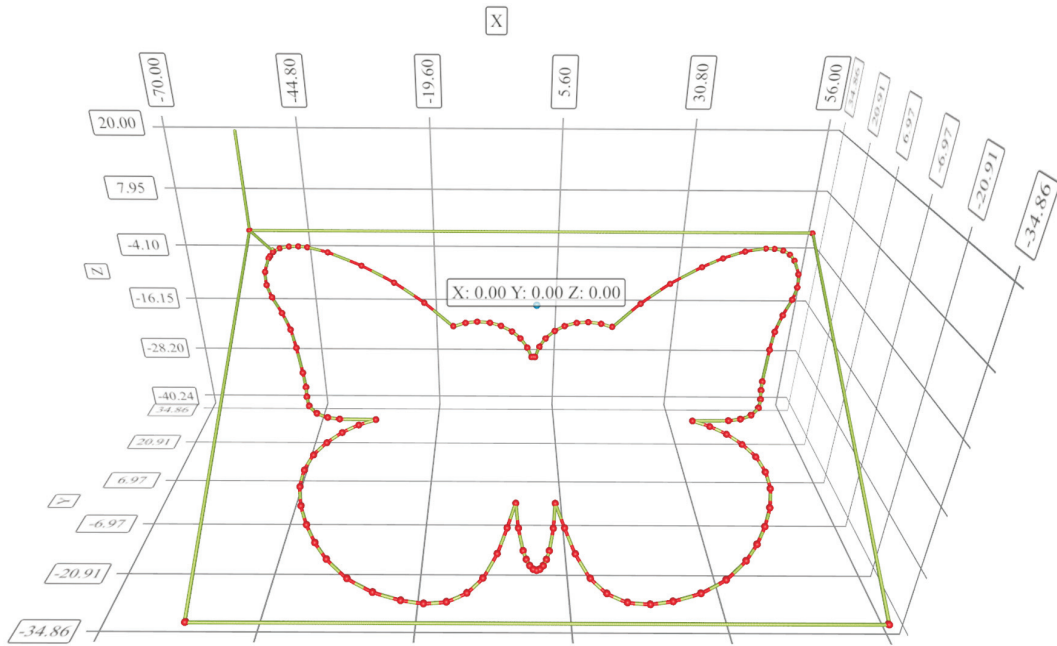


Рис. 5. Траектория тестового контура с использованием геометрического модуля сглаживания

при полном и урезанном наборах программных модулей в контроллере движения системы управления. Для моделирования использована программа, написанная на языке C++ в интегрированной среде разработки QtCreator с применением библиотек QCustomPlot для отображения результата экспериментов.

Выходными данными в контроллере движения являлись координаты интерполируемых точек, позволяющие рассчитать действительное приращение пути  $ds$  и реальное значение скорости подачи на каждом дискретном шаге. S-образные кривые разгона/торможения формируются за счет контроля рывка, от которого зависят соответствующие дискретные значения контурного ускорения, скорости и пути.

В первом проходе все кадры обрабатывались только в режиме G61 с применением модуля S-образного планирования подач и алгоритма линейной интерполяции (рис. 6, а). Второй проход выполнялся при отсутствии сглаживания, но с включением модуля предпросмотра кадров, где ограничения рассматривались по соотношению (7).

Третий эксперимент учитывает все заданные кинематические и геометрические ограничения и охватывает полный набор разработанных модулей с алгоритмами сглаживания траектории, предпросмотра кадров и S-образного планирования подач с линейно-сплайновой интерполяцией (рис. 6, б).

**Кинематические ограничения при линейно-сплайновой интерполяции**

Заданная скорость подачи $f_c$	
мм/с (м/мин) .....	166,667 (10)
Ускорение, мм/с <sup>2</sup> :	
центростремительное $A_{n \max}$ .....	498
тангенциальное $A_{t \max}$ .....	498
Рывок, мм/с <sup>3</sup> :	
центростремительный $J_{n \max}$ .....	2000
тангенциальный $J_{t \max}$ .....	2000
Хордовая ошибка построения сплайна $\delta$ , мм ...	0,005
Период интерполяции $T_s$ , мкс .....	400
Допуск ошибки построения сплайна $\epsilon$ , мм .....	0,1
Отношение длин сглаживания $c$ .....	0,25
Количество кадров в буфере предпросмотра $N$ ...	10
Суммарное число сегментов в контуре $N_{seg}$ .....	127

Как можно заметить, модуль планирования скоростей подачи совместно с алгоритмом предпросмотра кадров и геометрическим модулем сглаживания позволили поднять среднюю контурную скорость и уменьшить время обработки контура (примерно на 56,28 %) по сравнению с таковыми в эксперименте без сглаживания.

Применение только модуля предпросмотра кадров (без алгоритма сглаживания) дает незначительный прирост производительности (около 10,47 %) по сравнению с обработкой траектории в режиме G61.

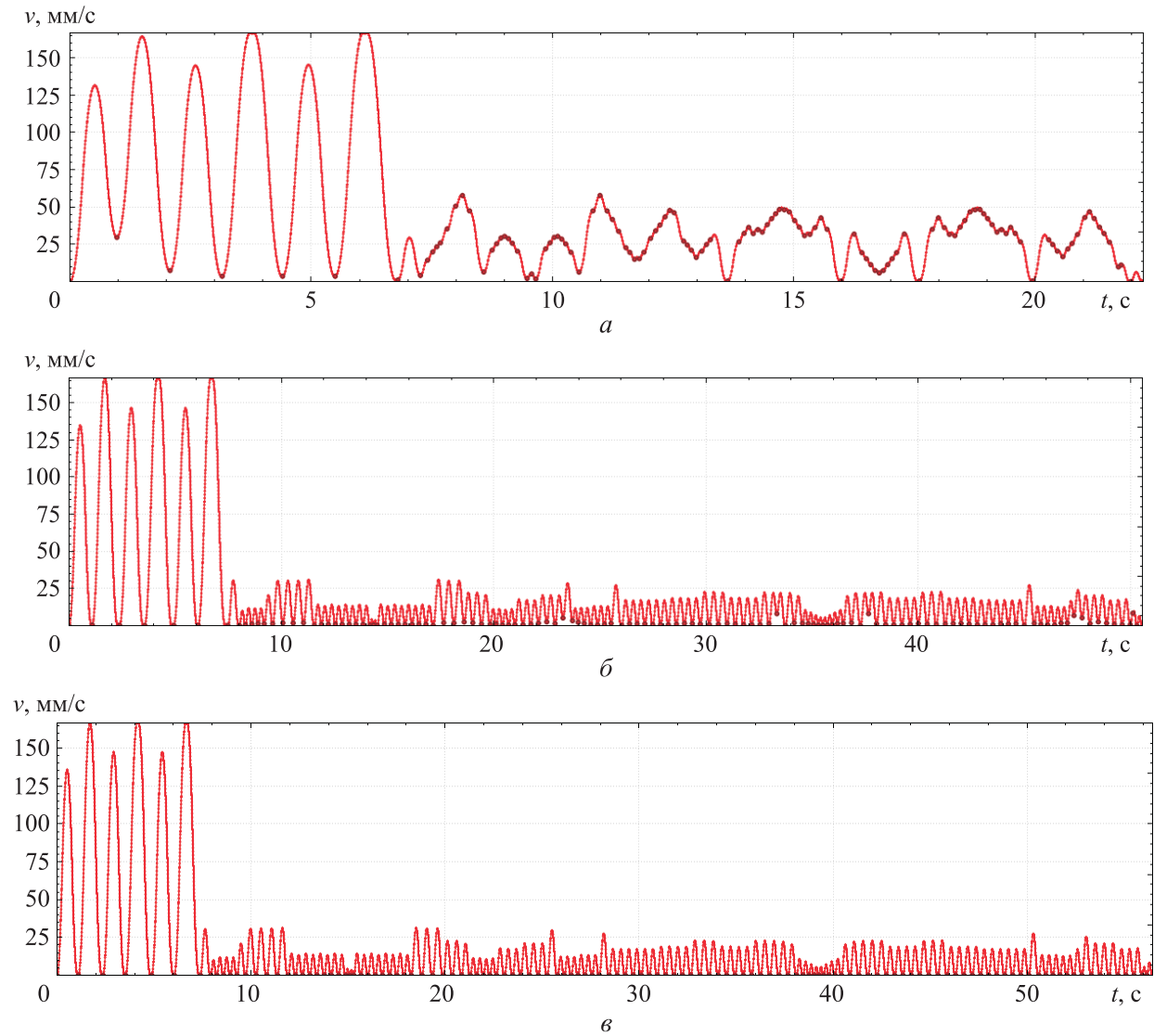


Рис. 6. Зависимости скорости подачи  $v$  от времени интерполяции  $t$  с использованием разных наборов программных модулей:

$a$  — предпросмотра кадров со сглаживанием траектории (суммарное время отработки всей траектории  $t_{\Sigma} \approx 21,99$  с);  
 $b$  — предпросмотра кадров без сглаживания траектории ( $t_{\Sigma} \approx 50,29$  с);  $v$  — режима G61 ( $t_{\Sigma} \approx 56,18$  с);

● — первая интерполируемая точка сегмента

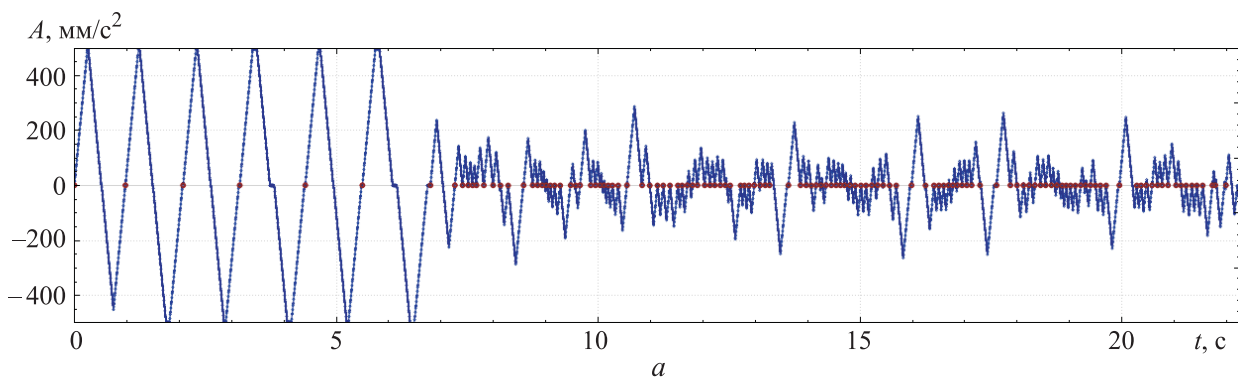


Рис. 7 (начало). Зависимости тангенциального ускорения  $A$  ( $a$ ) и рывка  $J$  ( $b$ ) при S-образном разгоне/торможения от времени интерполяции  $t$ :

● — первая интерполируемая точка сегмента

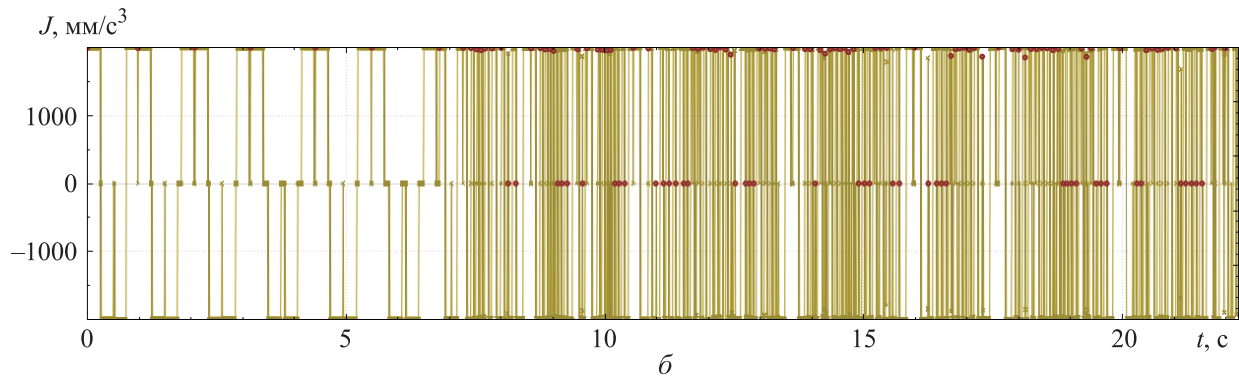


Рис. 7 (окончание). Зависимости тангенциального ускорения  $A$  (а) и рывка  $J$  (б) при S-образном разгоне/торможении от времени интерполяции  $t$ :  
 ● — первая интерполируемая точка сегмента

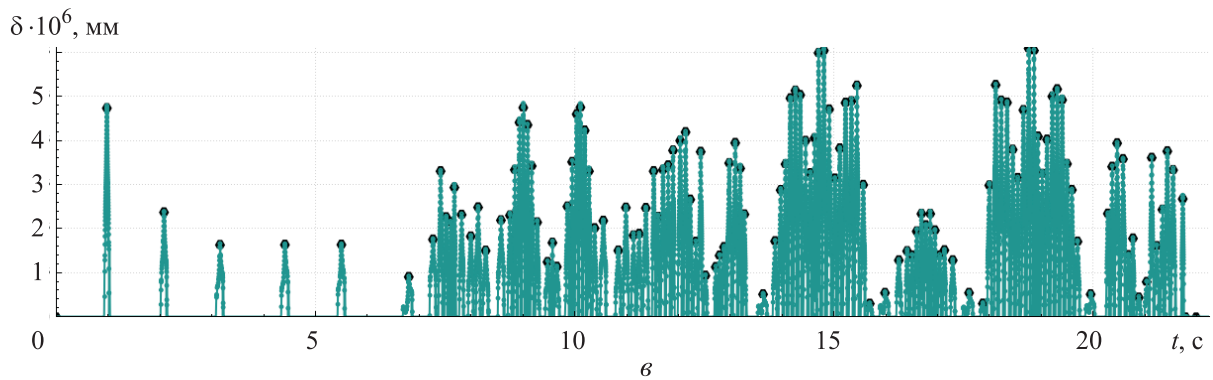
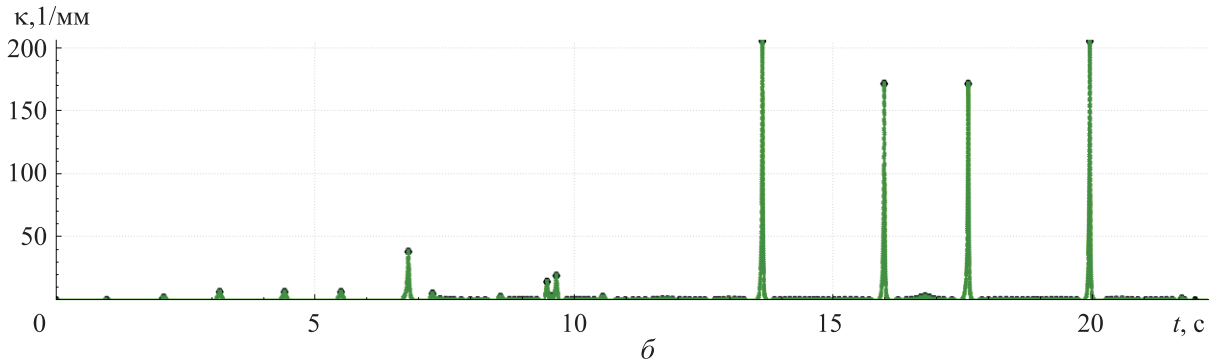
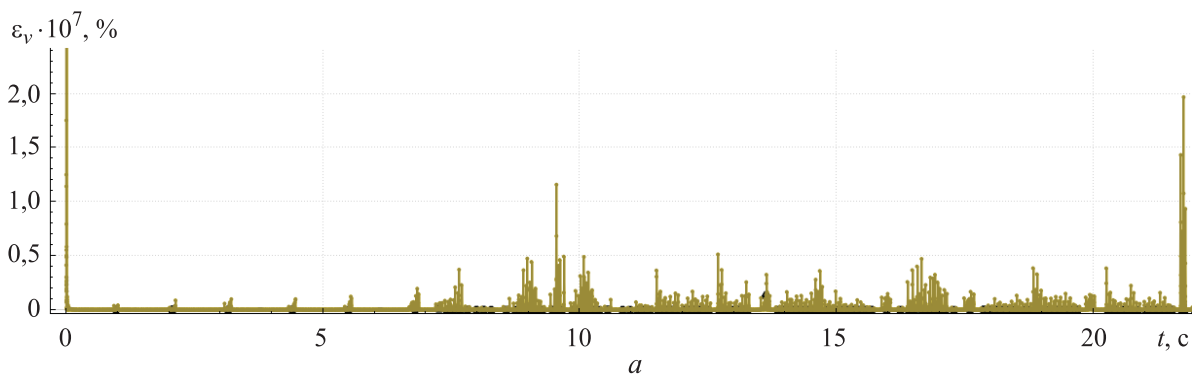


Рис. 8. Зависимости ошибки скорости подачи  $\epsilon_v$  при использовании алгоритма Рунге — Кутты с компенсационной схемой приближения (а), кривизны траектории  $\kappa$  при отработке контура (б) и хордовой ошибки построения сплайна  $\delta$  для сглаживающих участков (в) от времени интерполяции  $t$ :  
 ● — первая интерполируемая точка сегмента

Предложенный алгоритм S-образного разгона/торможения формирует профили с отсутствием резких колебаний скоростей подачи и соблюдением заданных кинематических ограничений на тангенциальные рывок и ускорение (рис. 7).

Однако следующий этап линейно-параметрической интерполяции вносит отклонения в запланированный S-образный профиль разгона/торможения из-за аппроксимации параметра сплайна в каждый дискретный промежуток времени.

Реализованный алгоритм параметрической интерполяции демонстрирует максимальное отклонение скорости подачи  $\varepsilon_v \approx 1,96 \cdot 10^{-7} \%$  (рис. 8, а), которое лежит в пределах допустимых значений для высокоскоростной обработки (до 0,1 %) [23]. Максимальная хордовая ошибка построения сплайна на сглаживающих участках составляет  $\sim 6,1 \cdot 10^{-6}$  мм < 0,005 мм (рис. 8, в).

## Выводы

1. Увеличение производительности контурной механической обработки достигнуто путем преобразования исходной кусочно-линейной траектории в траекторию, содержащую сглаженные участки, с использованием квазиоптимального метода планирования подач, реализо-

ванного с помощью четырех новых программных модулей. К ним относятся геометрический модуль сглаживания, модуль двунаправленного предпросмотра кадров, модуль планировщика подач и линейно-параметрический интерполлятор.

2. Использование кубического B-сплайна позволило с учетом заданных геометрических и кинематических ограничений реализовать траекторию с геометрической непрерывностью  $G^2$ .

3. Анализ результатов исследования показал, что наилучшая производительность обеспечивается при использовании в системе управления всех четырех программных модулей, которые формируют новую траекторию со вставленными сплайновыми участками, но при этом может незначительно уменьшаться точность обработки. Предложенный подход позволил уменьшить время прохождения тестового контура на 60,86 % по сравнению с таковым, полученным исходным методом в режиме точного останова G61.

4. Экспериментальные данные подтвердили эффективность предложенного решения повышения производительности и целесообразность применения разработанных программных модулей при разработке систем управления станков и промышленных роботов, предназначенных для обработки деталей со сложной формой поверхности.

## Литература

- [1] Зеленский А.А., Харьков М.А., Ивановский С.П. и др. Высокопроизводительная система числового программного управления на базе программируемых логических интегральных схем. *Вестник ВГТУ*, 2018, № 5, с. 8–11.
- [2] Pateloup V., Duc E., Ray P. Bspline approximation of circle arc and straight line for pocket machining. *Comput. Aided Des.*, 2010, vol. 42, no. 9, pp. 817–827, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.05.003>
- [3] Zhong W.B., Luo X.C., Chang W.L. et al. Toolpath interpolation and smoothing for computer numerical control machining of freeform surfaces: a review. *Int. J. Autom. Comput.*, 2020, vol. 17, no. 1, pp. 1–16, doi: <https://doi.org/10.1007/s11633-019-1190-y>
- [4] Du X., Huang J., Zhu L.M. A complete S-shape feed rate scheduling approach for NURBS interpolator. *J. Comput. Des. Eng.*, 2015, vol. 2, no. 4, pp. 206–217, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2015.06.004>
- [5] Абдуллин Т.Х., Харьков М.А. Алгоритм опережающего просмотра для системы ЧПУ с применением трапецеидальных законов разгона/торможения. *Машиноведение и инновации. Конф. молодых ученых и студентов*. Москва, ИМАШ РАН, 2017, с. 256–259.
- [6] Заруднев А.С., Илюхин Ю.В. Повышение производительности мехатронных комплексов лазерной обработки на основе зависимости контурной погрешности от параметров движения и исполнительных систем. *Известия Самарского научного центра РАН*, 2007, т. 9, № 3, с. 758–764.
- [7] Заруднев А.С., Илюхин Ю.В. Повышение производительности лазерных комплексов на основе прогноза контурной ошибки. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2010, № 9, с. 52–56.

- [8] Zhao H., Zhu L.M., Ding H. A real-time look-ahead interpolation methodology with curvature-continuous B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments. *Int. J. Mach. Tool Manuf.*, 2013, vol. 65, pp. 88–98, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2012.10.005>
- [9] Sun S.J., Lin H., Zheng L.M. et al. A real-time and look-ahead interpolation methodology with dynamic B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2016, vol. 84, no. 5-8, pp. 1359–1370, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7776-9>
- [10] Lin M.T., Tsai M.S., Yau H.T. Development of dynamic-based NURBS interpolator with real-time look-ahead algorithm. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2007, vol. 47, no. 15, pp. 2246–2262, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2007.06.005>
- [11] Luo F.Y., Zhou Y.F., Yin J. A universal velocity profile generation approach for high-speed machining of small line segments with look-ahead. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2007, vol. 35, no. 5-6, pp. 505–518, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-006-0735-8>
- [12] Зеленский А.А., Подураев Ю.В., Бондарь Д.В. Способ повышения точности интерполяции сложного контура для мехатронных модулей и промышленных роботов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2011, № 9, с. 44–48, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2011-9-44-48>
- [13] Зеленский А.А., Абдуллин Т.Х., Илюхин Ю.В. и др. Высокопроизводительная цифровая система на основе ПЛИС для управления движением многокоординатных станков и промышленных роботов. *СТИН*, 2019, № 8, с. 5–8.
- [14] Зеленский А.А., Стебулянин М.М., Абдуллин Т.Х. и др. Реализация ускоренных вычислений прямой задачи кинематики для промышленных роботов. *Вестник машиностроения*, 2019, № 11, с. 28–31.
- [15] Zhao H., Zhu L., Xiong Z. et al. Development of FPGA based nurbs interpolator and motion controller with multiprocessor technique. *Chin. J. Mech. Eng.*, 2013, vol. 26, no. 5, pp. 940–946, doi: <https://doi.org/10.3901/CJME.2013.05.940>
- [16] Beudaert X., Lavernhe S., Tournier C. 5-axis local corner rounding of linear tool path discontinuities. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2013, vol. 73, pp. 9–16, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2013.05.008>
- [17] Huang J., Du X., Zhu L.M. Real-time local smoothing for five-axis linear toolpath considering smoothing error constraints. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2018, vol. 124, pp. 67–79, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2017.10.001>
- [18] Основы кривых Безье. *pomax.github.io: веб-сайт*. URL: <https://pomax.github.io/bezierinfo/ru-RU/index.html> (дата обращения: 15.01.2021).
- [19] Erkorkmaz K., Altintas Y. High speed CNC system design. Part I. Jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2001, vol. 41, no. 9, pp. 1323–1345, doi: [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(01\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(01)00002-5)
- [20] Lee A.C., Lin M.T., Pana Y.R. et al. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools. *Comput. Aided Des.*, 2011, vol. 43, no. 6, pp. 612–628, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2011.02.014>
- [21] Ni H., Hu T., Zhang C. et al. An optimized feedrate scheduling method for CNC machining with round-off error compensation. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2018, vol. 97, no. 5-8, pp. 2369–2381, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-018-1986-x>
- [22] Huang J., Du X., Zhu L.M. Feasibility of the bi-directional scanning method in acceleration/deceleration feedrate scheduling for CNC machining. *ICIRA*, 2017, pp. 171–183, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-65292-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-65292-4_16)
- [23] Zhao H., Zhu L., Ding H. A parametric interpolator with minimal feed fluctuation for CNC machine tools using arc-length compensation and feedback correction. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2013, vol. 75, pp. 1–8, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2013.08.002>

## References

- [1] Zelenskiy A.A., Khar'kov M.A., Ivanovskiy S.P. et al. High-performance numerical control system based on programmable logic devices. *Vestnik VGTU [Bulletin of Voronezh State Technical University]*, 2018, no. 5, pp. 8–11. (In Russ.).

- [2] Pateloup V., Duc E., Ray P. Bspline approximation of circle arc and straight line for pocket machining. *Comput. Aided Des.*, 2010, vol. 42, no. 9, pp. 817–827, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.05.003> (in Russ.).
- [3] Zhong W.B., Luo X.C., Chang W.L. et al. Toolpath interpolation and smoothing for computer numerical control machining of freeform surfaces: a review. *Int. J. Autom. Comput.*, 2020, vol. 17, no. 1, pp. 1–16, doi: <https://doi.org/10.1007/s11633-019-1190-y>
- [4] Du X., Huang J., Zhu L.M. A complete S-shape feed rate scheduling approach for NURBS interpolator. *J. Comput. Des. Eng.*, 2015, vol. 2, no. 4, pp. 206–217, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2015.06.004>
- [5] Abdullin T.Kh., Khar'kov M.A. [Look-ahead algorithm for CNC using trapezoid acceleration/deceleration law]. *Mashinovedenie i innovatsii. Konf. molodykh uchenykh i studentov* [Machine science and innovations. Conf. Young Scientists and Students]. Moscow, IMASH RAS Publ., 2017, pp. 256–259. (In Russ.).
- [6] Zarudnev A.S., Ilyukhin Yu.V. Increase of productivity of mechatronic complexes of laser processing on the basis of dependence of the planimetric error on parameters of movement and executive systems. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN* [Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2007, vol. 9, no. 3, pp. 758–764. (In Russ.).
- [7] Zarudnev A.S., Ilyukhin Yu.V. On the improvement of laser cutting machines productivity by evaluation of planimetric error. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, Automation, Control], 2010, no. 9, pp. 52–56. (In Russ.).
- [8] Zhao H., Zhu L.M., Ding H. A real-time look-ahead interpolation methodology with curvature-continuous B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments. *Int. J. Mach. Tool Manuf.*, 2013, vol. 65, pp. 88–98, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2012.10.005>
- [9] Sun S-J., Lin H., Zheng L.M. et al. A real-time and look-ahead interpolation methodology with dynamic B-spline transition scheme for CNC machining of short line segments. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2016, vol. 84, no. 5-8, pp. 1359–1370, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7776-9>
- [10] Lin M.T., Tsai M.S., Yau H.T. Development of dynamic-based NURBS interpolator with real-time look-ahead algorithm. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2007, vol. 47, no. 15, pp. 2246–2262, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2007.06.005>
- [11] Luo F.Y., Zhou Y.F., Yin J. A universal velocity profile generation approach for high-speed machining of small line segments with look-ahead. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2007, vol. 35, no. 5-6, pp. 505–518, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-006-0735-8>
- [12] Zelenskiy A.A., Poduraev Yu.V., Bondar' D.V. The method to improve the accuracy of interpolation of complex contour for mechatronic modular units and industrial robots. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2011, no. 9, pp. 44–48, doi: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2011-9-44-48> (in Russ.).
- [13] Zelenskiy A.A., Abdullin T.Kh., Ilyukhin Yu.V. et al. High-performance digital system based on PLIS for motion control on multi multiaxis machines and industrial robots. *STIN*, 2019, no. 8, pp. 5–8. (In Russ.).
- [14] Zelenskiy A.A., Stebulyanin M.M., Abdullin T.Kh. et al. Realization of accelerated calculations of the direct kinematics problem for industrial robots. *Vestnik mashinostroeniya*, 2019, no. 11, pp. 28–31. (In Russ.).
- [15] Zhao H., Zhu L., Xiong Z. et al. Development of FPGA based nurbs interpolator and motion controller with multiprocessor technique. *Chin. J. Mech. Eng.*, 2013, vol. 26, no. 5, pp. 940–946. DOI: <https://doi.org/10.3901/CJME.2013.05.940>
- [16] Beudaert X., Lavernhe S., Tournier C. 5-axis local corner rounding of linear tool path discontinuities. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2013, vol. 73, pp. 9–16, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2013.05.008>
- [17] Huang J., Du X., Zhu L.M. Real-time local smoothing for five-axis linear toolpath considering smoothing error constraints. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2018, vol. 124, pp. 67–79, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2017.10.001>
- [18] Osnovy krivyykh Bez'ye [Fundamentals of Bezier splines]. *pomax.github.io: website*. URL: <https://pomax.github.io/bezierinfo/ru-RU/index.html> (accessed: 15.01.2021). (In Russ.).

- [19] Erkorkmaz K., Altintas Y. High speed CNC system design. Part I. Jerk limited trajectory generation and quintic spline interpolation. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2001, vol. 41, no. 9, pp. 1323–1345, doi: [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(01\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(01)00002-5)
- [20] Lee A.C., Lin M.T., Pana Y.R. et al. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools. *Comput. Aided Des.*, 2011, vol. 43, no. 6, pp. 612–628, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2011.02.014>
- [21] Ni H., Hu T., Zhang C. et al. An optimized feedrate scheduling method for CNC machining with round-off error compensation. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2018, vol. 97, no. 5–8, pp. 2369–2381, doi: <https://doi.org/10.1007/s00170-018-1986-x>
- [22] Huang J., Du X., Zhu L.M. Feasibility of the bi-directional scanning method in acceleration/deceleration feedrate scheduling for CNC machining. *ICIRA*, 2017, pp. 171–183, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-65292-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-65292-4_16)
- [23] Zhao H., Zhu L., Ding H. A parametric interpolator with minimal feed fluctuation for CNC machine tools using arc-length compensation and feedback correction. *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, 2013, vol. 75, pp. 1–8, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2013.08.002>

Статья поступила в редакцию 13.09.2021

## Информация об авторах

**ЗЕЛЕНСКИЙ Александр Александрович** — кандидат технических наук, доцент, директор «Института цифровых интеллектуальных систем». ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» (127055, Москва, Российская Федерация, Вадковский пер., д. 3а, e-mail: [zelenskyaa@gmail.com](mailto:zelenskyaa@gmail.com)).

**АБДУЛЛИН Тагир Хабибович** — ведущий инженер, преподаватель кафедры «Промышленная электроника и интеллектуальные цифровые системы». ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» (127055, Москва, Российская Федерация, Вадковский пер., д. 3а, e-mail: [everestultimate@yandex.ru](mailto:everestultimate@yandex.ru)).

**АЛЕПКО Андрей Владимирович** — кандидат технических наук, ведущий инженер, доцент кафедры «Промышленная электроника и интеллектуальные цифровые системы». ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» (127055, Москва, Российская Федерация, Вадковский пер., д. 3а, e-mail: [dtnt1121@gmail.com](mailto:dtnt1121@gmail.com)).

**ИЛЮХИН Юрий Владимирович** — доктор технических наук, профессор кафедры «Робототехника и мехатроника». ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» (127055, Москва, Российская Федерация, Вадковский пер., д. 3а, e-mail: [ilyv-2@mail.ru](mailto:ilyv-2@mail.ru)).

## Information about the authors

**ZELENSKY Alexander Alexandrovich** — Candidate of Science (Eng.), Associate Professor, Director of the Institute of Digital Intelligent Systems. Moscow State University of Technology STANKIN (127055, Moscow, Russian Federation, Vadkovskiy per., Bldg. 3a, e-mail: [zelenskyaa@gmail.com](mailto:zelenskyaa@gmail.com)).

**ABDULLIN Tagir Khabibovich** — Leading Engineer, Lecturer, Department of Industrial Electronics and Intelligent Digital Systems. Moscow State University of Technology STANKIN (127055, Moscow, Russian Federation, Vadkovskiy per., Bldg. 3a, e-mail: [everestultimate@yandex.ru](mailto:everestultimate@yandex.ru)).

**ALEPKO Andrey Vladimirovich** — Candidate of Science (Eng.), Leading Engineer, Associate Professor, Department of Industrial Electronics and Intelligent Digital Systems. Moscow State University of Technology STANKIN (127055, Moscow, Russian Federation, Vadkovskiy per., Bldg. 3a, e-mail: [dtnt1121@gmail.com](mailto:dtnt1121@gmail.com)).

**ILYUKHIN Yuri Vladimirovich** — Doctor of Science (Eng.), Professor, Department of Robotics and Mechatronics. Moscow State University of Technology STANKIN (127055, Moscow, Russian Federation, Vadkovskiy per., Bldg. 3a, e-mail: [ilyv-2@mail.ru](mailto:ilyv-2@mail.ru)).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зеленский А.А., Абдуллин Т.Х., Алепко А.В., Илюхин Ю.В. Повышение производительности контурной механической обработки путем сглаживания пространственной кусочно-линейной траектории и квазиоптимального планирования подач. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 2, с. 3–17, doi: [10.18698/0536-1044-2022-2-3-17](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-2-3-17)

### Please cite this article in English as:

Zelensky A.A., Abdullin T.Kh., Alepko A.V., Ilyukhin Yu.V. Contour Machining Performance Improvement by Smoothing Spatial Piecewise Linear Toolpath and Quasi-Optimal Feed Rate Planning. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2022, no. 2, pp. 3–17, doi: [10.18698/0536-1044-2022-2-3-17](https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-2-3-17)